

بررسی ضرائب شدت تنش در چهار ترک باز شده داخلی گری فیث^۱ توسط گوه ای حرارتی^۲ در محیط نامتناهی

منصور سراج

گروه ریاضی - دانشگاه شهید چمران اهواز

پست الکترونیکی: sarajm59@scu.ac.ir

چکیده

در این مقاله به تحقیق و بررسی چهار ترک داخلی از نوع گری فیث که در محیطی نامتناهی و ایزوتروپ تحت کرنش صفحه ای توسط گوه ای حرارتی باز شده اند، می پردازیم. مسائل ترک و انواع آن به طور وسیعی با استفاده از روش های متفاوت ریاضی حل و بحث گردیده اند. در این تحقیق که نوع خاصی از ترک را در برمی گیرد توانسته ایم با استفاده از روش تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی تحت شرایط کرنش صفحه ای، و در محیطی ایزوتروپ و همگن معادلات کامل از شکل ترک، ضرائب شدت تنش و مؤلفه های تنش قائم بر سطح ترک را به دست آوریم.

واژه های کلیدی: ترک گری فیث، ضرائب شدت تنش، تبدیل فوریه، گوه حرارتی و مؤلفه های تنش عمودی.

1- Griffith

2- Heated wedge

مقدمه

یک رشد بسیار سریع و چشمگیری در مهندسی شاخه کشسانی حرارتی^۱ بعد از جنگ جهانی دوم در رشته‌های علوم مهندسی حاصل شده است. در این میان شخصی به نام گری فیت که با چاپ دو مقاله تقریباً بی نظیر خود در سال‌های ۱۹۲۰ و ۱۹۲۴ توانست لقب پدر مکانیک شکستگی را به خود اختصاص دهد. وی در این مقالات به شیوه‌ای بسیار ظریف به بحث و بررسی نظریه ریاضی کشسانی در مسائل ترک پرداخته شده است [۱ و ۲]. مسئله باز شدن یک ترک داخلی از نوع گری فیت در یک نوار نامتناهی که لبه‌های آن موازی با محور ترک فرض شده است، اخیراً توسط سراج بررسی شده است [۳]. یک نگرش و نظریه جدید توسط کوشواها [۴] مطرح گردیده که در آن به بحث و بررسی مسئله میدان تنش در مجاورت و همسایگی ترک گری فیت پرداخته شده است. کوشواها و یومش^۲ [۵] به بررسی عوامل شدت نیرو در باز شدن یک ترک گری فیت توسط نیروهای گرمایی در یک نوار نامتناهی پرداخته‌اند. مسئله باز شدن ترک به علت تنش‌های وارده بر سطح و مجاورت توسط لاون گروب و اسندون^۳ [۶ و ۷] بحث و بررسی گردیده است. یک مقاله مروری [۸] بر ترک‌های گری فیت توسط لاون گروب نیز به چاپ رسیده است. یک مرور و بررسی بسیار جالب و دقیق از مسائل ترک از دید نظریه کشسانی^۴ را می‌توان در مقاله لاون گروب و اسندون [۹] مشاهده نمود. مسئله باز شدن یک ترک داخلی از نوع گری فیت در یک نوار قائم نامتناهی که محور ترک عمود بر لبه‌های نوار فرض شده است، توسط سراج [۱۰] مورد بحث و بررسی شده است. موضوع این مقاله همچنین می‌تواند به عنوان مسئله‌ای با بی‌نهایت ترک‌های گری فیت که با فواصل مساوی از یکدیگر قرار دارند، تعمیم داده شود و این مقاله حاضر به

