فضاهای قویاً بلمبرگ

محمدرضا احمدی زند و مهرداد نامداری
گروه ریاضی- دانشگاه شهید چمران اهواز
پست الکترونیکی: namdari@ipm.ir

چکیده

فضای توپولوژی بلمبرگ[1] در سال ۱۹۲۲ تعریف شد و بعد از آن نیز پژوهش‌های پراکنده‌ای در این زمینه صورت گرفت. در اینجا فضاهای قویاً بلمبرگ معرفی و خواص آنها بررسی خواهد شد. همچنین زیرفضاهایی از فضاهای قویاً بلمبرگ که دارای اهمّیت هستند مانند فضاهای بئر را در این نوشتار بررسی خواهیم کرد و بعضی از این زیرفضاها را که خاصیت بلمبرگ بودن را حفظ می‌کنند مشخص می‌نماییم. تعمیمی از قضیهٔ وایت در این زمینه را نیز بیان خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: *فضاهای بئر، فضاهای بلمبرگ، فضاهای قویاً بلمبرگ.*

1- Blumberg Space

مقدمه

در این نوشتار $\mathbb{R}$ هیئت اعداد حقیقی، $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی، $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح و $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا می‌باشند. نماد τX را به عنوان توپولوژی روی X به کار می‌بریم.

حال به بیان برخی از تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در این بحث می‌پردازیم.

نقطه x از فضای توپولوژی X را تنها می‌نامیم هرگاه $\{X\} \in \tau X$. مجموعه تمام نقاط تنها در X را با $I(X)$ نمایش می‌دهیم. اگر $cl_X(I(X)) = \overline{I(X)} = X$ آنگاه X را فضای تقریباً گسسته می‌نامیم. فضای توپولوژی X را در خودش چگال[1] گوییم، هرگاه دارای هیچ نقطه تنها نباشد، یعنی $I(X) = \varnothing$.

در اینجا $C(X)$ معرف حلقه توابع پیوسته با مقدار حقیقی روی فضای توپولوژی X است. اگر $f \in C(X)$، آنگاه $Z(f) = f^{-1}(0) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ را یک صفر مجموعه در X می‌نامیم. فضای X را P– فضا گوییم هرگاه هر صفر در X باز باشد. برای چند شرط معادل با P– فضا بودن [۲] را ببینید.

زیر مجموعهٔ A را در فضای توپولوژی X هیچ جا چگال می‌نامیم هرگاه درون بستار آن تهی باشد، یعنی، $\operatorname{int}_X cl_X A = \varnothing$.

اگر یک زیر مجموعه فضای توپولوژی X به صورت اجتماع شمارش‌پذیر از مجموعه‌های هیچ جا چگال در X باشد، آنگاه آن را از رسته اوّل و در غیر این صورت آن را از رسته دوم می‌نامیم.

فضای توپولوژی X را یک فضای بئر[2] می‌نامیم، هرگاه هر اشتراک شمارش‌پذیر از زیرمجموعه‌های باز و چگال در آن، چگال باشد، یا به طور معادل هر زیرمجموعه باز ناتهی از آن از رسته دوم باشد، یعنی هر زیرمجموعه باز ناتهی از آن به صورت اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های هیچ جا چگال نباشد.

1- Dense in itself
2- Baire space

۱- فضاهای بلمبرگ

در سال ۱۹۲۲ بلمبرگ[۱] در [۳] نشان داد که اگر X مجموعه اعداد حقیقی باشد، آنگاه به ازای هر تابع با مقدار حقیقی f روی X، زیرمجموعه چگال D در X موجود است به طوری که $f|_D \in C(D)$.

تعریف ۱- ۱ فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی باشند. از خاصیّت زیر در آینده تحت عنوان $(*)$ یاد خواهد شد:

$(*)$ اگر f تابع دلخواه تعریف شده از X به Y باشد، آنگاه زیر مجموعه چگال D از X موجود است، به طوری که $f|_D \in C(D)$، یعنی تحدید f به D پیوسته است.

اگر X یک فضای توپولوژی و Y مجموعه اعداد حقیقی و $(*)$ برقرار باشد، آنگاه X یک فضای بلمبرگ نامیده می‌شود و D را یک مجموعه بلمبرگ برای تابع f می‌گوییم.

