

## مقایسه مدل‌های توزیع لوگ-نرمال و گاما برای نمایش منحنی توزیع اندازه ذرات خاک

مرتضی صادقی<sup>۱\*</sup> - بیژن قهرمان<sup>۲</sup> - کامران داوری<sup>۳</sup>

تاریخ دریافت: ۸۷/۷/۱۳

تاریخ پذیرش: ۸۷/۴/۱۴

### چکیده

در سال‌های اخیر محققین زیادی برای تخمین توابع هیدرولیکی خاک (از جمله منحنی مشخصه رطوبتی و تابع هدایت هیدرولیکی) از روی منحنی توزیع اندازه ذرات (PSD) خاک کوشیده‌اند. در این گونه مطالعات یک مدل ریاضی برای نمایش PSD خاک ضروری به نظر می‌رسد، به گونه‌ای که بتواند برازش دقیقی به داده‌های مشاهده شده PSD داشته باشد. تا کنون چندین مدل ریاضی برای این مورد هر کدام با مزایا و معایبی ارائه شده‌اند. دقت برازش هر مدل به داده‌های مشاهده شده PSD با تعداد پارامترهای آن مدل رابطه مستقیم دارد. اما تخمین پارامترهای مدل‌های چندپارامتری که دارای مفهوم ریاضی و فیزیکی نمی‌باشند، خود یک مسأله در این مدل‌ها می‌باشد. در این میان مدل توزیع لوگ-نرمال<sup>۴</sup> دو پارامتری که پارامترهای آن دارای مفهوم ریاضی می‌باشند، اساس کار محققین زیادی قرار گرفته است. در این تحقیق نشان داده شده است که مدل توزیع لوگ-نرمال دو پارامتری نمی‌تواند نمایش دقیقی برای PSD همه کلاس‌های بافت خاک داشته باشد. به عنوان یک جایگزین، در این تحقیق مدل توزیع گامای<sup>۵</sup> دوپارامتری برای نمایش دقیق‌تر PSD خاک پیشنهاد شده است به گونه‌ای که دو پارامتر این مدل نیز دارای مفهومی ریاضی و به راحتی قابل محاسبه می‌باشند. مقایسه دقت این دو مدل در نمایش PSD با برازش به داده‌های مشاهده شده تعداد ۴۶۱ نمونه خاک پایگاه داده<sup>۶</sup> UNSODA مورد بررسی قرار گرفته است. بهبود دقت نمایش PSD توسط مدل توزیع گاما نسبت به مدل توزیع لوگ-نرمال کاملاً مشهود بوده است. بر مبنای عامل ضریب برازش ( $R^2$ ) در تعداد ۳۶۲ خاک و بر مبنای عامل ریشه میانگین مربعات خطا<sup>۸</sup> (RMSE) در تعداد ۳۲۳ خاک از مجموع ۴۶۱ خاک بررسی شده، مدل توزیع گاما نمایش دقیق‌تری از PSD نسبت به مدل توزیع لوگ-نرمال داشته است. نتایج آزمون t نشان داد که مقادیر  $R^2$  مدل گاما در سطح اعتماد ۱٪ به طور معنی‌داری بزرگتر از مقادیر مربوط به مدل لوگ-نرمال بود. همچنین اختلاف معنی‌داری در سطح ۵٪ بین مقادیر RMSE حاصل از دو مدل نشان داده شد. بنابراین به طور کلی این طور نتیجه‌گیری می‌شود که مدل گامای دو پارامتری در نمایش منحنی توزیع اندازه ذرات خاک بر مدل لوگ-نرمال دو پارامتری برتری دارد.

واژه‌های کلیدی: منحنی توزیع اندازه ذرات خاک (PSD)، توزیع لوگ-نرمال، توزیع گاما، UNSODA

### مقدمه

منحنی توزیع اندازه ذرات (PSD) یکی از ویژگی‌های فیزیکی اساسی هر خاک می‌باشد (۱۰). این منحنی معمولاً به صورت توزیع

۱، ۲ و ۳- به ترتیب دانشجوی دکتری آبیاری و زهکشی، دانشیار و استادیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه فردوسی مشهد

\* - نویسنده مسئول :

(Email: m.sadeghi.um@gmail.com)

- 4- Particle-size distribution
- 5- Log-normal
- 6- Gamma
- 7- Unsaturated soil database
- 8- Root mean squares error

تجمعی احتمال قطر ذرات جامد خاک بیان می‌شود. از آنجایی که اندازه‌گیری نقاط این منحنی بسیار ساده‌تر از اندازه‌گیری توابع هیدرولیکی خاک (از جمله منحنی مشخصه رطوبتی و منحنی هدایت هیدرولیکی غیراشباع خاک) می‌باشد و نیز به دلیل شباهت ظاهری بین این دو منحنی، در سال‌های اخیر مطالعات زیادی جهت تخمین توابع هیدرولیکی خاک از روی PSD صورت گرفته است. (۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۷ و ۱۹) در این گونه مطالعات وجود یک مدل ریاضی برای نمایش PSD خاک ضروری به نظر می‌رسد، به گونه‌ای که بتواند برازش دقیقی به داده‌های مشاهده شده PSD داشته باشد (۱۰).

