مجله پژوهشي دانشگاه اصفهان (علوم پايه)
جلد بيست و يكم- شماره ۱- سال ۱۳۸٤
صص ٦٧ - ٧٦

پیشگویی فضایی بیزی برای یک میدان تصادفی گوسی با مشاهدات دارای نوفه

مجيد جعفري خالدي و محسن محمدزاده

گروه آمار دانشگاه تربيت مدرس

چکیده

پيشگويي فضايي مقدار نامعلوم يك ميدان تصادفي گوسي براساس مشاهدات فاقد نوفه، امكان‌پذير مي‌باشد. اما در عمل بدليل خطاهاي اندازه‌گيري، با مواردي مواجه مي‌شويم كه مشاهدات داراي نوفه هستند. با فرض آنكه اين نوفه‌ها متغيرهاي تصادفي مستقل و هم‌توزيع $N(\circ,\tau^2)$ و مستقل از ميدان تصادفي مورد نظر باشند و در صورت معلوم بودن پارامترهاي مدل، شامل پارامترهاي مربوط به ساختارهاي ميانگين و كوواريانس فضايي و τ^2، پيشگوي بهينه و ميانگين مجذور خطاي آن قابل تعيين هستند. اما اگر تعدادي از پارامترهاي مدل نامعلوم باشند، تعيين پيشگوي بهينه و ميانگين مجذور خطاي آن به روشهاي معمول امكان‌پذير نيست. هنگامي كه مشاهدات فاقد نوفه هستند، رهيافت بيزي مي‌تواند در اين خصوص راه‌گشا باشد، لذا در اين مقاله با اتخاذ رهيافت بيزي فرض مي‌شود پارامترهاي مدل متغيرهايي تصادفي با توزيع پيشين سره هستند،

كه در اينصورت سره‌بودن توزيع پسين تضمين مي‌شود، پيشگوي بهينه و ميانگين مجذور خطاي آن تعيين خواهد شد.

واژه‌هاي كليدي: ميدان تصادفي گوسي, پيشگويي فضايي بيزي، مشاهدات نوفه‌دار.

Bayesian Spatial Prediction for a Gaussian Random Field with Noisy Observations

M. Jafari Khaledi and M. Mohammadzadeh
Department of Statistics, Tarbiat Modarress University

Abstract

Spatial prediction of a Gaussian random field in unmeasured sites based on precise observations is easily carried out. But, in practice, because of measurement errors, data contain noise. We assume that noises are independent random variables with distribution $N(\circ, \tau^2)$ and they are also independent of the interest random field. If parameters of the mean, covariance function and τ^2 are known, the optimal predictor and its MSE could be determined by usual methods. But, these methods are not desirable when some of the model parameters are random variables. We use the Bayesian approach to determine the optimal predictor and its MSE.

Keywords: Gaussin random field, Bayesian spatial prediction, Noisy observation

مقدمه

در آمار فضايي براي مدل‌بندي داده‌هاي فضايي از ميدان تصادفي $\{S(t); t\in D\subseteq R^d\}$, $d\geq 1$، كه در آن D يك مجموعه انديس‌گذار است، استفاده مي‌شود. مساله پيشگويي مقدار نامعلوم ميدان تصادفي $S(\cdot)$ در موقعيت دلخواه t_0، براساس مشاهدات در موقعيتهاي $t_1,...,t_n$ را در نظر بگيريد. وقتي ميدان تصادفي $S(\cdot)$ گوسي با ساختار ميانگين و كوواريانس پارامتري است و مشاهدات فاقد نوفه هستند، پيشگويي فضايي انجام‌پذير مي‌باشد (Mohammadzadeh and Jafari, ۲۰۰۳a). اما در اغلب موارد مشاهدات داراي نوفه[1] هستند، بعنوان مثال، ميزان بارندگي ثبت شده در نقاط مختلف ايران، بدليل خطاي دستگاههاي اندازه‌گيري، ممكن است نوفه‌دار باشند و مقدار واقعي بارش را نشان ندهند. در اينگونه موارد، اغلب فرض مي‌شود اين نوفه‌ها متغيرهاي تصادفي مستقل و همتوزيع $N(\circ,\tau^2)$ و مستقل از ميدان تصادفي مورد نظر هستند. در آمار فضايي واريانس τ^2 اثر قطعه‌اي[2] ناميده مي‌شود. هنگامي كه پارامترهاي مدل، شامل پارامترهاي توابع ساختارهاي ميانگين و كوواريانس فضايي و اثر قطعه‌اي، معلوم هستند پيشگوي بهينه و ميانگين مجذور خطاي آن قابل تعيين خواهند بود. اگر اين پارامترها نامعلوم باشند، تعيين پيشگوي بهينه و ميانگين مجذور خطا به روشهاي معمول مقدور نيست. در اين مقاله با اتخاذ رهيافت بيزي و با فرض آنكه پارامترهاي مدل متغيرهاي تصادفي با توزيع پيشين سره[3] هستند، پيشگوي بهينه و ميانگين مجذور خطاي آن با انتگرال‌گيري بر فضاي پارامترها تعيين مي‌شوند. چون معمولاً محاسبه پيشگوي بهينه و ميانگين مجذور خطا دشوار است، بكمك روشهاي مونت كارلو, نحوه تعيين مقادير تقريبي آنها ارايه خواهد شد.

