مجموعه‌های شبه ضربی بسته در مدول‌ها

ولی گرجی‌زاده و مریم داودیان*
گروه ریاضی- دانشگاه شهید چمران اهواز
*دانشگاه آزاد اسلامی- واحد ایذه
پست الکترونیکی : Gorjizadeh_v@cua.ac.ir

چکیده

در این مقاله زیرمجموعه‌های خاصی از مدول M را که شبه ضربی بسته نامیده‌ایم، تعریف کرده و بسیاری از قضایای ضربی بسته حلقه‌ها از جمله قضیهٔ معروف کهن را در مورد مدول‌ها اثبات کرده‌ایم. شبه ضربی بستهٔ اشباع شده را تعریف کرده و نشان داده‌ایم تعمیمی از ضربی بستهٔ اشباع شده حلقه‌ها است. چنانچه S زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ یک مدول باشد، نشان داده‌ایم کوچکترین زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ اشباع شده شامل S وجود دارد و عبارت است از $M - \bigcup_{\substack{P\in Spec(M) \\ P\cap S=\phi}} P$. مدول کسرها را تعریف کرده و ارتباطی بین زیرمجموعه‌های شبه ضربی بستهٔ مدول M و زیرمجموعه‌های شبه‌ضربی بستهٔ مدول کسرهای S در M پیدا کرده‌ایم. همچنین چنانچه N زیرمدولی از M باشد، نشان داده‌ایم تناظری یک به یک بین زیرمجموعه‌های شبه ضربی بستهٔ مدول $\frac{M}{N}$ که شامل صفر نیستند و زیرمجموعه‌های شبه ضربی بستهٔ مدول M که مجزای از Nاند وجود دارد.

واژه‌های کلیدی: *مجموعهٔ ضربی بسته، مجموعهٔ شبه ضربی بسته، زیرمدول اوّل.*

مقدمه

در این مقاله R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یکدار و کلیهٔ مدول‌ها یکانی فرض می‌شوند. زیرمدول سرهٔ P از M را اوّل می‌نامیم هرگاه از $ra \in P$ نتیجه شود $a \in P$ یا $rM \subseteq P$. مجموعهٔ همهٔ زیرمدول‌های اوّل M را طیف M نامیده و با $Spect(M)$ نمایش می‌دهیم. بر خلاف حلقه‌ها که همواره $Spect(R) \neq \emptyset$ در R- مدول‌ها چنین نیست. برای مثال در Z- مدول Z_{p^∞} داریم $Spect(Z_{p^\infty}) = \emptyset$. (رجوع شود به [۲] و [۳] و [۴] و [۵]). چنانچه N زیرمدولی از R- مدول M باشد مجموعهٔ $\{r \in R | \ rM \subseteq N\}$ با $(N : M)$ نمایش داده می‌شود و این مجموعه یک ایدآل حلقهٔ R است.

زیرمجموعه‌های ضربی بسته در حلقه‌ها تعریف شده‌اند (رجوع شود به [۷] و [۸]). در بخش اوّل این مقاله زیرمجموعه‌های خاصی از مدول M را که شبه ضربی بسته نامیده‌ایم تعریف کرده و قضایای متناظر با زیرمجموعه‌های ضربی بسته در حلقهٔ R از جمله قضیهٔ معروف کهن را اثبات نموده‌ایم (قضیه ۱-۲).

در بخش دوم این مقاله زیرمجموعه‌های شبه ضربی بستهٔ اشباع شدهٔ یک R- مدول را تعریف کرده و نشان داده‌ایم مفهوم شبه ضربی بستهٔ اشباع شده مدول‌ها تعمیمی از مفهوم شبه ضربی بستهٔ اشباع شدهٔ حلقه‌ها است، و همچنین نشان داده‌ایم که قضایای متناظر با ضربی بستهٔ اشباع شدهٔ حلقه‌ها در اینجا نیز بر قرار هستند (قضیهٔ ۲-۲).

فرض کنیم N یک زیرمدول داده شده‌ای از R- مدول M باشد. در بخش سوّم این مقاله به ارتباط بین زیرمجموعه‌های شبه ضربی بستهٔ مدول خارج قسمتی $\frac{M}{N}$ و مدول M پرداخته‌ایم (قضایای ۳-۱ و۳-۲). همچنین اگر S زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ R- مدول M باشد، مدول کسرهای S در M را که با $S^{-1}M$ نمایش می‌دهیم تعریف کرده و به ارتباط بین زیرمجموعه‌های شبه ضربی بسته مدول $S^{-1}M$ و مدول M پرداخته‌ایم (قضایای ۳-۳ و۳-۴).