آزمون نشده است. هدف عمده از این تحقیق آزمون مدل توزیع گامای دو پارامتری برای نمایش PSD کلاس‌های مختلف بافتی و پاسخ به این سوال است که آیا این مدل می‌تواند محدودیت‌های مدل لوگ-نرمال را در بعضی کلاس‌ها برطرف کند.

### ساختار ریاضی مدل‌ها

#### مدل توزیع لوگ-نرمال دو پارامتری

برای بیان تابع چگالی احتمال اندازه ذرات خاک توسط مدل توزیع لوگ-نرمال دو پارامتری از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$f(x) = \left[ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right] \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (1)$$

که در این رابطه  $x$  لگاریتم اندازه ذرات خاک  $(\ln d)$ ،  $\mu$  و  $\sigma$  به ترتیب میانگین و انحراف معیار توزیع  $x$  می‌باشند که با میانگین  $(m)$  و انحراف معیار  $(sd)$  داده‌ها در فضای احتمالاتی به صورت زیر مربوط می‌شوند:

$$m = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (2)$$

$$sd = m[\exp(\sigma^2) - 1]^{0.5} \quad (3)$$

اما مدل توزیع لوگ-نرمال دو پارامتری برای بیان توزیع تجمعی احتمال اندازه ذرات خاک که شکل رایج مورد استفاده PSD خاک می‌باشد، از رابطه زیر تبعیت می‌کند:

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx \quad (4)$$

#### مدل توزیع گامای دو پارامتری

برای بیان تابع چگالی احتمال اندازه ذرات خاک توسط مدل توزیع گامای دو پارامتری، از رابطه زیر استفاده می‌شود (۴):

$$f(x) = \frac{x^{k-1} \exp[-x/\theta]}{\theta^k \Gamma(k)} \quad (5)$$

که در این معادله متغیر  $x$  معادل قطر ذرات خاک  $(d)$ ،  $k$  پارامتر موسوم به عامل شکل<sup>۲</sup> و  $\theta$  پارامتر موسوم به عامل مقیاس<sup>۳</sup> می‌باشد. این دو پارامتر فقط مقادیر مثبت را می‌پذیرند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$k = \left(\frac{m}{sd}\right)^2 \quad (6)$$

$$\theta = \frac{sd^2}{m} \quad (7)$$

$\Gamma(k)$  در رابطه (۵)، تابع گامای پارامتر  $k$  می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

تا کنون چندین مدل ریاضی هر کدام با مزایا و معایبی ارائه شده‌اند. دقت برازش این مدل‌ها به داده‌های مشاهده شده، معمولاً به تعداد پارامترهای آن مدل وابسته می‌باشد. به گونه‌ای که هرچه تعداد پارامترهای یک مدل بیشتر باشد، برازش دقیق‌تری خواهد داشت. اما تخمین پارامترهای مدل‌های چند پارامتری که دارای مفهوم ریاضی و فیزیکی نمی‌باشند، خود یک مسأله در این مدل‌ها می‌باشد که نیازمند به روش‌های عددی و محاسباتی و نرم‌افزارهای کامپیوتری می‌باشد. از این گذشته در این گونه موارد، در نظر گرفتن مقادیر اولیه مناسب برای پارامترهای مدل در شروع محاسبات عددی خود یک مسأله می‌باشد. به این دلایل معیارهای آماری مقایسه بین دو مدل با تعداد پارامترهای متفاوت، به ازای هر تعداد پارامترهای بیشتر یک مدل برای آن یک جریمه در نظر می‌گیرند (۵ و ۱۰). اما در بین مدل‌های موجود مدل توزیع لوگ-نرمال دو پارامتری تنها مدلی است که پارامترهای آن ماهیت ریاضی مشخص دارند و به راحتی از روی داده‌های موجود قابل محاسبه می‌باشند. به همین دلیل این مدل به کرات برای نمایش PSD خاک مورد استفاده قرار گرفته است (۵، ۶، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴ و ۱۸). لازم به ذکر است که این مدل در حالی اساس بسیاری از مطالعات قرار گرفته است که بر محققین در این زمینه پوشیده نبوده است که مدل توزیع لوگ-نرمال برای همه کلاس‌های بافت خاک دقت لازم را ندارد. به عنوان مثال، بوچان (۵) نشان داد که مدل توزیع لوگ-نرمال تنها برای نمایش PSD حدود نیمی از خاک‌های مثلث بافت خاک سازمان کشاورزی ایالات متحده (USDA)<sup>۱</sup> می‌تواند با دقت مناسبی به کار رود. هوانگ و همکاران (۱۰) نیز در مطالعات خود نشان دادند که مدل مذکور در مورد خاک‌های رس سیلتی، لوم رسی سیلتی و لوم رسی دقت خوبی داشته است و در سایر خاک‌ها موفق نبوده است. محدودیت عمده مدل توزیع لوگ-نرمال در استفاده برای نمایش PSD، تقارن آن (در مقیاس لگاریتمی) می‌باشد، در حالی که PSD بسیاری از خاک‌ها این تقارن را نشان نمی‌دهد (۷).