نکتهٔ ۱- ۱ دانش پژوهان و محققین ایرانی با این قضیه زیبا و جالب در [۴] آشنا می‌شوند و چنانچه در [۴] آمده است، قضیه بلمبرگ نه به صورت قضیه و نه به صورت مسئله، ظاهراً راهی به اکثر کتاب‌های توپولوژی پیدا نکرده است. اکنون که ۲۱ سال از معرفی آن در ایران گذشته است نیز این مهّم باقی مانده است ولی عمیق بودن این نتیجه بر کسی که مقدمات توپولوژی را بداند پوشیده نیست. مثل همیشه $\mathbb{R}$ دراین قضیه به عنوان مدل در نظر گرفته شده و سپس فضاهای توپولوژی دیگر با این خاصیت مورد بررسی قرار گرفتند.

جالب توجّه است که تا قبل از سال ۱۹۶۰ تقریباً کار جدیدی در این زمینه صورت نگرفته است. در سال ۱۹۶۰ برادفورد و گافمن[۲] در [۵] قضیه زیر را کردند.

قضیهٔ ۱- ۱ فرض کنیم X یک فضای متری باشد. در این صورت X یک فضای بلمبرگ است اگر و تنها اگر X یک فضای بئر باشد.

قضیهٔ بالا این سئوال طبیعی را به ذهن می‌آورد که آیا هر فضای توپولوژی بئر، یک فضای بلمبرگ است یا خیر؟

1- H. Blumberg
2- J. C. Bradford and C. Goffman

پس از مدتی مثال‌های نقض در این زمینه ساخته شد که بعداً به یکی از آنها اشاره خواهیم کرد.

تعریف ۱- ۲ خانواده شمارش‌پذیر متشکل از زیرمجموعه‌های $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ که به ازای هر عدد طبیعی n، ω_n مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های X است، یک خانواده $\sigma-$ مجزا نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر عدد طبیعی n و هر $x \in X$ یک همسایگی از X موجود باشد که حداکثر یکی از اعضای ω_n را قطع کند.

تعریف ۱-۳ فرض کنیم (X, T) یک فضای توپولوژی باشد. خانواده ρ از زیر مجموعه‌ای X را یک شبه پایه می‌نامیم هرگاه:

۱) $\rho \subseteq T$.

۲) $\varnothing \notin \rho$.

۳) به ازای هر مجموعه باز و ناتهی U از فضای توپولوژی X عضو V از ρ چنان وجود داشته باشد که $V \subseteq U$.

قضیهٔ ۱- ۲ اگر فضای توپولوژی بئر X دارای یک شبه پایه $\sigma-$ مجزا باشد آنگاه X بلمبرگ است.

قضیهٔ اخیر را وایت[1] در مقاله [۱] ارائه کرد. دو سال بعد، خانم الس[2] در [۶] قضیه‌ای بهتر از وایت را به صورت زیر ارائه نمود.

قضیهٔ ۱- ۳ اگر فضای توپولوژی بئر X دارای یک شبه پایه $\sigma-$ مجزا و Y یک فضای هاسدورف شمارای نوع دوم باشد، آنگاه (*) برقرار خواهد بود.

علاوه بر قضیه فوق، الس نشان داد که در قضیهٔ ۱- ۳ شرط شمارای نوع دوم بودن برای فضای توپولوژی Y اساسی و لازم است.

1- H.E. White, Jr.
2- O.T. Alas

در سال ۱۹۸۵ پیتروسکی و زیمانسکی [1] در [۷] با ایده‌ای متفاوت از الس و وایت به موضوع فوق پرداختند:

قضیهٔ ۱– ۴ اگر فضای بئر X دارای یک شبه پایه σ– مجزا و Y یک فضای هاسدورف شمارای نوع دوم باشد، آنگاه (*) برقرار خواهد بود.
آنها همچنین نشان دادند که قضیه زیر برقرار است:

قضیهٔ ۱– ۵ رده تمام فضاهای توپولوژی بلمبرگ، بر رده تمام فضاهای توپولوژی X، که به ازای هر فضای شمارای نوع دوم Y، در شرط (*) صدق می‌کنند، منطبق خواهد شد.

گزارهٔ ۱– ۱ فضای بلمبرگی وجود دارد که دارای یک زیر فضای غیربلمبرگ است. همچنین حاصلضرب دو فضای بلمبرگ لزوماً بلمبرگ نیست. یعنی رده فضاهای بلمبرگ تحت عمل زیر فضا بودن و حاصلضرب دکارتی متناهی بسته نیست.
اثبات: به مرجع [۱] یا [۷] مراجعه شود.
در قضیهٔ زیر نشان می‌دهیم که شرط بئر بودن برای یک فضای بلمبرگ لازم است. این در حالی است که در مقاله برادفورد و گافمن این مطلب به صراحت ذکر نشده است. در ادامه، برهان آنها را که فقط برای فضاهای متری گفته شده با اندکی تغییر برای هر فضای توپولوژی دلخواه ارائه می‌کنیم. البته لازم به ذکر است که در همهٔ مقالات آن را به مقالهٔ [۵] نسبت می‌دهند.