۱- زیرمجموعه‌های شبه ضربی بسته یک مدول

تعریف ۱-۱ فرض کنیم M یک R- مدول باشد، زیرمجموعهٔ ناتهی S از M را شبه‌ضربی بسته می‌نامیم هرگاه برای هر $r \in R$،

۱) اگر $rM \cap S \neq \varnothing$ آن گاه $rS \subseteq S$ ؛

۲) اگر $rM \cap S = \varnothing$ و N زیرمدولی از M باشد به طوری که $N \cap S = \varnothing$ آنگاه $S \cap (rM + N) = \varnothing$.

تعریف ۱-۲ گیریم R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یکدار باشد و S زیرمجموعه‌ای از R باشد. S را ضربی بسته می‌نامیم هر گاه از $s_1 \in S$ و $s_2 \in S$ نتیجه شود که $s_1 s_2 \in S$.

تذکر ۱-۱ اگر S زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ R- مدول R باشد، آنگاه S زیرمجموعهٔ ضربی بستهٔ حلقهٔ R است.

تذکر ۱-۲ به آسانی دیده می‌شود که اگر M یک R- مدول و S زیرمجموعهٔ ضربی بسته حلقهٔ R و N زیرمدولی از M باشد آنگاه $SN = \{sn | \ s \in S \ , n \in N\}$ زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ مدول M است.

قضیهٔ ۱-۱ گیریم M یک R- مدول و P زیرمدول اوّل M باشد. در این صورت $S = M - P$ زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ M است.

اثبات: گیریم r عضوی از R باشد. اگر $rM \cap S \neq \varnothing$ ، آنگاه

$$rM \not\subset P \qquad (۱)$$

فرض کنیم $s \in S$ و $rs \notin S$. پس $rs \in P$ و $s \notin P$ و از اوّل بودن P نتیجه می‌شود که $rM \subseteq P$ و این نتیجه در تناقض با رابطه (۱) است؛ در نتیجه $rS \subseteq S$. و اگر $rM \cap S = \varnothing$ و N زیرمدولی از M باشد به طوری که $N \cap S = \varnothing$، آنگاه

$(N+rM)\cap S=\emptyset$ زیرا در این صورت $rM\subseteq P$ و $N\subseteq P$ و در نتیجه $rM+N\subseteq P$. ■

مثال زیر نشان می‌دهد که هر زیرمجموعهٔ شبه ضربی بسته R- مدول M لزوماً به صورت $M-P$ که P زیرمدول اوّل M باشد، نیست.

مثال ۱-۱ Z- مدول Z را در نظر می‌گیریم. در این صورت $S=Z-\{$ ۰،۱،-۱ $\}$ زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ Z است. بدیهی است که S به صورت $Z-P$ که P زیرمدول Z_Z باشد نیست و S زیرمدول M هم نیست.

حال نتیجهٔ زیر که تعمیم قضیهٔ کهن در مورد مدول‌ها است به دست می‌آید.

قضیهٔ ۱-۲ فرض کنیم S زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ R– مدول M باشد. گیریم N زیرمدولی از M باشد و $S\cap N=\emptyset$. در این صورت زیرمدول اوّل P وجود دارد به طوری که $N\subseteq P$ و $S\cap P=\emptyset$.

اثبات: قرارمی دهیم $F=\{N' \mid$ زیر مدول M باشد N' و $N\subseteq N',\ S\cap N'=\emptyset\}$.
بدیهی است که $N\in F$ و از این رو $F\neq\emptyset$. با رابطهٔ شمول، F مجموعه‌ای جزئاً مرتب است. گیریم Ω یک زنجیر در F باشد، به راحتی دیده می‌شود که $\bigcup_{N'\in\Omega}N'\in F$ و $\bigcup_{N'\in\Omega}N'$ کران بالایی برای Ω است. بنا بر لم زرن F دارای عضو ماکسیمال است. این عضو ماکسیمال را P می‌نامیم و ادعا می‌کنیم P زیرمدول اوّل M است. گیریم $ra\in P$ و $a\notin P$، پس $P\subset\langle a\rangle+P$. از ماکسیمال بودن P در مجموعهٔ F نتیجه می‌شود که $(\langle a\rangle+P)\cap S\neq\emptyset$. از این رو $r'\in R$ و $t\in P$ وجود دارند به طوری که $r'a+t=s\in S$ و در نتیجه