برای رفع این مشکل، مدل توزیع گامای دو پارامتری پیشنهاد می‌شود. پیشنهاد این مدل در این تحقیق به دو دلیل می‌باشد: نخست این که پارامترهای این مدل همانند مدل توزیع لوگ-نرمال دارای مفاهیم ریاضی هستند و به راحتی قابل محاسبه می‌باشند و دوم این که در قیاس با مدل توزیع لوگ-نرمال این مدل از عدم تقارن و انعطاف‌پذیری بیشتری برای برازش به داده‌های مشاهده شده برخوردار هست.

اگرچه پیشتر راسل (۱۶) برای نمایش توزیع اندازه ذرات تکه‌های درشت سنگ‌های گرانیتی در حال تخریب استفاده کرد، دقت مدل توزیع گاما در نمایش PSD خاک‌های زراعی با بافت‌های مختلف،

2- Shape parameter

3- Scale parameter

1- United States Department of Agriculture

که در این معادلات  $F_i$  احتمال تجمعی حاصل از مشاهدات مربوط به نقطه  $X_i$  می‌باشد به نحوی که در مدل لوگ-نرمال  $X_i$  معادل لگاریتم اندازه ذرات ( $\ln d_i$ ) و در مدل گاما معادل اندازه ذرات ( $d_i$ ) می‌باشد و  $n$  تعداد نقاط مشاهده شده از منحنی PSD می‌باشد. همچنین در محاسبات فوق باید مقدار صفر برای  $X_0$  و  $f_0$  لحاظ گردد.

روابط (۹) و (۱۰) در واقع میانگین و انحراف معیار وزنی داده‌های PSD می‌باشند که با مفاهیم "امید ریاضی" برای مقادیر گسسته نیز قابل استحصال هستند. امید ریاضی در فضای احتمالاتی در واقع همان سطح زیرمنحنی تابع توزیع تجمعی احتمال می‌باشد. در مورد منحنی PSD، سطح محدود به منحنی و خط  $F(x)=1$  می‌باشد که در واقع سطح زیر منحنی تابع توزیع تجمعی احتمال ذرات بزرگتر از  $x$  می‌باشد (شکل ۲).

در این تحقیق مقادیر میانگین و انحراف معیار داده‌ها از روابط (۹) و (۱۰) محاسبه گردید. آنگاه دو پارامتر مدل توزیع لوگ-نرمال از معادلات (۲) و (۳) و دو پارامتر مدل توزیع گاما با داشتن مقادیر از معادلات (۶) و (۷) محاسبه شدند. پس از محاسبه پارامترهای دو مدل، نرم‌افزار Microsoft Excel برای محاسبات به کار گرفته شد. چراکه هر دو مدل توزیع لوگ-نرمال و گاما در این محیط تعریف شده می‌باشند.

دقت برازش دو مدل مذکور به داده‌های مشاهده شده با دو معیار ضریب برازش ( $R^2$ ) و ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE) بررسی گردید. این دو معیار از روابط زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$R^2 = \frac{\left[ n \left( \sum_{i=1}^n F_i F'_i \right) - \sum_{i=1}^n F_i \sum_{i=1}^n F'_i \right]^2}{\left[ \sqrt{n \sum_{i=1}^n F_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n F_i \right)^2} \times \sqrt{n \sum_{i=1}^n F'^2_i - \left( \sum_{i=1}^n F'_i \right)^2} \right]^2} \quad (11)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (F_i - F'_i)^2}{n}} \quad (12)$$

که  $F'_i$  احتمال تجمعی مربوط به نقطه  $X_i$  می‌باشد که مدل برازش داده شده به دست می‌دهد.

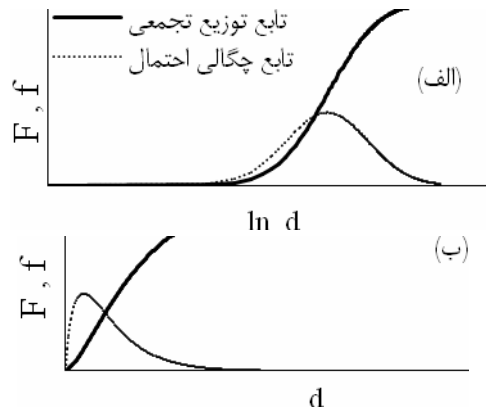
برای بررسی معنی‌داری اختلاف بین دو مدل، آزمون یک دامنه  $t$  با استفاده از تابع TTEST در محیط Excel انجام گردید.

۳- در محیط Excel مدل‌های توزیع لوگ-نرمال و گاما، به ترتیب با توابع NORMDIST و GAMMADIST بیان می‌شوند.

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} \exp(-x) dx = (k-1)! \quad (8)$$

و توزیع تجمعی گاما نیز مانند مدل لوگ-نرمال از معادله (۴) به دست می‌آید.

در شکل (۱) تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال مدل‌های توزیع لوگ-نرمال و گاما به طور ترسیمی نشان داده شده است.