قضیهٔ ۱– ۶ اگر X یک فضای توپولوژی بلمبرگ باشد، آنگاه X یک فضای بئر است.
اثبات: اگر فضای X بئر نباشد، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، مجموعه بسته با درون تهی A_n در X وجود دارد به طوری که $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ دارای درون ناتهی است. حال قرار

1- Z. Piotrowski and A. Szymanski

می‌دهیم $B_1 = A_1$ و برای هر n، $B_n = A_n \setminus B_{n-1}$ و تابع f از X به $\mathbb{R}$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(t) = \begin{cases} n & , \quad t \in B_n \\ 0 & , \quad t \in X \setminus A \end{cases}$$

از آنجا که X یک فضای توپولوژی بلمبرگ است زیرمجموعه چگال D از X وجود دارد، به طوری که $f|_D \in C(D)$. اگر $x \in A$، آنگاه عدد صحیح مثبت n وجود دارد به طوری که $x \in A_n$. امّا $D \bigcap (X \setminus A_n)$ در X چگال است و لذا اگر U در X یک مجموعه باز شامل x باشد، آنگاه $y \in D \bigcap (X \setminus A_n) \bigcap U$ وجود دارد که $|f(y) - f(x)| \geq 1$ و این با پیوستگی $f|_D$ در تناقض است. □

نکتهٔ ۱– ۲ عکس قضیهٔ ۱– ۶ برقرار نیست. در مثال زیر یک فضای توپولوژی کاملاً منظم بئر آورده شده است که بلمبرگ نیست. نخست با یک تعریف آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱– ۴ یک مجموعه به طور خطی مرتب X را η_1– مجموعه می‌نامیم هرگاه برای هر دو زیرمجموعه شمارا از آن مانند A,B که به ازای هر $a \in A, b \in B$ داشته باشیم $a < b$، عنصری مانند $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $a \in A$ و هر $b \in B$ رابطه $a < x < b$ برقرار باشد.

قضیهٔ ۱– ۷ یک η_1– مجموعه با عدد اصلی $2^{\aleph_0}$ وجود دارد.

اثبات: فصل ۱۳ از [۲] را ببینید. □

مثال ۱– ۱ فرض کنیم که X یک مجموعه η_1– مجموعه با توپولوژی ترتیبی باشد. ابتدا نشان می‌دهیم که X یک فضای بئر است. فرض می‌کنیم $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ گردآیه‌ای از زیر مجموعه‌های باز و چگال در X و (a,b) یک مجموعه باز پایه‌ای برای X باشد. ادعا می‌کنیم $(a,b) \bigcap (\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i)$ ناتهی است. از آنجا که G_1 در X چگال است، (a_1,b_1) در X

وجود دارد به طوری که $(a_1,b_1)\subseteq(a,b)\bigcap G_1$. به طور استقرایی به ازای هر n می‌توان بازه (a_n,b_n) را طوری تعریف کرد که $(a_n,b_n)\subseteq(a_{n-1},b_{n-1})\bigcap G_n$. پس به ازای هر i,j نامساوی $a_i<b_j$ برقرار است. از آنجا که X یک η_1- مجموعه است, عنصری مانند x در همه (a_i,b_j)ها موجود است، لذا $x\in(a,b)\bigcap(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}G_i)$. پس X یک فضای بئر است. X یک $P-$ فضای بدون نقطه تنها است، به مرجع [۲]، پرسش P. ۱۳ مراجعه نمایید.) پس هر زیرفضای چگال آن نیز یک $P-$ فضای بدون نقطه تنها است. بنابراین با پذیرفتن فرض پیوستار اگر $f:X\to\mathbb{R}$ تابعی یک به یک و D زیر مجموعه چگال X باشد، آنگاه f نمی‌تواند در هیچ نقطه‌ای از D پیوسته باشد.

در ادامهٔ بررسی فضاهای بلمبرگ انواع مختلف پیوستگی جایگزین مفهوم پیوستگی در قضیهٔ بلمبرگ شده است و به جنبه‌های دیگری از آن نیز پرداخته شده است.

۲- فضاهای قویاً بلمبرگ

تعریف ۲- ۱ فضای توپولوژی X را قویاً بلمبرگ می‌نامیم هرگاه به ازای هر تابع دلخواه با مقدار حقیقی از فضای توپولوژی X، زیرمجموعه باز و چگال D از X موجود باشد، به طوری که $f|_D$ (یعنی تابعی از D به میدان اعداد حقیقی) پیوسته باشد.