$$rs=r(r'a+t)=r'(ra)+rt\in P \qquad (۱)$$

اگر $rM \cap S \neq \emptyset$ آنگاه بنابر (۱)، $rs \in S \cap P$ و این با فرض $P \in F$ در تناقض است. بنابراین $rM \cap S = \emptyset$ و چون $P \in F$ لذا $(P + rM) \cap S = \emptyset$ و در نتیجه $P + rM \in F$. از طرفی $P \subseteq P + rM$ و P عضو ماکسیمال F است. پس $rM + P = P$ و لذا $rM \subseteq P$. در نتیجه P زیرمدول اوّل M است. ■

در قضیهٔ فوق اگر $N = (0)$ و $0 \notin S$ آنگاه زیرمدول اوّل وجود دارد. تمام قسمت اوّل [۲] درمورد زیرمدول‌های بدون اوّل ($Spect(M) = \emptyset$) است. در اینجا ما نتیجه واضح زیر را داریم.

نتیجهٔ ۱-۱ R - مدول M بدون اوّل است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ شبه ضربی بسته M شامل صفر باشد.

اگر در تعریف ۱-۱ شرط ۲ را حذف کنیم قضیهٔ ۱-۱ ثابت می‌شود ولی قضیهٔ ۱-۲ دیگر صادق نیست. مثال زیر را ببینید.

مثال ۱-۲ Z- مدول $Z \oplus Z$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت روشن است که $S = \{(-۱،-۲)، (۲،۱)،(-۱،-۳)،(۳،۱)\}$ زیرمجموعه‌ای از $Z \oplus Z$ است که فقط شرط ۱ تعریف زیرمجموعه شبه ضربی بسته را دارد. فرض کنیم $N = ۲Z \oplus ۳Z$. بدیهی است که $N \cap S = \emptyset$ و N اوّل نیست. به راحتی دیده می‌شود که تنها زیرمدول‌های اوّل شامل N عبارتند از $P_1 = ۲Z \oplus Z$ و $P_2 = Z \oplus ۳Z$. از طرفی $(۲،۱) \in S \cap P_1$ و $(۱،۳) \in S \cap P_2$. بنابراین قضیهٔ ۱-۲ در این حالت صادق نیست.

این بخش را با اشاره به بعضی از حقایق مربوط به زیرمجموعه‌های شبه ضربی بستهٔ مدول‌ها خاتمه می‌دهیم.

در واقع اگر M یک R- مدول و N زیرگروه آن باشد، در این صورت N زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ M است اگر و تنها اگر N زیرمدول M باشد.

مثال زیر نشان می‌دهد که اجتماع دو زیرمجموعهٔ شبه ضربی بسته در حالت کلی یک زیر مجموعهٔ شبه ضربی بسته نیست.

مثال ۱–۳ Z – مدول Z را در نظر می‌گیریم. گیریم S_1 مجموعهٔ اعداد صحیح فرد و $S_2 = ۳Z$. در این صورت S_1 و S_2 زیرمجموعه‌های شبه ضربی بستهٔ $_Z Z$ هستند ولی $S' = S_1 \cup S_2$ شبه ضربی بسته نیست؛ زیرا $۲.۳=۶ \in S'$ ولی $۲ \notin S'$ و $۳ \notin S'$.

مثال زیر نشان می‌دهد اشتراک دو زیرمجموعهٔ شبه ضربی بسته در حالت کلی یک زیر مجموعهٔ شبه ضربی بسته نیست.

مثال ۱–۴ Z - مدول Z را در نظر می‌گیریم. اگر $S_1 = Z - ۲Z$ و $S_2 = Z - ۳Z$ آن گاه S_1 و S_2 زیرمجموعه ها ی شبه ضربی بستهٔ Z هستند ولی $S' = S_1 \cap S_2$ شبه ضربی بسته نیست. زیرا $۲Z \cap (S_1 \cap S_2) = ø$ و $۳Z \cap (S_1 \cap S_2) = ø$ ولی $۲Z \oplus ۳Z \cap (S_1 \cap S_2) \neq \emptyset$.■

قضیهٔ ۱–۳ فرض کنیم M یک R - مدول باشد . گیریم A زیرمدول M و S زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ M باشد به طوری که $S \cap A = \emptyset$. در این صورت $S + A = \{s + a \mid s \in S, a \in A\}$ زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ M است .