در سالهاي اخير بدنبال توسعه روشهاي مونت كارلو در آمار بيزي، استفاده از روشهاي بيزي براي تجزيه و تحليل داده‌هاي فضايي رشد و توسعه چشمگيري يافته است. (Deoliveira, ۲۰۰۰) براي ميدانهاي تصادفي گوسي كوتاه شده[4] پيشگويي فضايي بيزي را بررسي نمود. (Omre *et al*, ۲۰۰۲)

---

۱. Noise
۲. Nugget Effect
۳.Proper
۱. Clipped Gaussian

كريكينگ بيزي گسسته[١] را مطرح نمودند. براي مسايل چند متغيره فضايي رهيافت بيزي ارايه شده توسط (Royle and Berliner, ۲۰۰۲) مي‌تواند مفيد باشد. براي حالتي كه با مساله داده‌هاي گمشده مواجه‌ايم، روش بيزي ارايه شده توسط (Oh *et al*, ۲۰۰۲) رهگشا هستند.

(Aldworth, and Cressie, ۲۰۰۳) پيشگويي بيز تجربي توابع غيرخطي از ميدان تصادفي با مشاهدات نوفه‌دار را بررسي كردند. (Berger *et al*, ۲۰۰۱) نشان دادند كه براي يك ميدان تصادفي گوسي، هنگامي كه مشاهدات فاقد نوفه هستند، توزيع‌هاي پسين منتج از توزيع‌هاي پيشين ناسره[٢] معمول نظير پيشين جفري[٣]، ناسره است. چون پسين ناسره استنباط را دچار مشكل مي‌سازد، (Mohammadzadeh and Jafari, ۲۰۰۳a) با استفاده از توزيع‌هاي پيشين سره، كه سره بودن توزيعهاي پسين را تضمين مي‌كنند، يك پيشگوي فضايي بيزي براي ميداني گوسي براساس مشاهدات فاقد نوفه ارايه كردند. (Mohammadzadeh and Jafari, ۲۰۰۳b) نيز يك پيشگوي فضايي بيزي براي ميداني تصادفي كه تبديلي نامعلوم از آن گوسي باشد را با مشاهدات فاقد نوفه تعيين كردند. اكنون در اين مقاله پيشگويي فضايي بيزي براي ميدانهاي تصادفي گوسي با مشاهدات نوفه‌دار و براساس توزيع‌هاي پيشين سره ارايه مي‌گردد.

مدل آماري

فرض كنيد $\{S(t); t\in D\subseteq R^d\}$, $d\geq 1$ يك ميدان تصادفي گوسي حقيقي مقدار با تابع ميانگين $E(S(t))=f'(t)\beta$ و تابع كوواريانس $Cov(S(u),S(t))=\sigma^2\rho(u,t;\theta)$ باشد, كه در آن $f(t)=(f_1(t),\ldots,f_p(t))$ يك بردار ستوني $p\times 1$ از مولفه‌هاي غيرتصادفي معلوم, $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_p)\in R^p$ بردار پارامترهاي رگرسيوني, $\sigma^2=Var(S(t))$ واريانس و $\rho(u,t;\theta)=Corr(S(u),S(t))$ تابع همبستگي با بردار پارامترهاي $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_q)\in\Theta\subseteq R^q$ است.
فرض كنيد بجاي $S=(S(t_1),\ldots,S(t_n))$، مقادير نوفه‌دار $z=(z(t_1),\ldots,z(t_n))$ بگونه‌اي مشاهده شده باشند كه