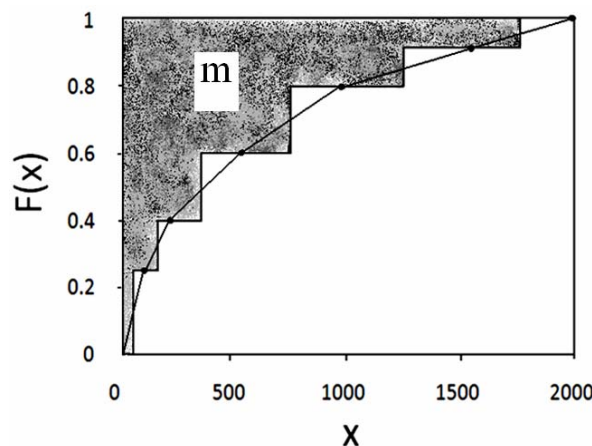
(شکل ۱) - نمایش ترسیمی مدل‌های توزیع (الف) لوگ-نرمال و (ب) گاما.

## مواد و روش‌ها

در این تحقیق مدل‌های توزیع لوگ-نرمال و گاما به داده‌های مشاهده شده PSD مربوط به تعداد ۴۶۱ نمونه خاک موجود در پایگاه داده UNSODA (۱۵) برازش داده شدند. این ۴۶۱ خاک از بین تعداد ۷۹۰ نمونه خاک موجود در پایگاه داده UNSODA انتخاب گردیدند و در واقع همه آن‌هایی بودند که داده‌های منحنی PSD آن‌ها حداقل دارای پنج نقطه اندازه‌گیری شده بود. هرچند محدودیتی در تعداد نقاط لازم برای برازش مدل‌ها وجود ندارد، مسلم است که هرچه تعداد نقاط اندازه‌گیری شده بیشتری از منحنی PSD موجود باشد و هرچه نقاط گسترده و وسیع‌تری از اندازه ذرات را شامل شوند، مدل‌های مذکور نمایش دقیق‌تر و واقعی‌تری از منحنی PSD خواهند داشت. برای تخمین پارامترهای دو مدل، میانگین و انحراف معیار داده‌ها از روابط زیر محاسبه گردید:

$$m = \sum_{i=1}^n \left[ (F_i - F_{i-1}) \left( \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right) \right] \quad (9)$$

$$sd = \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ (F_i - F_{i-1}) \left( \frac{x_i + x_{i-1}}{2} - m \right)^2 \right] \right\}^{0.5} \quad (10)$$



(شکل ۲) - شرح ترسیمی نحوه محاسبه میانگین منحنی PSD طبق معادله (۹)

## نتایج و بحث

نتایج حاصله از برازش دو مدل معرفی شده به نقاط مشاهده شده از منحنی PSD مربوط به ۴۶۱ نمونه خاک مذکور و مقایسه بین دو مدل، حاکی از برتری مدل گاما در دقت برازش بود. مقادیر  $R^2$  و RMSE برای همه نمونه‌ها در شکل (۳) نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که به جز موارد اندکی (نقاط پایین خط ۱:۱ در شکل ۳-الف و نقاط بالای شکل ۳-ب) در بقیه موارد مدل گاما دارای ضریب برازش بالاتر و خطای کمتری بوده است. اختلاف فاحش بین خط برازش داده شده بر روی نقاط و خط ۱:۱ موکد این مساله است.

به طور کمی از کل ۴۶۱ نمونه خاک بررسی شده مدل توزیع گاما بر مبنای عامل  $R^2$ ، در تعداد ۳۶۲ نمونه و بر مبنای عامل RMSE، در تعداد ۳۲۳ نمونه نسبت به مدل توزیع لوگ-نرمال برتری نشان داده است. میانگین  $R^2$  برای کل نمونه‌ها برابر ۰/۹۴۵ برای مدل لوگ-نرمال و ۰/۹۷۶ برای مدل گاما به دست آمد. همچنین میانگین RMSE به ترتیب برای مدل‌های لوگ-نرمال و گاما برابر ۰/۰۸۲۲ و ۰/۰۶۷۹ محاسبه گردید.

همچنین مقایسه بین عملکرد دو مدل نام برده شده به تفکیک کلاس‌های بافت خاک ارائه شده توسط USDA انجام گردید. خلاصه نتایج مقایسه در قالب جدول (۱) ارائه شده است. نتایج آزمون معنی‌داری اختلاف دو مدل نشان داد که مقادیر میانگین  $R^2$  مدل گاما در سطح اعتماد ۱٪ به طور معنی‌داری بزرگتر از مقادیر میانگین مربوط به مدل لوگ-نرمال بود. همچنین اختلاف معنی‌داری در سطح اعتماد ۵٪ بین مقادیر میانگین RMSE حاصل از دو مدل نشان داده شد.