اثبات: گیریم $rM \cap (S + A) \neq \emptyset$. به آسانی دیده می‌شود که $rM \cap S \neq \emptyset$. پس $rS \subseteq S$ و در نتیجه $r(S + A) \subseteq S + A$. اگر $rM \cap (S + A) = \emptyset$ و همچنین N یک زیرمدول M باشد که $N \cap (S + A) = \emptyset$، به آسانی دیده می‌شود که $rM \cap S = \emptyset$ و $(N + A) \cap S = \emptyset$ و بنا بر شبه ضربی بسته بودن S داریم $(A + N + rM) \cap S = \emptyset$. در نتیجه $(N + rM) \cap (S + A) = \emptyset$. بنابراین $S + A$ نیز زیرمجموعهٔ شبه ضربی بسته M است . ■

قضیهٔ زیر با الهام از قسمت دوم لم ۴ از [۱] می باشد.

قضیهٔ ۱-۴ گیریم M یک R – مدول و S زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ M و A زیرمدولی از M باشد که $S \cap A = \emptyset$. فرض کنیم P زیرمدول اوّل M باشد. در این صورت $P \cap (S+A) = \emptyset$ و $A \subseteq P$ اگر و تنها اگر P در زیرمدول اوّل Q با خواص $Q \cap S = \emptyset$ و $A \subseteq Q$ قرار گیرد.

اثبات: ($\Longrightarrow$:) گیریم P زیرمدول اوّل M باشد و $P \subseteq Q$، به گونه‌ای که Q زیرمدول اوّل M است و $Q \cap S = \emptyset$ و $A \subseteq Q$. در این صورت Q مجزای از $S+A$ است و بدیهی است که $P \cap (S+A) \subseteq Q \cap (S+A) = \emptyset$. پس $P \cap (S+A) = \emptyset$.

($\Longleftarrow$:) اگر P مجزای از $S+A$ باشد آنگاه $(P+A) \cap S = \emptyset$. بنابر قضیهٔ ۱-۲، زیرمدول اوّل Q وجود دارد به طوری که $Q \cap S = \emptyset$ و $P + A \subseteq Q$. لذا $P \subseteq Q$ و Q زیرمدول اوّل M است و $Q \cap S = \emptyset$ و $A \subseteq Q$. ■

۲ – زیرمجموعه‌های شبه ضربی بستهٔ اشباع شدهٔ در مدول‌ها

تعریف ۲-۱ گیریم S زیرمجموعهٔ شبه ضربی بسته R- مدول M باشد. S را شبه ضربی بستهٔ اشباع شده می‌نامیم هر گاه به ازای هر $r \in R$ و $a \in M$ از $ra \in S$ نتیجه شود $a \in S$.

به راحتی دیده می‌شود که اگر M یک R- مدول و P زیرمدول اوّل M باشد، آنگاه $M - P$ زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ اشباع شده M است. همچنین به سادگی دیده می‌شود که اگر S زیرمجموعهٔ شبه ضربی بسته اشباع شدهٔ R- مدول R باشد آنگاه S زیرمجموعهٔ ضربی بستهٔ اشباع شدهٔ حلقهٔ R است.

یادآوری می‌شود که اشتراک زیرمجموعه‌های ضربی بستهٔ یک حلقه خود ضربی بسته است. مثال ۱-۴ نشان می‌دهد که در مورد زیرمجموعه‌های شبه ضربی بستهٔ مدول‌ها این مطلب درست نیست. امّا داریم:

قضیهٔ ۲-۱ گیریم S زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ R مدول M باشد. در این صورت اشتراک همهٔ زیرمجموعه‌های شبه ضربی بستهٔ اشباع شده شامل S زیرمجموعه‌ای شبه ضربی بستهٔ شباع شده و شامل S است.

اثبات: فرض کنیم $\{S_i\}_{i\in I}$ خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های شبه ضربی بستهٔ اشباع شدهٔ شامل S باشد. چون M یک زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ اشباع شده و شامل S است، این خانواده ناتهی است. بدیهی است که $S \subseteq \bigcap_{i\in I} S_i$.