به کمک تعریف فوق زیر فضاهای جالب فضای توپولوژی X، از نقطه نظر قویاً بلمبرگ بودن، مورد بررسی قرار خواهند گرفت. در این مقاله به پرسش‌های زیر پاسخ خواهیم گفت.

(۱) آیا هر زیر فضای بسته یک فضای قویاً بلمبرگ؛ قویاً بلمبرگ است؟ (۲) آیا هر زیر فضای باز یک فضای قویاً بلمبرگ؛ قویاً بلمبرگ است؟ (۳) اگر فضای توپولوژی Y حاصل ضرب دلخواهی از فضاهای قویاً بلمبرگ باشد؛ آیا فضای Y قویاً بلمبرگ است؟ (۴) آیا یک زیر فضای چگال از فضای قویاً بلمبرگ، لزوماً قویاً بلمبرگ است؟

قضیهٔ ۲– ۱ فرض کنیم X یک فضای قویاً بلمبرگ باشد. اگر U یک مجموعه باز ناتهی در فضای توپولو ژی X باشد، آنگاه U نیز یک فضای قویاً بلبرگ می‌باشد.

اثبات: فرض کنیم f یک تابع با مقدار حقیقی روی U باشد، پس یک تابع با مقدار حقیقی g روی X وجود دارد به طوری که $g|_U = f$. بنا به فرض یک زیرمجموعه باز و چگال D در X یافت می‌شود به طوری که $g|_D \in C(D)$.

امّا $cl_U(D \cap U) = (cl_X(D \cap U)) \cap U = cl_X(U) \cap U = U$ نتیجه می‌دهد که $D \cap U$ در U باز و چگال است و $f|_{D\cap U} = g|_{D\cap U} \in C(D \cap U)$. بنابراین U یک فضای قویاً بلمبرگ است. □

لم ۲– ۱ اگر D یک زیرمجموعه چگال فضای قویاً بلمبرگ X باشد، آنگاه D یک فضای قویاً بلمبرگ است.

اثبات: فرض کنیم f یک تابع با مقدار حقیقی روی D باشد. تابع با مقدار حقیقی g روی X را می‌توان چنان یافت که $g|_D = f$. از آنجا که X یک فضای قویاً بلمبرگ است، زیرمجموعه باز و چگال G در X وجود دارد به طوری که $g|_G \in C(G)$. لذا $f|_{D\cap G} = g|_{D\cap G} \in C(D \cap G)$، واضح است که $G \cap D$ در D باز و چگال می‌باشد.□

تعریف ۲– ۲ اگر برای یک عدد اصلی α، فضای X را بتوان به صورت اجتماع حداکثر α زیر مجموعه دو به دو مجزای چگال نوشت، آنگاه X را یک فضای α– حل‌پذیر می‌نامیم و اگر فضای توپولوژی ۲– حل‌پذیر باشد، آنگاه آن را حل‌پذیر می‌گوییم.

لم ۲– ۲ هر فضای قویاً بلمبرگ که در خودش چگال باشد حل‌ناپذیر است.

اثبات: اگر فضای X حل‌پذیر باشد، آنگاه زیرمجموعه چگال D در X وجود دارد به طوری که $X \setminus D$ نیز در X چگال است.

بنابراین هر زیرمجموعه باز ناتهی U در X شامل نقطه‌ای از D و همچنین نقطه‌ای از $X \setminus D$ است، و لذا تابع مشخصهٔ D روی U پیوسته نیست. زیرا اگر قرار دهیم $f = \chi_D$

آنگاه $(f|_u)^{-1}(\{1\})=U\bigcap D$. پس $U\bigcap D$ در U بسته است و چون D چگال است پس بایستی $U\bigcap D=U$ که متناقض با این است که $U\bigcap(X\setminus D)\neq\varnothing$. این با قویاً بلمبرگ بودن X در تناقض است، پس فضای X حل‌ناپذیر است. □

هویت [1] در[۸] نماد $\Delta(X)$ را به صورت زیر معرفی کرده است:

$$\Delta(X)=\min\{|U|:\varnothing\neq U\in\tau X\}$$

و فضای X به طور ماکزیمال حل‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه $\Delta(X)$–حل‌پذیر باشد. قضیه زیر، که در [۹] آمده است، شناسه‌ای برای فضاهای توپولوژی هاسدورف قویاً بلمبرگ که موضعاً فشرده یا متریک پذیر هستند، بیان می‌کند.