نتایج نشان داد که مدل توزیع گاما در همه کلاس‌ها به جز لوم سیلتی، رس سیلتی و لوم رسی سیلتی بهتر از مدل توزیع لوگ نرمال

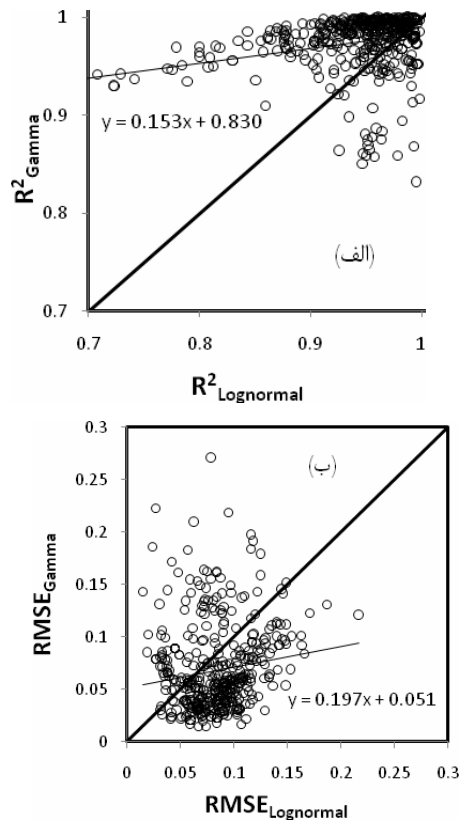
عمل کرده است. این نتیجه با یافته‌های هوانگ و همکاران (۱۰) همخوانی دارد. ایشان پس از مطالعه بر روی PSD مربوط به تعداد ۱۳۸۷ نمونه از خاک‌های کره، بیان داشتند که مدل‌های توزیع لوگ-نرمال (چه دو پارامتری و چه سه پارامتری) از میان همه کلاس‌های بافت خاک فقط در مورد خاک‌های لوم رسی، رس سیلتی و لوم رسی سیلتی عملکرد رضایت‌بخشی نشان داده اند. اما نباید از نقش تعداد کم نمونه‌های مقایسه شده بین دو مدل در کلاس‌های نام برده شده نیز غافل شد.

چه بسا که اگر مقایسه بین تعداد بیشتری از نمونه‌های خاک صورت گیرد این احتمال وجود دارد که نتایج بهتری توسط مدل گاما حاصل گردد. همچنین هوانگ و همکاران (۱۰) بدترین عملکرد مدل لوگ-نرمال را در بافت لوم رسی شنی یافتند که این یافته دقیقاً منطبق بر نتایج این تحقیق می‌باشد. دلیل این مساله را ممکن است بتوان در شکل به نسبت پیچیده منحنی PSD در خاک‌های لوم رسی شنی یافت، چراکه معمولاً منحنی PSD در این خاک‌ها وقتی به صورت تابع چگالی احتمال رسم می‌شود، برخلاف اغلب خاک‌ها که یک قله دارند، دارای دو قله می‌باشد. چنانچه در جدول (۱) نیز مشخص است، مدل گاما توانسته است دقت نمایش منحنی PSD در این کلاس را نسبت به مدل لوگ-نرمال به طور قابل توجهی افزایش دهد که دلیل آن را می‌توان در انعطاف بیشتر مدل گاما یافت. در شکل (۴) برای هر کلاس بافت خاک یک نمونه از برازش دو مدل به داده‌های مشاهده شده نشان داده شده است. در این شکل خاک‌های نشان داده شده برای هر کلاس به گونه‌ای انتخاب شدند که  $R^2$  هر یک از مدل‌ها تقریباً برابر با میانگین  $R^2$  آن کلاس (در جدول ۱) باشد. علاوه بر مقادیر  $R^2$ ، پارامترهای دو مدل گاما و لوگ-نرمال نیز برای هر کلاس در شکل (۴) مشخص شده‌اند که می‌توانند به عنوان نماینده‌ای برای سایر خاک‌های هر کلاس باشند.

که در بخش مقدمه نیز ذکر شد، یافتن مقادیر اولیه مناسب برای پارامترهای مدل‌ها در روش‌های تکراری خود یک مساله است و در صورت مناسب نبودن این مقادیر ممکن است همگرایی نتایج میسر نگردد.

### نتیجه‌گیری

مدل توزیع لوگ-نرمال دو پارامتری یک مدل پذیرفته شده برای نمایش PSD خاک می‌باشد. از آنجایی که مدل توزیع لوگ-نرمال دو پارامتری دارای پارامترهای کم و در عین حال دارای ماهیت ریاضی و قابل محاسبه می‌باشد، محققین زیادی این مدل را اساس کار مطالعات خود قرار دادند. به‌ویژه در مطالعاتی که جهت تخمین توابع هیدرولیکی خاک از روی PSD انجام گرفت، این مدل مکرراً به کار رفته است. در این تحقیق نشان داده شد که مدل توزیع لوگ-نرمال دو پارامتری نمی‌تواند در همه کلاس‌های بافت خاک برازش قابل قبولی به داده‌های مشاهده شده PSD داشته باشد. در این تحقیق مدل توزیع گامای دو پارامتری به عنوان یک جایگزین برای مدل توزیع لوگ-نرمال دو پارامتری پیشنهاد شده است. از آنجایی که از نظر پارامترها دو مدل کاملاً در شرایط برابر قرار دارند، تنها دقت برازش دو مدل به داده‌های مشاهده شده PSD آزمون گردید. این آزمون برای تعداد ۴۶۱ نمونه خاک پایگاه داده UNSODA و بر اساس دو معیار  $R^2$  و RMSE صورت گرفت. معیار  $R^2$  برتری مدل گاما را در ۳۶۲ نمونه خاک و معیار RMSE برتری مدل گاما را در ۳۲۳ نمونه خاک نشان داد. با آزمون t مشخص گردید که اختلاف بین مقادیر  $R^2$  و RMSE دو مدل به ترتیب در سطوح ۱٪ و ۵٪ معنی‌دار بود. بر این اساس می‌توان مدل توزیع گامای دو پارامتری را به عنوان یک جایگزین برتر برای مدل توزیع لوگ-نرمال دو پارامتری برگزید.