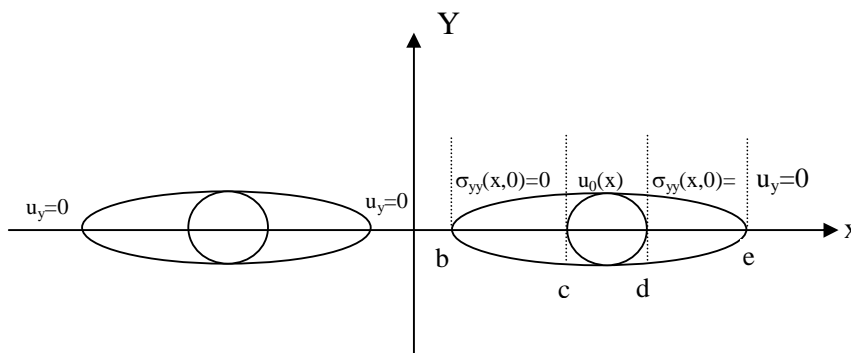
1 - Thermoelasticity

2 - Kushwaha and Umesh

3 - Lowengrub and Snedon

4 - Theory of elasticity

صورت مسئله‌ای با چهار ترک از نوع گری فیت کاهش پیدا کرده است. ترک‌های موجود در مسئله به صورت زیر $b \leq |x| \leq c$ و $d \leq |x| \leq e$ ، $(y=0)$ در محیط قرار گرفته‌اند.



چگونگی نحوه باز شدن چهار ترک داخلی از نوع گری فیت با استفاده از گوه‌ای حرارتی

شرایط مرزی مسئله به صورت زیر است:

$$\sigma_{xy}(x,0) = 0 \quad 0 \leq |x| < \infty \quad (1)$$

$$\sigma_{yy}(x,0) = 0 \quad b < |x| < c \quad , \quad d < |x| < e \quad (2)$$

$$u_y(x,0) = \begin{cases} u_0(x) & c \leq |x| \leq d \\ 0 & 0 \leq |x| \leq b \end{cases} \quad , \quad e \leq |x| < \infty \quad (3)$$

این نکته نیز بررسی گردیده است که سطوح بالا و پایین ترک به جز در نقاط انتهایی آن به یکدیگر وصل نشده باشند [۱۱]، یعنی $u_y(x,0) > 0$ برای بازه‌های $d < |x| < e$ و $b < |x| < c$.

در اینجا برای حل تقریبی از رابطه تبدیل فوریه نامتناهی سینوسی و کسینوسی استفاده می‌کنیم.

$$f_{cs}(\xi, \zeta) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) \cos(\xi x) \sin(\zeta y) dx dy \quad (4)$$

اما ابتدا به فرمول‌بندی مسئله می‌پردازیم.

فرمول‌بندی مسئله

با توجه به فیزیک مسئله در غیاب نیروهای داخلی جسم، مجموعه‌ای از معادله‌های دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را داریم که در آن σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} مؤلفه‌های تنش می‌باشند.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (۵)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (۶)$$

با توجه به این که هیچ‌گونه تنشی بر محور ترک در راستای x وارد نمی‌شود، لذا $\sigma_{xx} = 0$. همچنین مؤلفه‌های تنش قائم σ_{xy} و σ_{yy} که در بخش‌های بعد به دست خواهند آمد را می‌توان از روابط تنش-کرنش^۱ به صورت زیر استخراج نمود:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + (\lambda e_{kk} - \gamma T)\delta_{ij} \quad i, j = x, y \quad (۷)$$

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial u_j}{\partial x}$$

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_i \quad i, j = x, y \quad (۸)$$

$$e_{kk} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر، λ, μ ثابت‌های لامه^۲ و α_i ضریب انبساط خطی است.

1- Stress- Strain relation

2- Lamé's constant

با قرار دادن معادله‌های (۷) و (۸) در (۵) و (۶) و پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$$\nabla^2 T(x, y) = 0 \quad (9)$$

در این معادله لاپلاس T مشخص کننده میزان حرارت گوه در هر نقطه (x, y) است. و به همین ترتیب برای مؤلفه جابجایی u_x خواهیم داشت:

$$\nabla^4 u_x = 0 \quad (10)$$

در این مقاله مسئله را در دو مرحله به صورت مرحله (الف) برای توزیع و انتشار حرارت و مرحله (ب) را برای مسئله کشسانی حل می‌نماییم.