قضیهٔ ۲– ۲ فضای هاسدورف X که در خودش چگال است، داده شده است. اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(آ) X موضعاً فشرده باشد؛

(ب) X فضای متری پذیر است؛

آن گاه X به طور ماکزیمال حل‌پذیر است. □

قضیهٔ ۲– ۳ فضای هاسدورف X که در خودش چگال است، داده شده است. اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(آ) X موضعاً فشرده باشد؛

(ب) X فضای متری پذیر است؛

آن گاه X دارای یک نقطه تنها است

اثبات: اگر X دارای نقطه تنها نباشد، آنگاه در خودش چگال می‌باشد، و لذا بنا به لم ۲– ۲ فضا X حل‌ناپذیر است. امّا بنا به قضیهٔ ۲– ۲ X به طور ماکزیمال حل‌پذیر و در نتیجه

1- E. Hewitt

یک فضای حل‌پذیر است و این یک تناقض است. پس X حداقل دارای یک نقطه تنها است.□

مثال ۲– ۱ از آنجا که فشرده‌سازی استون چک[1] مجموعه اعداد طبیعی، که با $X = \beta\mathbb{N}$ نشان داده می‌شود یک فضای تقریباً گسسته است، پس فضای X یک فضای تقریباً گسسته است. امّا زیرفضای $Y = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ در X بسته است و بنا به [۱۰] فاقد نقطه تنها است. پس

قضیهٔ **۲– ۳** ایجاب می‌کند که زیر مجموعه بسته Y در فضای قویاً بلمبرگ X، یک فضای قویاً بلمبرگ نیست.

قضیهٔ ۲– ۴ گیریم فضای هاسدورف X که در خودش چگال است یک فضای قویاً بلمبرگ باشد. اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(آ) X موضعاً فشرده باشد؛

(ب) X فضای متری پذیر است؛

آنگاه X یک فضای تقریباً گسسته است.

اثبات: بنا به قضیهٔ ۲– ۱ و فرض قضیه هر زیرفضای باز و ناتهی از X یک فضای قویاً بلمبرگ و در نتیجه بنا به قضیهٔ ۲– ۳ دارای یک نقطه تنها است. پس X یک فضای تقریباً گسسته می‌باشد.□

مثال ۲– ۳ فرض کنیم X حاصل ضرب متناهی از فضاهای هاسدورف قویاً باشد که هر یک موضعاً فشرده، یا متری پذیر باشند. بنا به قضیهٔ ۲– ۴ هر یک از این فضاها تقریباً گسسته هستند و از آنجا که حاصل ضرب تعداد متناهی از فضاهای تقریباً گسسته، یک فضای تقریباً گسسته است؛ نتیجه می‌گیریم که X یک فضای تقریباً گسسته؛ و در نتیجه قویاً بلمبرگ است.

1- $Ston - \breve{C}ech$ Compactification

فرض می‌کنیم $D=\{0,1\}$ فضای توپولوژی گسسته باشد. اگر X فضای حاصل ضرب تعداد شمارش‌پذیر و نامتناهی از فضای D باشد؛ یعنی، $X=\prod_{i=1}^{\infty} D = D^{\aleph_0}$ آن گاه X فضای هاسدورف فشرده و فاقد نقطه تنها است. پس قضیهٔ ۲– ۳ نتیجه می‌دهد که X فضای قویاً بلمبرگ نیست. لذا ضرب شمارش‌پذیر از فضاهای قویاً بلمبرگ، لزوماً فضای قویاً بلمبرگ نیست.

یک توسیع قضیهٔ قویاً بلمبرگ

تعریف ۲– ۳ فضای توپولوژی X را یک فضای $B^{+}(SC)$ می‌نامیم هرگاه به ازای هر فضای شمارای نوع دوم Y خاصیت زیر برقرار باشد.

به ازای هر تابع $f: X \to Y$ ، زیرمجموعه چگال و باز D از X وجود داشته باشد که تابع $f|_D: D \to Y$ پیوسته باشد.

در آغاز نشان خواهیم داد که فضاهای قویاً بلمبرگ، فضاهای $B^{+}(SC)$ هستند. لازم به ذکر است که در این جا SC بیانگر فضای شمارای نوع دوم می‌باشد.

قضیهٔ ۲– ۵ فضای X یک فضای قویاً بلمبرگ است اگر و تنها اگر برای هر پوشش باز شمارا مانند $\mathcal{P}$ از X, زیرمجموعهٔ چگال D از X وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $P \in \mathcal{P}$ زیرمجموعه $P \cap D$ در X باز باشد.