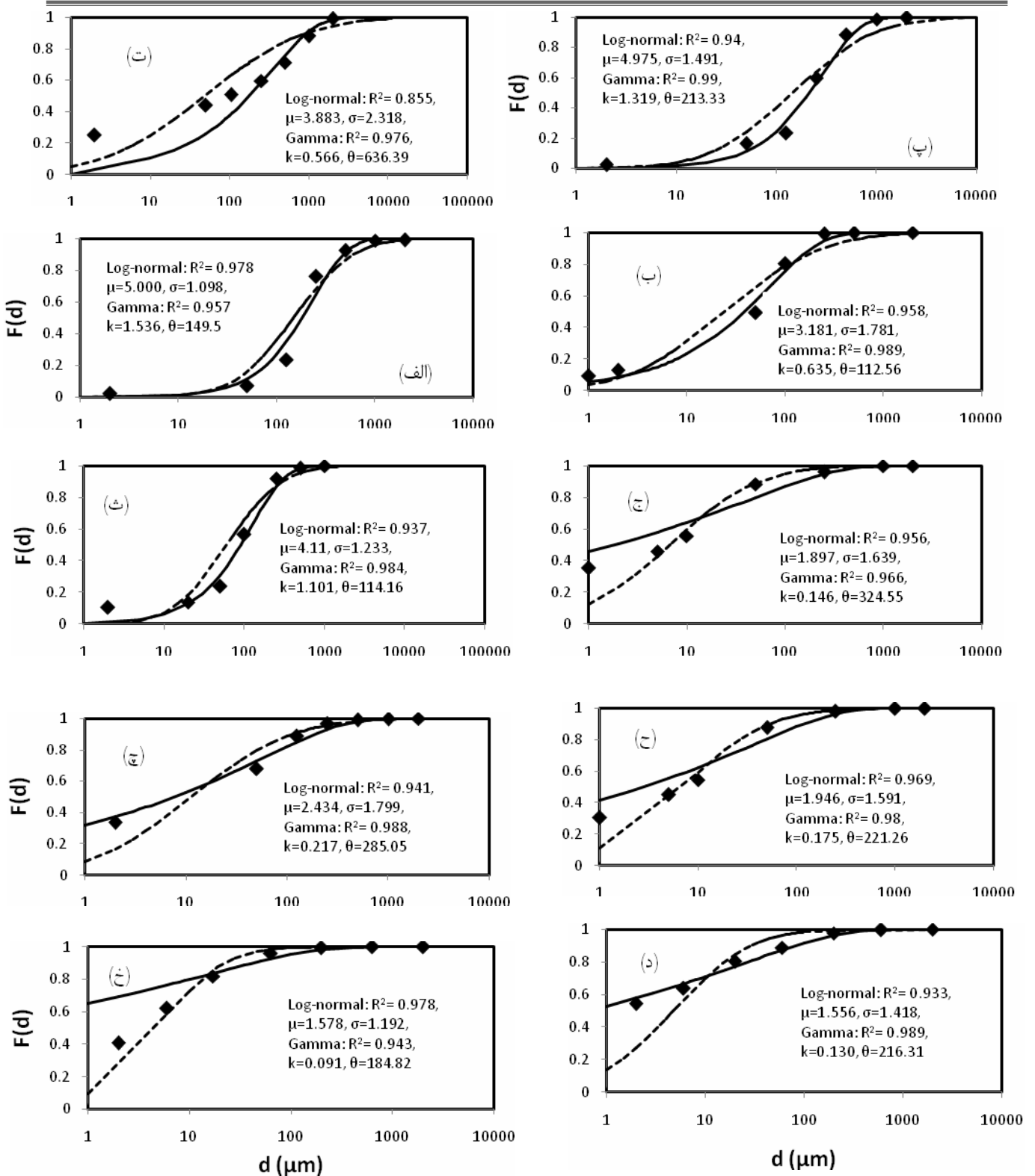
(شکل ۳) - مقادیر (الف)  $R^2$  و (ب) RMSE برای مدل‌های توزیع لوگ-نرمال و گاما برای ۴۶۱ نمونه خاک بررسی شده از بانک خاک UNSODA. خط پرنگ خط ۱:۱ و خط کمرنگ خط برازش داده شده می‌باشد.