گیریم

$$rM \cap \left(\bigcap_{i\in I} S_i\right) \neq \emptyset$$

آنگاه

$$r\left(\bigcap_{i\in I} S_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} S_i.$$

حال فرض کنیم $rM \cap \left(\bigcap_{i\in I} S_i\right) = \emptyset$ و N یک زیرمدول M باشد به طوری که

$$N \cap \left(\bigcap_{i\in I} S_i\right) = \emptyset$$

پس

$$N \cap S = \emptyset \text{ و } rM \cap S = \emptyset$$

از این رو

$$S \cap (rM + N) = \emptyset$$

بنا بر قضیهٔ ۱-۲ زیرمدول اوّل P وجود دارد به طوری که

$$rM + N \subseteq p \text{ و } P \cap S = \emptyset$$

پس

$$S \subseteq M - P$$

چون $M - P$ زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ اشباع شده است، لذا $j \in I$ وجود دارد به طوری که

$$M - P = S_j$$

و از این رو

$$(rM + N) \cap S_j = \varnothing$$

و در نتیجه

$$.(rM + N) \cap \left(\bigcap_{i \in I} S_i \right) = \varnothing$$

بنابراین $\bigcap_{i \in I} S_i$ زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ M و شامل S است. بدیهی است که $\bigcap_{i \in \in I} S_i$ اشباع شده است.

تعریف ۲-۲ فرض کنیم S یک زیر مجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ M باشد. در این صورت کوچکترین زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ اشباع شده شامل S وجود دارد و آن را با $\overline{S}$ نمایش می‌دهیم.

یادآوری می‌شود که اگر S زیرمجموعهٔ ضربی بستهٔ حلقهٔ R باشد آنگاه $\overline{S}$ کوچکترین زیرمجموعهٔ ضربی بستهٔ شامل S وجود دارد. می‌توان نشان داد که $\overline{S} = R - \bigcup_{\substack{P \in Sprct(R) \\ P \cap S = \phi}} P$ (رجوع شود به [۷] و [۸]). در مدول‌ها نیز داریم:

قضیهٔ ۲-۲ فرض کنید M یک R- مدول و S یک زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ M باشد و $0 \notin S$ در این صورت $.\overline{S} = M - \bigcup_{\substack{P \in Spec(M) \\ P \cap S = \phi}} P$

اثبات: $0 \notin S$ بنابراین از قضیهٔ ۱-۲ نتیجه می‌شود که $Spect(M) \neq \varnothing$ گیریم r عضوی از R باشد. فرض کنیم

$$.rM \cap \left(M - \bigcup_{\substack{P \in Spec(M) \\ P \cap S = \phi}} P \right) \neq \varnothing$$

در این صورت به راحتی دیده می‌شود که

$$r\left(M-\bigcup_{\substack{P\in Spec(M)\\ P\cap S=\phi}}P\right)\subseteq M-\bigcup_{\substack{P\in Spec(M)\\ p\cap S=\phi}}P.$$

حال فرض کنیم $rM\cap\left(M-\bigcup_{\substack{P\in Spec(M)\\ P\cap S=\phi}}P\right)=\emptyset$ و N یک زیرمدول M باشد به طوری که

$$N\cap\left(M-\bigcup_{\substack{P\in Spec(M)\\ P\cap S=\phi}}P\right)=\emptyset$$

$$(rM+N)\cap S=\emptyset$$

و بنابر قضیهٔ ۱-۲ زیرمدول اوّل P_0 وجود دارد به طوری که

$$rM+N\subseteq P_0 \quad \text{و} \quad P_0\cap S=\emptyset$$

پس

$$rM+N\subseteq\bigcup_{\substack{P\in Spec(M)\\ P\cap S=\phi}}P$$

و در نتیجه

$$(rM+N)\cap\left(M-\bigcup_{\substack{P\in Spec(M)\\ P\cap S=\phi}}P\right)=\emptyset$$

بنابراین $M-\bigcup_{\substack{P\in Spec(M)\\ P\cap S=\phi}}P$ زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ M است.

به آسانی دیده می شود که $M-\bigcup_{\substack{P\in Spec(M)\\ P\cap S=\phi}}P$ اشباع شده است و $S\subseteq M-\bigcup_{\substack{P\in Spec(M)\\ P\cap S=\phi}}P$. پس

$$\overline{S} \subseteq M - \bigcup_{\substack{P\in Spec(M)\\ P\cap S=\phi}} P.$$

حال فرض کنیم T یک مجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ اشباع شدهٔ شامل S باشد. گیریم

$$x \in M - \bigcup_{\substack{P\in Spec(M)\\ P\cap S=\phi}} P$$

فرض کنیم $x \notin T$. چون T اشباع شده است

$$\langle x\rangle \cap T = \varnothing$$

پس

$$\langle x\rangle \cap S = \varnothing$$

و بنابر قضیهٔ ۱-۲ زیرمدول اوّل P_0 وجود دارد به طوری که

$$\langle x\rangle \subseteq P_0 \text{ و } P_0 \cap S = \varnothing$$

از این رو

$$x \in \bigcup_{\substack{P\in Spec(M)\\ P\cap S=\phi}} P$$

و این با انتخاب x در تناقض است. لذا $M - \bigcup_{\substack{P\in Spec(M)\\ P\cap S=\phi}} P \subseteq T$ و اثبات قضیه تمام است. ■