مرحله الف:

در این مرحله به حل معادله (۹) برای مسئله انتشار حرارت می‌پردازیم. در این حالت شرایط مرزی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$T(x, 0) = \begin{cases} \theta(x) & c < |x| < d \\ 0 & o < |x| < b \end{cases} \quad e < |x| < \infty \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = f(x) \quad b < |x| < c, \quad d < |x| < e \quad (12)$$

$T(x, 0)$ نمایش میزان حرارت موجود در بازه‌های (۱۱) بوده و $\theta(x)$ مقدار معین حرارت گوه است. $f(x)$ میزان تغییرات انتشار یافته گرما بر سطح ترک در بازه‌های (۱۲) می‌باشد. مؤلفه جابجایی u_y نیز بر حسب u_x با استفاده از معادله‌های (۵) و (۶) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$u_y(x, y) = \frac{1}{1 - \beta^2} \left[\beta^2 \int \frac{\partial u_x}{\partial x} dy + \int \frac{\partial u_x}{\partial y} dx \right] \quad (13)$$

که در آن

$$\beta^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}$$

تبدیل فیزیک مسئله به معادله انتگرالی پنج گانه

برای حل مسئله انتشار حرارت، کافی است که از معادله (۹) تبدیل فوریه کسینوسی گرفته و پس از حل و خلاصه کردن معادله انتگرالی برابری زیر به دست می آید.

$$T(x, y) = \int_0^{\infty} A(\xi) e^{-\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (14)$$

حال با توجه به تقارن مسئله و استفاده از شرایط مرزی (۱۱) و (۱۲) در (۱۴) خواهیم داشت.

$$\int_0^{\infty} A(\xi) \cos(\xi x) d\xi = \begin{cases} \theta(x) & c \leq x \leq d \\ 0 & 0 \leq x \leq b, \quad e \leq x < \infty \end{cases} \quad (15)$$

$$\int_0^{\infty} \xi A(\xi) \cos(\xi x) d\xi = -f(x) \quad b < x < c, \quad d < x < e \quad (16)$$

حال این معادلات انتگرالی را می توان در مرحله بعد با فرض مقدار تقریبی برای $A(\xi)$ حل نمود.

مرحله ب

مؤلفه جابجایی u_x با تبدیل فوریه سینوسی گرفتن از معادله (۱۰) به شکل زیر در می آید.

$$u_x(x, y) = \int_0^{\infty} [B(\xi) + yE(\xi)] e^{-\xi y} \sin(\xi x) d\xi \quad (17)$$

$B(\xi)$ و $E(\xi)$ ثابت هائی هستند که می توان آنها را از روابط (۱۱) و (۱۲) محاسبه نمود و در (۱۸) نسبت آنها به یکدیگر به دست آمده است. اما از شرایط مرزی (۱) با استفاده از روابط (۷) و (۸) نتیجه زیر را خواهد داشت.

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \Big|_{y=0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \Big|_{y=0} = 0$$

با به کارگیری استفاده u_x از (۱۷) و u_y از (۱۳) برابری زیر را به دست می آوریم.

$$E(\xi) = \xi(1 - \beta^2)B(\xi) \quad (18)$$

به همین ترتیب شرایط مرزی (۲) و (۳) به کمک (۷) و (۸) به نتیجه زیر منجر خواهد شد.

$$\int_0^\infty -B(\xi)\cos(\xi x)d\xi = \beta^{-2} \begin{cases} u_0(x) & c < x < d \\ 0 & x \in (0, b) \cup (e, \infty) \end{cases} \quad (19)$$

$$\int_0^\infty \xi B(\xi)\cos(\xi x)d\xi = \frac{(3\beta^2 - 4)\alpha_1}{2(\beta^2 - 1)} T(x, 0) \quad b < x < c, \quad d < x < e \quad (20)$$

حال در مرحله بعد به حل معادلات انتگرالی پنج گانه موجود در (۱۵)، (۱۶)، (۱۹) و (۲۰) که برای پنج بازه اشاره شده در معادلات فوق می باشد، پرداخته خواهد شد.

حل معادلات انتگرالی پنج گانه

در حقیقت مقادیر تقریبی $A(\xi)$ در (۲۱) و سپس $B(\xi)$ در (۳۱) به ترتیب باعث معرفی توابع $g_1(t)$ ، $g_2(t)$ ، $h_1(t)$ و $h_2(t)$ می باشند که در محاسبه کمیت های فیزیکی استفاده خواهند شد.