این مقادیر می‌توانند به عنوان راهنمای خوبی برای پیدا کردن مقادیر اولیه مناسب برای برازش دو مدل مذکور با استفاده از روش‌های تکراری برای هر کلاس مدنظر قرار گیرند. زیرا همان‌طور

(جدول ۱) - خلاصه نتایج مقایسه عملکرد مدل‌های توزیع لوگ-نرمال و گاما در نمایش منحنی PSD مربوط به ۴۶۱ نمونه خاک بانک UNSODA

بافت خاک	تعداد نمونه‌ها	$N_1^*$	$N_2^{**}$	$R^2$ میانگین		انحراف معیار $R^2$		میانگین RMSE		انحراف معیار RMSE	
				لوگ-نرمال	گاما	لوگ-نرمال	گاما	لوگ-نرمال	گاما	لوگ-نرمال	گاما
شن	۱۳۴	۱۰۸	۱۰۹	۰/۹۷۷	۰/۹۵۸	۰/۰۳۸	۰/۰۳۲	۰/۰۳۴	۰/۰۲۶	۰/۰۳۴	۰/۰۲۶
شن لومی	۴۴	۴۳	۴۲	۰/۹۸۹	۰/۹۴۰	۰/۰۱۱	۰/۰۳۲	۰/۰۲۴	۰/۰۲۴	۰/۰۲۴	۰/۰۲۴
لوم شنی	۶۵	۵۹	۴۸	۰/۹۸۵	۰/۹۳۵	۰/۰۱۴	۰/۰۴۶	۰/۰۴۱	۰/۰۳۰	۰/۰۴۱	۰/۰۳۰
لوم	۳۹	۳۵	۳۱	۰/۹۸۶	۰/۹۵۱	۰/۰۱۲	۰/۰۳۴	۰/۰۴۴	۰/۰۲۶	۰/۰۴۴	۰/۰۲۶
لوم سیلتی	۸۹	۵۲	۳۷	۰/۹۶۳	۰/۹۶۴	۰/۰۲۷	۰/۰۲۸	۰/۰۴۳	۰/۰۲۷	۰/۰۴۳	۰/۰۲۷
لوم رسی شنی	۳۲	۳۲	۲۹	۰/۹۶۴	۰/۸۴۳	۰/۰۴۱	۰/۰۹۵	۰/۰۳۷	۰/۰۳۸	۰/۰۳۷	۰/۰۳۸
لوم رسی	۹	۶	۷	۰/۹۶۷	۰/۹۳۵	۰/۰۳۱	۰/۰۲۷	۰/۰۶۹	۰/۰۱۶	۰/۰۶۹	۰/۰۱۶
لوم رسی سیلتی	۱۸	۱۵	۷	۰/۹۷۱	۰/۹۶۲	۰/۰۲۰	۰/۰۲۵	۰/۰۲۷	۰/۰۲۵	۰/۰۲۷	۰/۰۲۵
رس سیلتی	۵	۳	۲	۰/۹۳۸	۰/۹۴۹	۰/۰۶۴	۰/۰۳۷	۰/۰۵۱	۰/۰۱۶	۰/۰۵۱	۰/۰۱۶
رس	۲۶	۹	۱۱	۰/۹۷۶	۰/۹۴۷	۰/۰۲۰	۰/۰۷۹	۰/۰۳۴	۰/۰۳۴	۰/۰۳۴	۰/۰۳۴
کل نمونه‌ها	۴۶۱	۳۶۲	۳۲۳	۰/۹۷۶	۰/۹۴۵	۰/۰۲۸	۰/۰۴۴	۰/۰۴۰	۰/۰۲۶	۰/۰۴۰	۰/۰۲۶

\*  $N_1$ : تعداد نمونه‌هایی که در آن‌ها بر اساس عامل  $R^2$ ، مدل توزیع گاما برازش بهتری نسبت به مدل توزیع لوگ-نرمال داشته است.  $N_2^{**}$ : تعداد نمونه‌هایی که در آن‌ها بر اساس عامل RMSE، مدل توزیع گاما برازش بهتری نسبت به مدل توزیع لوگ-نرمال داشته است.



(شکل ۴) - برازش مدل‌های توزیع لوگ-نرمال (خط منقطع) و گاما (خط ممتد) برای خاک‌های

(الف) شن (خاک ۱۰۴۱ از پایگاه UNSODA)، (ب) شن لومی (خاک ۱۱۱۱)، (پ) لوم شنی (خاک ۳۲۰۳)، (ت) لوم (خاک ۴۷۱۰)، (ث) لوم سیلتی (خاک ۴۵۶۰)، (ج) لوم رسی (خاک ۱۱۶۵)، (چ) لوم رسی (خاک ۱۲۱۳)، (ح) لوم رسی سیلتی (خاک ۳۱۱۰)، (خ) رس سیلت (خاک ۱۳۸۳)، (د) رس (خاک ۴۶۸۱). نقاط مقادیر مشاهده شده می-باشند.