اثبات: فرض کنید X یک فضای قویاً بلمبرگ باشد و $\mathcal{P}$ یک پوشش شمارا و دلخواه X باشد. برای هر $P \in \mathcal{P}$ فرض می‌کنیم $\chi_P : X \to \{0,1\}$ تابع مشخصه P باشد. در این صورت تابع $\theta : X \to \prod_{P \in \mathcal{P}} \{0,1\}$ که با ضابطه $\theta(x) = \{\chi_P(x)\}_{P \in \mathcal{P}} \in \prod_{P \in \mathcal{P}} \{0,1\} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ تعریف می‌شود، تابع قطر توابع مشخصه است. امّا $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ بنا به یک قضیه در توپولوژی عمومی با مجموعه کانتور در اعداد حقیقی همسان ریخت است. پس با یکی انگاشتن زیر فضاهای همسان ریخت و بنا به فرض، زیر مجموعه چگال و باز D از X وجود دارد به

طوری که $\theta|_D \in C(D)$. به ازای هر $P \in \mathcal{P}$ داریم: $\chi_P|_D = (\pi_P\theta)|_D$. پس به ازای هر $P \in \mathcal{P}$، $\chi_P|_D \in C(D)$ و این ایجاب می‌کند $P \bigcap D \in \tau X$.

برعکس، فرض می‌کنیم $f \in \mathbb{R}^X$، و بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم مقادیر f در بازهٔ $I = [0,1]$ باشد. بنا به [۱۱] I تصویر پیوسته و پوشای مجموعه کانتور تحت تابع h است. پوشا بودن h وجود تابع $g: X \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ را نتیجه می‌دهد، به طوری که $f = hog$. فرض می‌کنیم $\mathcal{P}$ پوشش شمارا متشکل از مجموعه‌های $g^{-1}(\pi_n^{-1}(j))$ باشد، که در آن $\pi_n: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}$ تابع تصویر nام و $j \in \{0,1\}$. لذا یک زیر مجموعه چگال D در X وجود دارد به طوری که به ازای هر $P \in \mathcal{P}$، $P \bigcap D \in \tau X$. بنابراین به ازای هر $n \in \mathbb{N}$؛ $\pi_n og|_D \in C(D)$ و در نتیجه $g|_D \in C(D)$ و لذا $f|_D = (hog)|_D = h(g|_D)$ یک تابع پیوسته است و $D = X \bigcap D = (\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P) \bigcap D = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} (P \bigcap D) \in \tau X$ یعنی D در X باز بوده و در نتیجه X قویاً بلمبرگ است. □

نتیجهٔ ۲- ۱ X یک فضای قویاً بلمبرگ است اگر و تنها اگر یک فضای $B^+(SC)$ باشد.

اثبات: گیریم X یک فضای قویاً بلمبرگ باشد. فرض کنید Y یک فضای شمارای نوع دوم با پایهٔ شمارش‌پذیر $\mathcal{B}$ و $f: X \to Y$ یک تابع باشد. در این صورت

$$\mathcal{P} = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$$

یک پوشش شمارش‌پذیر X می‌باشد. پس بنا به قضیهٔ ۲- ۵ یک زیرمجموعه چگال D وجود دارد به طوری که به ازای هر $f^{-1}(B) = P \in \mathcal{P}$ داریم $P \bigcap D \in \tau X$. پس $f|_D \in C(X)$ و نظیر برهان قضیهٔ ۲- ۵ مجموعه چگال D در X باز است. قسمت برعکس واضح است. □

نکتهٔ ۲- ۱ اگر فضای هاسدورف و قویاً بلمبرگ X، موضعاً فشرده، یا متری پذیر باشد، آن گاه بنا به قضیهٔ ۲- ۴، X یک فضای تقریباً گسسته خواهد بود. در این صورت X در شرط قوی تری از نتیجهٔ ۲- ۱ صدق می‌کند که آن را در قالب قضیهٔ زیر می‌آوریم:

قضیهٔ ۲- ۶ اگر X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده، یا متری پذیر باشد، آن گاه X قویاً بلمبرگ است اگر و تنها اگر به ازای هر فضای دلخواه Y شرط (*) در تعریف ۱- ۱ برقرار شود. □

تعریف ۲- ۴ فرض کنیم κ یک عدد اصلی نامتناهی باشد. اگر هر اشتراک کمتر از κ مجموعه باز و چگال در X، چگال باشد، آن گاه X را فضای κ- بئر می‌گوییم. پس فضاهای بئر معمولی همان فضاهای $\aleph_1$-بئر هستند.

نکتهٔ ۲- ۲ لم و گزاره بعدی در [۱] آمده‌اند. در اینجا آنها را بر حسب زیر مجموعه‌های باز و چگال بیان خواهیم نمود.