۳ – مدول کسرهای S در M

گیریم M یک R- مدول و S زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ M باشد به گونه‌ای که $0 \notin S$. در این صورت $\{ r \in R |\ \exists\ m \in M$ به طوری که $rm \in S \}$ یک زیرمجموعهٔ ضربی بستهٔ حلقهٔ R است و آن را با $S \div M$ نشان می‌دهیم. در ضمن $1_R \in S \div M$ و $0 \notin S \div M$. مجموعهٔ $P = \{ r \in R |\ rM \cap S = \varnothing \}$ یک ایدآل اوّل حلقه R است و $P \cap (S \div M) = \varnothing$. به علاوه چنانچه P' زیرمدول اوّلی از M باشد به گونه‌ای که $P' \cap S = \varnothing$ آنگاه $(P' : M) \subseteq P$.

به راحتی می‌توان دید که چنانچه S زیرمجموعۀ ضربی بستۀ حلقه R باشد آنگاه $\overline{S} = S \div R = \{r \in R \mid \exists\ r' \in R\ ,\ rr' \in S\}$.

قضیۀ ۳-۱ گیریم M یک R- مدول باشد. فرض کنیم N زیرمدولی از M و S زیرمجموعۀ شبه ضربی بسته باشد به طوری که $S \cap N = \emptyset$. در این صورت $\frac{S}{N} = \{s + N \mid s \in S\}$ زیرمجموعۀ شبه ضربی بستۀR- مدول $\frac{M}{N}$ است و به علاوه $0_{\frac{M}{N}} \notin \frac{S}{N}$.

اثبات: فرض کنیم $r\left(\frac{M}{N}\right) \cap \frac{S}{N} \neq \emptyset$. با استفاده از قضیۀ ۱-۳ به راحتی دیده می‌شود که $r\frac{S}{N} \subseteq \frac{S}{N}$. حال فرض کنیم $r\left(\frac{M}{N}\right) \cap \frac{S}{N} = \emptyset$ و همچنین $\frac{N'}{N}$ زیرمدولی از $\frac{M}{N}$ باشد به طوری که $\frac{N'}{N} \cap \frac{S}{N} = \emptyset$. در این صورت $rM \cap S = \emptyset$ و $N' \cap S = \emptyset$ و در نتیجه $(rM + N') \cap S = \emptyset$. از این رو $\left(r\frac{M}{N} + \frac{N'}{N}\right) \cap \frac{S}{N} = \emptyset$. پس $\frac{S}{N}$ زیرمجموعۀ شبه ضربی بستۀ R - مدول $\frac{M}{N}$ است. بدیهی است که $0_{\frac{M}{N}} \notin \frac{S}{N}$. ■

قضیۀ ۳-۲ فرض کنیم M یک R - مدول و N یک زیرمدول آن باشد. گیریم S' یک زیرمجموعه شبه ضربی بستۀ R- مدول $\frac{M}{N}$ باشد. قرار می‌دهیم $S = \{s \in M \mid s + N \in S'\}$. در این صورت S زیرمجموعۀ شبه ضربی بستۀ R- مدول M است و به علاوه اگر $0 \notin S'$ آنگاه $S \cap N = \emptyset$.

اثبات: گیریم r عضوی از R باشد. اگر $rM \cap S \neq \emptyset$، آنگاه $r\frac{M}{N} \cap S' \neq \emptyset$ و در نتیجه $rS' \subseteq S'$. پس $rS \subseteq S$. اگر $rM \cap S = \emptyset$ آنگاه $r\frac{M}{N} \cap S' = \emptyset$. همچنین

فرض کنیم N' زیرمدولی از M باشد به طوری که $N' \cap S = \emptyset$. به آسانی دیده می‌شود که $\frac{N'+N}{N} \cap S' = \emptyset$. بنابراین $S' \cap \left(r\frac{M}{N} + \frac{N'+N}{N} \right) = \emptyset$ و در نتیجه $(rM + N') \cap S = \emptyset$. از این رو S زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ R- مدول M است.