## منابع

- 1- Arya L.M., and Paris J.F. 1981. A physicoempirical model to predict the soil moisture characteristic from particle-size distribution and bulk density data. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 45:1023-1030.
- 2- Arya L. M., Leij F. J., van Genuchten M. Th., and Shouse P. J. 1999a. Scaling parameter to predict the soil water characteristic from particle-size distribution data. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 63:510-519.
- 3- Arya L. M., Leij F. J., Shouse P. J., and van Genuchten M. Th. 1999b. Relationship between the hydraulic conductivity function and the particle-size distribution. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 63:1063-1070.
- 4- Bobee B., and Ashkar F. 1991. The Gamma family and derived distributions applied in hydrology. Water Resources Publications.
- 5- Buchan G.D. 1989. Applicability of the simple lognormal model to particle-size distribution in soils. *Soil Sci.* 147:155-161.
- 6- Campbell G.S. 1985. *Soil physics with BASIC: Transport models for soil-plant systems.* Elsevier, Amsterdam.
- 7- Fredlund M.D., Fredlund D.G., and Wilson G.W. 2000 An equation to represent grain-size distribution. *Can. Geotech. J.* 37:817-827.
- 8- Gupta S.C., and Larson W.E. 1979. A model for predicting packing density of soils using particle-size distribution. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 43:758-764.
- 9- Haverkamp R., and Parlange J.Y. 1986. Predicting the water retention curve from a particle-size distribution: 1. Sandy soils without organic matter. *Soil Sci.* 142(6):325-339.
- 10- Hwang S., Lee K.P., Lee D.S., and Power E.S. 2002 Models for Estimating Soil Particle-Size Distributions. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 66:1143-1150.
- 11- Hwang S.I., Powers S.E., 2003a. Lognormal distribution model for estimating soil water retention curves for sandy soils. *Soil Sci.* 168, 156-166.
- 12- Hwang S.I., Powers S.E., 2003b. Using Particle-Size Distribution Models to Estimate Soil Hydraulic Properties. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 67:1103-1112.
- 13- Hwang S.I., and Choi S.I. 2006. Use of a lognormal distribution model for estimating soil water retention curves from particle -size distribution data. *J. Hydrol.* 323:325-334.
- 14- Hwang S.I., and Hong S.P. 2006. Estimating relative hydraulic conductivity from lognormally distributed particle-size data. *Geoderma.* 133:421-430.
- 15- Leij F.J., Alves W.J., Van Genuchten M.Th., and Williams J.R. 1999. The UNSODA unsaturated soil hydraulic database. p. 1269–1281. In M.Th. van Genuchten et al. (ed.) *Characterization and measurement of the hydraulic properties of unsaturated porous media.* Univ. of California, Riverside, CA.
- 16- Russell D.A. 1976. Particle size distribution characterization for the coarse fraction of a granite soil. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 40:409-422.
- 17- Schuh W.M., and Bauder J.W. 1986. Effect of soil properties on hydraulic conductivity-moisture relationship. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 50:848-855.
- 18- Shirazi M.A., and Boersma L. 1984. A unifying quantitative analysis of soil texture. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 48:142–147.
- 19- Vereecken H., Maes J., Feyen J., and Darius P. 1989. Estimating the soil moisture retention characteristic from texture, bulk density, and carbon content. *Soil Sci.* 148:389-403.



## Comparing Log-normal and Gamma distribution models for representation of soil particle-size distribution

M. Sadeghi<sup>1\*</sup> - B. Ghahreman<sup>2</sup> - K. Davary<sup>3</sup>

### Abstract

In recent years, many researchers have attempted to estimate the soil hydraulic functions (e.g. soil moisture characteristics curve, and hydraulic conductivity function) using particle-size distribution (PSD) curve. In these studies, an accurate mathematical representation of PSD is required for fitting the observed data. So far, some mathematical models were developed with different limitations. The goodness of fit is directly related to the number of the model parameters. However, estimating the parameters for higher-parameter models which have no mathematical or physical significance is a problem. Among the current models, 2-parameter Log-normal distribution model with mathematical significant parameters has been considered as a basis for many studies. In this study, it is indicated that the 2-parameter Log-normal distribution model can not be very accurate for representation of the PSD for all of soil textural classes. As an alternative, 2-parameter Gamma distribution model is proposed for more accurate representation of the PSD that its two parameters also are mathematical significant and readily computable. These two models have been compared in fitting the observed PSD data of 461 soil samples from UNSODA soil database. Gamma distribution model indicated a pronounced improvement in representation of the PSD. Based on Coefficient of determination ( $R^2$ ), in 362 samples and based on RMSE, in 323 samples, Gamma distribution model showed a better representation of the PSD than Log-normal. To evaluate the significance of the difference between two models, a t-test was performed. The results showed that, at confidence level of 1%, the  $R^2$ -values of the Gamma model are significantly greater than those of Log-normal model. Also, at confidence level of 5%, a significant difference between the RMSE-values of two models was shown. Therefore, 2-parameter Gamma distribution model is judged to be better than 2-parameter Log-normal model for representation of PSD.

**Key words:** Particle-size distribution (PSD), Log-normal distribution, Gamma distribution, UNSODA

---

1,2,3- Contribution from College of Agriculture, Ferdowsi University of Mashhad  
(\* - Corresponding author Email: m.sadeghi.um@gmail.com)