$$Z(t_i)=S(t_i)+\varepsilon(t_i) \qquad ,i=1,\cdots,n$$

---

۲. Disjunctive Kriging
۳. Improper
٤. Jeffery Prior

و بردار نوفه $\varepsilon = (\varepsilon(t_1),\dots,\varepsilon(t_n))$ داراي توزيع $N(0,\tau^2 I)$ و مستقل از ميدان تصادفي $S(\circ)$ است.
با فرض آنکه $\tau^2 = \sigma^2 \xi$ با $0 \geq \xi$ باشد، خواهيم داشت:

$$Z \sim N_n(X\beta, \sigma^2(\Sigma_\theta + \xi I))$$

که در آن ماتريس $X_{n\times q}$ و ماتريس همبستگي فضايي نمونه Σ_θ بصورت:

$$X = \left(f'(t_1),\cdots,f'(t_n)\right) \text{ و } \Sigma_\theta = (\rho(t_i,t_j;\theta))$$

تعريف مي‌شوند. با فرض اينکه X ماتريسي پر رتبه، Σ_θ ماتريسي معين مثبت، $\phi = (\theta,\xi)$ و $V_\phi = \Sigma_\theta + \xi I$ باشد، لگاريتم تابع درستنمايي بعد از حذف ضرايب ثابت بصورت:

$$L(\eta;z) = -\frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2}\ln|V_\phi| - \frac{1}{2\sigma^2}(z-X\beta)'V_\phi^{-1}(z-X\beta)$$

خواهد بود, که در آن $\eta = (\beta,\sigma^2,\phi)$ بردار $p+q+2$ بعدي پارامترهاي مدل است. براساس فرض‌هاي در نظر گرفته شده، هر ترکيب خطي متناهي از مولفه‌هاي بردار تصادفي $(S(t_0),Z)$ نرمال است، لذا توزيع توام اين بردار نرمال $n+1$ متغيره است و ميتوان نشان داد توزيع $S(t_0)$ بشرط $Z=z$ و η بصورت:

$$S(t_0)\,|\,z,\eta \sim N(f'(t_0)\beta + r'_\theta V_\phi^{-1}(z-X\beta), \sigma^2(1-r'_\theta V_\phi^{-1} r_\theta)) \qquad ۱$$

خواهد بود, که در آن $r_\theta = (\rho(t_0,t_i,\theta))$ مي‌باشد. توزيع شرطي ۱, توزيع پيشگو[۱] براي $S(t_0)$ ناميده مي‌شود (Cressie,۱۹۹۳), که براساس آن و يك تابع زيان مشخص ميتوان پيشگوي بهينه را تعيين نمود. براي تابع زيان درجه دوم و با فرض معلوم بودن η, پيشگوي بهينه بصورت:

$$\hat{S}_\eta(t_0) = E(S(t_0)\,|\,z,\eta) = f'(t_0)\beta + r'_\theta V_\phi^{-1}(z-X\beta) \qquad ۲$$

خواهد بود و ميانگين مجذور خطاي آن بفرم زير تعيين مي‌گردد:

$$\sigma^2(t_0) = Var(S(t_0)\,|\,z,\eta) = \sigma^2(1-r'_\theta V_\phi^{-1} r_\theta) \qquad ۳$$

۱. Predictive Disrtibution

همانطور كه ملاحظه مي‌شود, پيشگوي بهينه (۲) به پارامتر $p+q+2$ بعدي η بستگي دارد. هنگامي كه η نامعلوم است, با جايگزيني برآورد حداكثر درستنمايي η در پيشگوي بهينه (۲), پيشگوي با جايگذاري[1] حاصل مي‌گردد. از آنجا كه مقدار واقعي η نامعلوم است, بهينگي اين پيشگو مورد ترديد است و اغلب تعيين $MSE(\hat{Z}_{\hat{\eta}}(t_0))=E(\hat{Z}_{\hat{\eta}}(t_0)-Z(t_0))^2$, دشوار يا نشدني است, بگونه‌اي كه بعضاً انجام استنباط آماري نظير تعيين فاصله پيشگويي را ناممكن مي‌سازد. در بخش بعد رهيافت بيزي براي رفع اين مسايل بكار گرفته خواهد شد.