چون $0 \in S'$ لذا $S \cap N = \emptyset$. ■

از مشاهدات بالا نتیجه می‌شود که چنانچه N زیرمدول داده شده‌ای از R-مدول M باشد آنگاه یک تناظر یک به یک بین زیرمجموعه‌های شبه ضربی بستهٔ M که مجزای از N هستند و زیرمجموعه‌های شبه ضربی بستهٔ R - مدول $\frac{M}{N}$ که شامل صفر نیستند وجود دارد. نتیجهٔ بالا در مورد حلقه‌ها به صورت زیر است.

نتیجهٔ ۳-۱ فرض کنیم I یک ایدآل حلقه R باشد. در این صورت یک تناظر یک به یک بین زیرمجموعه‌های ضربی بستهٔ حلقهٔ R که مجزای از I هستند و زیرمجموعه‌های ضربی بستهٔ حلقه $\frac{R}{I}$ که شامل صفر نیستند وجود دارد.

یادآوری می‌شود که اگر $_R M$ و S زیرمجموعهٔ ضربی بسته حلقهٔ R باشد به طوری که $0 \notin R$، R- مدول $S^{-1}M$ تعریف شده و خواص آن مورد بررسی قرار گرفته است (رجوع شود به [۷] و [۸]). در اینجا اگر S یک زیرمجموعه شبه ضربی بستهٔ R- مدول M باشد تعریف می‌کنیم:

تعریف ۳-۱ فرض کنیم M یک R- مدول و S زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ آن باشد به طوری که $0 \notin S$. لذا $S \div M$ زیرمجموعهٔ ضربی بستهٔ حلقه R است. تعریف می‌کنیم $S^{-1}M = (S \div M)^{-1}M$. بنابراین $S^{-1}M$ یک $(S \div M)^{-1}R$ - مدول و نیز یک R- مدول است.

قضیهٔ ۳-۳ فرض کنیم M یک R- مدول و S زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ M باشد به گونه‌ای که $0\notin S$. در این صورت $\left(S\div M\right)^{-1}S=\left\{\frac{s'}{s_0}\mid s'\in S\ ,\ s_0\in S\div M\right\}$ یک زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ R- مدول $S^{-1}M$ است و به علاوه اگر S اشباع شده باشد $\left(S\div M\right)^{-1}S$ نیز اشباع شده است.

اثبات: فرض کنیم r عضوی از حلقهٔ R باشد. اگر $r\left(S\div M\right)^{-1}M\cap\left(S\div M\right)^{-1}S\neq\varnothing$، به آسانی دیده می‌شود که $rM\cap S\neq\varnothing$ و از این رو $rS\subseteq S$ و در نتیجه $r\left(S\div M\right)^{-1}M\subseteq\left(S\div M\right)^{-1}S$. اگر $r\left(S\div M\right)^{-1}M\cap\left(S\div M\right)^{-1}S=\varnothing$ و N' زیرمدولی از $\left(S\div M\right)^{-1}M$ باشد به طوری که $N'\cap\left(S\div M\right)^{-1}S=\varnothing$، در این صورت $N'=\left(S\div M\right)^{-1}N$ به طوری که N زیرمدولی از M است. به آسانی دیده می‌شود که $N\cap S=\varnothing$ و $rM\cap S=\varnothing$ پس $\left(rM+N\right)\cap S=\varnothing$ و در نتیجه $\left(S\div M\right)^{-1}\left(rM+N\right)\cap\left(S\div M\right)^{-1}S=\varnothing$. بنابراین و $\left(S\div M\right)^{-1}S$ زیرمجموعه شبه ضربی بسته $\left(S\div M\right)^{-1}M$ است. حال فرض کنیم به ازای $\frac{s'}{s_0}\in(S\div M)^{-1}M$ و $r\in R$ داشته باشیم $r\frac{s'}{s_0}=\frac{rs'}{s_0}\in\left(S\div M\right)^{-1}S$، در نتیجه $rs'\in S$ و چون S زیرمجموعهٔ شبه ضربی بسته اشباع شده R- مدول M است $s'\in S$. در نتیجه $\frac{s'}{s_0}\in(S\div M)^{-1}S$ و $\left(S\div M\right)^{-1}R$ اشباع شده است. ■

در واقع به راحتی می‌توان دید که اگر M یک R- مدول و S یک زیرمجموعهٔ شبه ضربی بسته آن باشد به طوری که $0\notin S$، آنگاه $\left(S\div M\right)^{-1}S=\left\{\frac{s'}{s_0}\mid s'\in S\ ,\ s_0\in S\div M\right\}$ یک زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ $\left(S\div M\right)^{-1}R$ - مدول $\left(S\div M\right)^{-1}M$ است و همچنین اگر S اشباع شده باشد $\left(S\div M\right)^{-1}S$ نیز اشباع شده است.