لم ۲- ۳ فضاهای توپولوژی X و Y و تابع $f: X \to Y$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم به ازای هر $\varnothing \neq U \in \tau X$ زیر مجموعه $k(U)$ از U، که هیچ جا چگال نیست، وجود دارد، به طوری که $f|_{k(U)}$ پیوسته است. در این صورت یک زیرمجموعه چگال D از X وجود دارد، به طوری که $f|_D$ پیوسته است.

گزارهٔ ۲- ۱ اگر X یک فضای توپولوژی و m یک عدد اصلی نامتناهی باشد، آنگاه شرایط زیر معادل هستند.

(۱) X یک فضای m^+- بئر است یا به طور معادل اجتماع هر خانواده m تایی از مجموعه‌های هیچ جا چگال، در X باز نیست.

(۲) اگر Y یک فضای توپولوژی با عدد اصلی کمتر یا مساوی m باشد، آنگاه برای هر تابع $f: X \to Y$، زیر مجموعه چگال D از X موجود است به طوری که $f|_D$ پیوسته است.

(۳) اگر (Y, d) یک فضای متری با وزن نابیشتر از m و $f: X \to Y$ یک تابع دلخواه باشد آنگاه به ازای هر $\varepsilon > o$ زیرمجموعه چگال D_ε وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in D_\varepsilon$ داریم: $\omega(x, f) = \inf\{diam\ f(D_\varepsilon \cap V) \mid x \in V \in \tau X\} \leq \varepsilon$.

اثبات: [۵] را ببینید. □

نتیجهٔ ۲- ۲ شرایط زیر برای یک فضای توپولوژی X معادل هستند:

(۱) X یک فضای بئر است.

(۲) اگر Y یک فضای توپولوژی شمارش‌پذیر و $f:X\to Y$ یک تابع دلخواه باشد، آنگاه زیرمجموعه چگال D از X موجود است به طوری که $f|_D$ پیوسته است.

(۳) اگر (Y,d) یک فضای متری جدایی‌پذیر و $f:X\to Y$ یک تابع دلخواه باشد، آنگاه به ازای هر $\varepsilon>o$، یک زیرمجموعه چگال D_ε از X وجود دارد به طوری که به ازای هر $x\in D_\varepsilon$ داریم: $\omega(x,f)=\inf\{diam\ f(D_\varepsilon\cap V)\,|\,x\in V\in\tau X\}\le\varepsilon$.

لم ۲- ۴ فضاهای توپولوژی X و Y و تابع $f:X\to Y$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم به ازای هر $\varnothing\ne U\in\tau X$ زیر مجموعهٔ ناتهی و $k(U)$ از U وجود دارد، به طوری که $f|_{k(U)}$ پیوسته است. در این صورت یک زیرمجموعه چگال و باز D از وجود دارد، به طوری که $f|_D$ پیوسته است.

گزارهٔ ۲- ۲ اگر X یک فضای توپولوژی و m یک عدد اصلی نامتناهی باشد، آنگاه شرایط زیر معادل هستند.

(۱) اگر $\{G_\alpha\}_{\alpha\in m}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های چگال در X باشد، آنگاه $\bigcap_{\alpha\in m}G_\alpha$ در X چگال است، یا به طور معادل اجتماع هر خانواده m تایی از زیر مجموعه‌های با درون تهی در X، دارای درون تهی است.

(۲) اگر Y یک فضای توپولوژی با عدد اصلی کمتر یا مساوی m باشد، آنگاه برای هر تابع $f:X\to Y$، زیرمجموعه باز و چگال D از X موجود است به طوری که $f|_D$ پیوسته است.

(۳) اگر (Y, d) یک فضای متری با وزن نابیشتر از m و $f: X \to Y$ یک تابع دلخواه باشد آنگاه به ازای هر $\varepsilon > o$ زیرمجموعه باز و چگال D_ε وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in D_\varepsilon$ داریم: $\omega(x, f) = \inf\{diam\ f(D_\varepsilon \cap V) \mid x \in V \in \tau X\} \leq \varepsilon$.

اثبات: (۲)$\rightarrow$(۱) فرض کنیم f و Y نظیر فرض (۲) باشند. اگر U یک مجموعه باز ناتهی در X باشد، آنگاه $U = \bigcup_{y \in Y}(f^{-1}(y) \cap U)$ و بنا به فرض (۱)، $y \in Y$ وجود دارد به طوری که $f^{-1}(y) \cap U$ دارای درون تهی نیست. پس بنا به لم ۲- ۴، زیرمجموعه باز و چگال D از X وجود دارد به قسمی که $f|_D$ پیوسته است.