پيشگويي فضايي بيزي

به منظور تعيين پيشگوي فضايي بيزي، پارامترهاي θ و ξ را مستقل و براي پارامترهاي مدل، يعني η توزيع‌هاي پيشين سره اختيار مي‌شود، بطوري‌كه $\int \pi(\eta)d\eta=1$ است. در اينصورت توزيع پيشين توام پارامترهاي مدل بصورت:

$$\pi(\eta)=\pi(\beta,\sigma^2,\phi)=\pi(\beta/\sigma^2,\phi)\pi(\sigma^2\mid\phi)\pi(\phi) \qquad ٤$$

با $\pi(\varphi)=\pi(\theta)\pi(\xi)$ ، خواهد شد. به منظور ساده‌تر شدن محاسبات پسين، براي پارامترهاي (β,σ^2) توزيع پيشين مزدوج[2] نرمال در وارون كاي دو بصورت:

$$\beta\mid\sigma^2,\phi \sim N(\beta_0,\sigma^2 A_0) \text{ و } \sigma^2\mid\phi\sim I\chi^2(a,b)$$

اختيار مي‌شود، كه در آنها مقادير A_0,β_0 ، a و b معلوم هستند و $I\chi^2$ توزيع وارون كاي دو را نمايش مي‌دهد. اكنون با فرض اختياري بودن توزيع پيشين $\pi(\phi)$, تعيين توزيع پسين پارامترهاي مدل از رابطه

$$\pi(\eta\mid z)\propto f(z\mid\eta)\pi(\beta\mid\sigma^2,\phi)\pi(\sigma^2\mid\phi)\pi(\phi) \qquad ۵$$

دشوار خواهد بود، زيرا محاسبه توزيع حاشيه‌اي داده‌ها

$$f(z)=\int f(z/\eta)\pi(\beta\mid\sigma^2,\phi)\pi(\sigma^2\mid\phi)\pi(\phi)d\eta$$

---

۱. Plug-in Predictor

۲. Conjugate

امکان‌پذير نيست. بنابراين براي تعيين توزيع پسين، ابتدا توزيع پسين حاشيه‌اي β با شرطي کردن پارامترهاي σ^2 و ϕ تعيين مي‌شود, که بصورت:

$$\beta \mid z, \sigma^2, \phi \sim N(\hat{\beta}_1, \sigma^2 \hat{A}) \qquad ٦$$

با:

$$\hat{\beta}_1 = (A_0{}^{1} + X'V_\varphi{}^{1}X)\ \ {}^{1}(A_0{}^{1}\beta_0 + X'V_\varphi{}^{1}z)$$

$$\hat{A} = (A_0^{-1} + X'V_\phi^{-1}X)^{-1}$$

خواهد شد. در مرحله دوم توزيع پسين حاشيه اي σ^2 با شرطي کردن پارامتر ϕ بصورت:

$$(\sigma^2 \mid z, \phi) \sim I\chi^2(a+n, d) \qquad ۷$$

بدست مي‌آيد, که در آن

$$d = \frac{ab + n\hat{\sigma}^2 + \hat{\beta}' A_{\hat{\beta}}^{-1} \hat{\beta} + \beta_0 A_0{}^{-1} \beta_0 - m' \hat{A} m}{a+n}$$

و $\hat{\sigma}^2, \hat{\beta}, A_{\hat{\beta}}$ و m بترتيب برابر:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(z - X\beta)' V_\phi^{-1}(z - X\beta)$$

$$\hat{\beta} = (X'V_\phi^{-1}X)^{-1} X'V_\phi^{-1} z$$

$$A_{\hat{\beta}} = (X'V_\phi^{-1}X)^{-1}$$

$$m = (A_{\hat{\beta}}^{-1}\hat{\beta} + A_0^{-1}\beta_0)$$

مي‌باشند. در مرحله بعد توزيع پسين حاشيه‌اي ϕ بصورت:

$$\pi(\phi \mid z) \propto \frac{f(z \mid \eta)\pi(\beta \mid \sigma^2, \phi)\pi(\sigma^2 \mid \phi)\pi(\theta)\pi(\xi)}{\pi(\beta \mid z, \sigma^2, \phi)\pi(\sigma^2 \mid z, \phi)} \qquad ۸$$

تعيين مي‌شود. اکنون براساس قضيه بيز و با جايگذاري توزيعهاي پسين حاشيه‌اي(٦), (۷) و (۸) در رابطه

$$\pi(\eta|z)=\pi(\beta,\sigma^2,\phi|z)=\pi(\beta|z,\sigma^2,\phi)\pi(\sigma^2|z,\phi)\pi(\phi|z) \quad ۹$$