قضیهٔ ۳-۴ فرض کنیم M یک R مدول و S' زیرمجموعهٔ ضربی بستهٔ حلقهٔ R باشد. گیریم S'' زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ R مدول $S'^{-1}M$ باشد. اگر قرار دهیم $S=\left\{m\in M\middle|\ \exists\ s\in S\div M\ ,\ \frac{m}{s}\in S''\right\}$ آنگاه S زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ R-مدول M است و به علاوه اگر S'' اشباع شده باشد S نیز اشباع شده است.

اثبات: گیریم r عضوی از R باشد. اگر $rM\cap S\neq\emptyset$ به آسانی دیده می‌شود که $rS'^{-1}M\cap S''=\emptyset$ و نیز $S'^{-1}N\cap S''=\emptyset$ و از این رو $S''\cap\left(r.S'^{-1}M+S'^{-1}N\right)=\emptyset$. بنابراین $(rM+N)\cap S=\emptyset$ و S زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ M است. اثبات قسمت آخر قضیه ساده است. ■

گیریم M یک R- مدول و S' زیرمجموعهٔ ضربی بستهٔ حلقهٔ R باشد. فرض کنیم S'' زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ $S'^{-1}R$ - مدول $S'^{-1}M$ باشد. اگر $S=\left\{m\in M\ \ s.t\ \exists\ s\in S',\ \frac{m}{s}\in S''\right\}$. به آسانی دیده می‌شود که S زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ R- مدول M است. به علاوه اگر S'' اشباع شده باشد آنگاه S نیز اشباع شده است.

قضیهٔ ۳-۵ فرض کنید M یک R- مدول و N زیرمدول M و S زیرمجموعهٔ شبه ضربی بستهٔ M باشد به طوری که $S\cap N\neq\emptyset$. در این صورت $S'=S\cap N$ زیرمجموعه شبه ضربی بسته N است.

اثبات: گیریم r عضوی از R باشد. اگر $rN\cap S'\neq\emptyset$ آن گاه $rM\cap S\neq\emptyset$. از طرفی چون S ضربی بسته است پس $rS\subseteq S$. در نتیجه $r(S\cap N)\subseteq(S\cap N)$ یا $rS'\subseteq S'$.

اگر $rN\cap S'=\emptyset$ و N' زیرمدولی از N باشد به طوری که $N'\cap S'=\emptyset$، به راحتی دیده می‌شود که $rN\cap S=\emptyset$ و نیز به وضوح N' زیرمدولی از M است. اگر $rM\cap S\neq\emptyset$ آنگاه $r(S\cap N)\subseteq S\cap N$ و از این رو

$\emptyset \neq r(S \cap N) \cap (S \cap N) \subseteq rN \cap S$. و این نتیجه با فرض $rN \cap S = \emptyset$ در تناقض است. بنابراین $rM \cap S = \emptyset$. لذا $(rM + N') \cap S = \emptyset$. در نتیجه $(rN + N') \cap S' = \emptyset$. ■

مراجع

[1] Bergman, G., “Arrays of prime ideals in commutative rings” J. Algebra. 261 (2003) 389- 410.

[2] McCasland, R.L., Moore, M.E. and Smith, P.F., “Spectrum module over commutative ring” Comm. Algebra, 25 (1997) 97-103.

[3] McCasland, R.L. and Moore, M.E., “Prime submodules” Comm. Algebra, 20 (1992) 1803-1817.

[4] McCasland, R.L. and Smith, P.F., “Prime submodules of Noetherian modules” Roky Mtn. J. 22 (1996) 457-471.

[5] McCasland, R.L. and Smith, P.F., “Modules with Bounded Spectra” Comm. Algebra, 26, 10 (1998) 3403–3417.

[6] McCasland, R.L. and Smith, P.F., “Prime Submodules of Noetherian modules” Rocky Mtn. J. 23, 3 (1993) 1041–1062.

[7] Kaplansky, I., Commutative Rings; University of Chicago Press: Chicago; (1974).

[۸] رودنی شارپ، گام‌هایی در جبر تعویض‌پذیر، ترجمهٔ محمد مهدی ابراهیمی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۶.