(۳)$\rightarrow$(۲) فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده است و $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای فضای متری Y با عدد اصلی نابیشتر از m و هر عضو پایه B از $\mathcal{B}$ قطری کمتر از ε داشته باشد. $\mathcal{B}$ را با توپولوژی گسسته در نظر گرفته و $\psi: X \to \mathcal{B}$ را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که $f(x) \in \psi(x)$. چون شرایط فرض (۲) برقرار است، زیرمجموعه باز و چگال D_ε از X موجود است به طوری که $f|_D$ پیوسته گردد و لذا به ازای هر $x \in D_\varepsilon$ داریم

$$\omega(x, f) = \inf\{diam\ f(D_\varepsilon \cap V) \mid x \in V \in \tau X\} \leq \varepsilon$$

(۱)$\rightarrow$ (۳) فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ یک خانواده از مجموعه‌های با درون تهی در X باشد و $|\mathcal{A}| \leq m$ با استقراء روی عدد اصلی m می‌توان فرض کرد که اگر $a \neq b$ در $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه $G_a \cap G_b = \varnothing$. قرار می‌دهیم $Y = \{\mathcal{A}\} \cup \mathcal{A}$ و فضای Y را با متر گسسته در نظر می‌گیریم. تابع $f: X \to Y$ را با ضابطهٔ $f(x) = \alpha$ به ازای $x \in G_\alpha$ و $f(x) = \mathcal{A}$ به ازای $x \notin \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha$ تعریف می کنیم. پس بنا به فرض (۳) زیرمجموعه باز و چگال $D_{1/2}$ موجود است که برای هر $x \in D_{1/2}$ داریم

$$\omega(x, f) = \inf\{diam\ f(D_{1/2} \cap V) \mid x \in V \in \tau X\} \leq 1/2$$

و $f|_{D_{1/2}}$ نیز پیوسته است. برای هر $\alpha \in \mathcal{A}$، چون درون G_α تهی است، پس $D_{1/2} \cap G_\alpha = \varnothing$ و بنابراین درون $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha$ تهی است.

نتیجهٔ ۲- ۳ شرایط زیر برای یک فضای توپولوژی X معادل هستند:

(۱) هر اشتراک شمارا از زیرمجموعه‌های چگال در X، در X چگال است.

(۲) اگر Y یک فضای توپولوژی شمارش‌پذیر و $f:X\to Y$ یک تابع دلخواه باشد، آنگاه زیرمجموعه باز و چگال D از X موجود است به طوری که $f|_D$ پیوسته است.

(۳) اگر (Y,d) یک فضای متری جدایی‌پذیر و $f:X\to Y$ یک تابع دلخواه باشد، آنگاه به ازای هر $\varepsilon>o$، یک زیرمجموعه باز و چگال D_ε از X وجود دارد به طوری که به ازای هر $x\in D_\varepsilon$ داریم: $\omega(x,f)=\inf\{diam\ f(D_\varepsilon\cap V)\,|\,x\in V\in\tau X\}\le\varepsilon$.

تشکّر و قدردانی:

نویسندگان مقاله، مراتب تشکر و قدردانی خود را از آقای دکتر امیدعلی شهنی‌کرمزاده برای راهنمایی‌های ارزشمندشان در مورد محتوای این مقاله ابراز می‌دارند.

مراجع

[1] White, H.E., Jr., *Topological spaces in which Blumbergs theorem holds*, Proc. Amer. Math. Soc. 44 (1974), 454-46

[2] Gillman, L.and Jerison, M., *Rings of continuous Functions*, D. Van Nostrand Co., New York, (1976).

[3] Blumberg, H., *New properties of all real function*, Trans. Amer. Math. Soc.(1922) 113-128.

[۴] شهنی‌کرمزاده، امیدعلی، کدام مسائل انگیزه بخش‌اند؟ پانزدهمین کنفرانس ریاضی ایران، سال ۱۳۶۳.

[5] Bradford, J.C. and Goffman, C., Metric spaces in which Blumbergs theorem holds, Proc.Amer. Math. Soc., 11 (1960), 667-670.

[6] Alas, O.T., On Blumbergs theorem, Notices of the American Mathematical Society 23 (1976), 76T-G12, p. A-23.

[7] Piotrowski, Z.P. and Szymanski, A., Concerning Blumbergs theorem, Houston J. Math. 10, 1 (1984).

[8] Hewitt, E., A problem of set-theoretic topology, Duke J. Math. Soc. 49 (1943), 719-721.

[9] Comfort, W.W. and Garcia-Ferreira, S., Resolvability: A selective survey and some new results, Topology and its App. 74 (1996), 149-167.

[10]Wallker, R.C., The Stone-Cech Compactification, Springer-Verlag, Mass, (1970).

[11]Wilard, S., General Topology, Addison-Wesley, Reading, (1970).