توزيع پسين پارامترهاي مدل قابل تعيين مي‌باشد. از آنجا که عموماً تعيين $\pi(\phi|z)$ و به تبع آن توزيع پسين (۹) بسيار دشوار است، با استفاده از روشهاي مونت کارلوي زنجيرمارکف[۱](MCMC), ميتوان يك نمونه تصادفي از توزيعهاي ۸ و ۹ بدست آورد و استنباط بيزي پارامترهاي مدل را براساس اين نمونه انجام داد. نظربه اينکه تعيين توزيع پيشگوي بهينه $S(t_0)$ از انتگرال $p+q+2$ گانه

$$f(s(t_0)|z)=\int f(s(t_0)|z,\eta)\pi(\eta|z)d\eta \quad ۱۰$$

دشوار است, ميتوان همانند تعيين توزيع پسين پارامترها, آنرا مرحله به مرحله تعيين نمود. براي اين منظور, در مرحله اول با انتگرال‌گيري از $\pi(\beta|z,\sigma^2,\phi)f(z|\eta)$ نسبت به β خواهيم داشت:

$$S(t_0)|z,\sigma^2,\phi \sim N(\mu_1,\Sigma_1)$$

که در آن

$$\mu_1=(f'(t_0)-r'_\theta V_\phi^{-1}X)(A_0^{-1}+X'V_\phi^{-1}X)^{-1}A_0^{-1}\beta_0$$

$$+[r'_\theta V_\phi^{-1}+(f'(t_0)-r'_\theta V_\phi^{-1}X)(A_0^{-1}+X'V_\phi^{-1}X)^{-1}X'V_\phi^{-1}]z$$

$$\Sigma_1=\sigma^2(1-r'_\theta V_\phi^{-1}r'_\theta)$$

$$+[(f'(t_0)-r'_\theta V_\phi^{-1}X)(A_0^{-1}+X'V_\phi^{-1}X)^{-1}(f'(t_0)-r'_\theta V_\phi^{-1}X)']$$

سپس با انتگرال‌گيري از $\pi(\sigma^2|z,\phi)f(z(t_0)|z,\sigma^2,\phi)$ نسبت به σ^2 ميتوان نشان داد

$$Z(t_0)|z,\phi \sim t_{n+a}(\mu_1,d\Sigma_1)$$

همچنين بر اساس رابطه $f(z|\phi)=\int f(z|\beta,\sigma^2,\phi)\pi(\beta,\sigma^2|\phi)d\beta d\sigma^2$ خواهيم داشت

$$Z|\phi \sim t_a[X\beta_0,\frac{4}{b}(V_\phi+X'A_0X)]$$

اکنون مي‌توان توزيع پيشگوي بهينه (۱۰) را بصورت:

---

۱. Monte Carlo Markov Chain

$$f(z(t_0)\mid z) = \int \pi(\phi \mid z) f(z(t_0)\mid z,\phi)d\phi$$

نوشت, که يك انتگرال $q+1$ گانه و تعيين آن ساده‌تر از رابطه (۱۰) مي‌باشد. با اين وجود چون محاسبه تحليلي آن هنوز امکان‌پذير نمي‌باشد, روش مونت کارلو براي تقريب آن مورد استفاده قرار مي‌گيرد. براي اين منظور, از توزيعهاي پيشين $\pi(\theta)$ و $\pi(\xi)$ يك نمونه تصادفي i.i.d به حجم M بصورت $\{\theta_i,\xi_i\}_{i=1}^{M}$ توليد مي‌شود و براي مقادير به اندازه کافي بزرگ M، ميتوان از عبارت

$$f(z(t_0)\mid z) \approx \frac{\sum_{i=1}^{M} f(z(t_0)\mid z,\theta_i,\xi_i) f(z\mid \theta_i,\xi_i)}{\sum_{i=1}^{M} f(z\mid \theta_i,\xi_i)}$$

بعنوان تقريب توزيع پيشگوي بهينه استفاده نمود. هر اندازه مقدار M بزرگتر باشد تقريب دقيق‌تر خواهد شد (Chen *and et al,* ۲۰۰۲). اکنون براساس اين تقريب و تابع زيان درجه دوم، پيشگوي بهينه تقريبي براي $Z(t_0)$ و ميانگين مجذور خطاي تقريبي آن بترتيب بصورت:

$$\hat{Z}(t_0) = E(Z(t_0)\mid z) \approx \frac{\sum_{i=1}^{M} E(Z(t_0)\mid z,\theta_i,\xi_i) f(z\mid \theta_i,\xi_i)}{\sum_{i=1}^{M} f(z\mid \theta_i,\xi_i)}$$

$$\sigma^2(t_0) = Var(Z(t_0)\mid z)$$

$$\approx \frac{\sum_{i=1}^{M} \{Var(Z(t_0)\mid z,\theta_i,\xi_i) + [E(Z(t_0)\mid z,\theta_i,\xi_i) - E(Z(t_0)\mid z)]^2\} f(z\mid \theta_i,\xi_i)}{\sum_{i=1}^{M} f(z\mid \theta_i,\xi_i)}$$

بدست مي‌آيند، که با استفاده از آنها انجام استنباط آماري براي $Z(t_0)$ ميسر مي‌شود، بعنوان مثال يك فاصله پيشگويي ۹۵% تقريبي براي $Z(t_0)$ بصورت $\hat{Z}(t_0) \pm 1.96\sigma(t_0)$ مي‌باشد.

بحث و نتيجه‌گيري

يکي از موضوعات مهم در علوم کاربردي مختلف از جمله همه‌گير شناسي، معدن، جنگل‌داري، آب‌شناسي، مواد، هواشناسي، جغرافيا، ژئوشيمي، ژئو فيزيك، خاك شناسي، کشاورزي،

اكتشاف نفت و گاز، كنترل كيفيت هوا، معدن، زمين‌شناسي و... پيشگويي فضايي يك ميدان تصادفي در موقعيتي دلخواه براساس مشاهدات بدست آمده در بعضي از موقعيتهاست. معمولا بدلايل مختلف از جمله خطاي اندازه‌گيري، اينگونه مشاهدات داراي نوفه هستند. از آنجا كه پالايش اين نوفه‌ها و تعيين مشاهدات واقعي امكان‌پذير نيست، در اين مقاله براساس مشاهدات نوفه‌دار و با استفاده از رهيافت بيزي، براي يك مدل گاوسي پارامتري پيشگوي بهينه و ميانگين مجذور خطاي آن تعيين شد. اما بدليل پيچيدگي محاسبات آنها بكمك روش‌هاي مونت كارلو نحوه تعيين مقادير تقريبي آنها ارايه گرديد. بعلاوه اگر اطلاعاتي از قبل در مورد پارامترهاي مدل در اختيار باشد با لحاظ كردن اين اطلاعات در توزيع پيشين، مي‌توان آنها را در تعيين پيشگوي بهينه مورد استفاده قرار داد و دقت پيشگويي را بهبود بخشيد. تعيين اين نوع پيشگويي براساس مشاهدات نوفه‌دار براي ميدانهاي تصادفي كه تبديلي نامعلوم از آنها گوسي است، بعنوان يك مساله جديد قابل بررسي مي‌باشد.

منابع

١. Aldworth, J. & Cressie, N. (٢٠٠٣). Prediction of Nonlinear Spatial Functionals. Journal of Statistical Planning and Inference (Arrticle in Press).

٢. Berger, J. O., Oliveira, V. D., and Sanso, B. (٢٠٠١). Objective Bayesian Analysis of Spatially Correlated Data. JASA ٩٦: ١٣٦١-١٣٧.

٣. Chen, M., Shao, Q. Ibrahim, J. G. (٢٠٠٢). Monte Carlo Methods in Bayesian Computation. Springer Series in Statistics.

٤. Cressie, N., Statistics for Spatial Data, New York, John Wiley, (١٩٩٣).

٥. Mohammadzadeh, M. and Jafari, K. M. (٢٠٠٣a). Bayesian Spatial Prediction for Gaussian Random Field. Proceedings of the Fourth Seminar of Probability and Stochastic Process, Gorgan, Iran.

٦. Mohammadzadeh, M. and Jafari, K. M. (٢٠٠٣b). Bayesian Spatial Prediction for a Transformed Random Field. To appear in Journal of Science, Tehran University, Iran.

٧. Oh, M. S., Shin, W. D. Kim, J. H. (٢٠٠٢). Bayesian Analysis of Regression Models with Spatially Correlated Errors and Missing Observation. Computational Statistics and Data analysis ٣٩: ٣٨٧-٤٠٠.

٨. Omre, H. & Kolbjornsen, O. (٢٠٠٢). Bayesian Disjunctive Kriging Applied to Prediction of Reservoir Geostatistics ١٢ : ٦٠٩-٦٢٠.

٩. Royle, J. A. and Berliner, L. M. (٢٠٠٢). A Hierarchical Approach to Multivariate patial Modelling and Prediction. Technical Report. National Center for Atmospheric Research.