لذا حل تقریبی (۱۵) را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$A(\xi) = \frac{2}{\pi\xi} \left[\int_b^c g_1(t)\sin(\xi t)dt + \int_d^e g_2(t)\sin(\xi t)dt - \int_c^d \theta'(t)\sin\xi t dt \right] \quad (21)$$

حال با استفاده از فرمول زیر

$$\int_0^\infty \frac{\sin \xi t \cos \xi x}{\xi} d\xi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & t > x \\ 0 & t < x \end{cases} \quad (22)$$

معادله (۲۱) در صورتی در معادله (۱۵) صدق خواهد کرد که

$$\int_b^c g_1(t) dt = -\theta(c) \quad (23)$$

که $\theta(c)$ مقدار حرارت انتشار یافته در نوک ترک (c) در شکل می باشد. با جایگزینی $A(\xi)$ از (۲۱) در (۱۶) و استفاده از فرمول زیر

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\xi t) \sin(\xi x)}{\xi} d\xi = \frac{1}{2} Ln \left| \frac{t+x}{t-x} \right| \quad (24)$$

و $g_1(t)$ و $g_2(t)$ به صورت زیر به دست خواهند آمد:

$$g_1(t) = \frac{\Delta(t)}{\pi^2 \delta_3(t)} \quad b < t < c \quad (25)$$

$$g_2(t) = \frac{-\Delta(t)}{\pi^2 \delta_3(t)} \quad d < t < e \quad (26)$$

در صورتی که مقادیر $\delta_3(x), \delta_2(x), \delta_1(x)$ از رابطه های زیر به دست می آیند:

$$\Delta(t) = \int_b^c \frac{x \cdot f(x) \cdot \delta_3(x)}{t^2 - x^2} dx - \int_d^e \frac{x \cdot f(x) \cdot \delta_3(x)}{t^2 - x^2} dx + t^2 D_0 + D_1 \quad (27)$$

$$\delta_3(x) = \delta_1(x) \cdot \delta_2(x) \quad (28)$$

$$\delta_1(x) = \left[(t^2 - b^2)(t^2 - x^2) \right]^{1/2} \quad d < t < e \quad (29)$$

$$\delta_2(x) = \left[(d^2 - t^2)(e^2 - t^2) \right]^{1/2} \quad b < t < c \quad (30)$$

در این جا D_0 و D_1 ثابت هایی هستند که باید محاسبه شوند.

به همین ترتیب جواب تقریبی برای معادله‌های (۱۹) و (۲۰) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$-\beta(\xi) = \frac{2}{\pi\xi} \left[\int_b^c h_1(t) \sin(\xi t) dt + \int_d^e h_2(t) \sin(\xi t) dt - \beta^{-2} \int_c^d u_0'(t) \sin(\xi t) dt \right] \quad (31)$$

با جایگزینی از (۳۱) در (۱۹) و حل برای بازه‌های مختلف، خواهیم داشت.

$$\int_d^e h_2(t) dt = \beta^{-2} u_0(d) \quad (32)$$

به کمک رابطه (۳۲) و استفاده از فرمول (۲۲)، معادله (۳۱) در صورتی برقرار خواهد شد که داشته باشیم.

$$\int_b^c h_1(t) dt = -\beta^{-2} u_0(c) \quad (33)$$

به همین ترتیب جانشینی (۳۱) در (۲۰) و استفاده مکرر از روش کوشواها [۲]، توابع $h_1(t)$ و $h_2(t)$ به صورت زیر محاسبه خواهند شد:

$$h_1(t) = \frac{\Delta(t)}{\pi^2 \delta_3(t)} \quad b < t < c \quad (34)$$

$$h_2(t) = \frac{\Delta(t)}{\pi^2 \delta_3(t)} \quad d < t < e \quad (35)$$

که در اینجا $\Delta(t)$ توسط رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta(t) = \int_b^c \frac{\delta_3(x) p(x)}{t^2 - x^2} dx - \int_d^e \frac{\delta_3(x) p(x)}{t^2 - x^2} dx + t^2 L_0 + L_1 \quad (36)$$

و $P(x)$ به صورت زیر خواهد بود.

$$P(x) = \frac{(3\beta^2 - 4)\alpha t}{2(\beta^2 - 1)} T(x, 0)$$

که $\delta_3(x)$ از (۲۸) به دست می‌آید.

کمیت‌های فیزیکی

انتشار حرارت

حرارت $T(x,0)$ یکی از مهم‌ترین کمیت‌های فیزیکی است زیرا این حرارت باعث تولید نیرویی می‌شود که در باز شدن بیشتر ترک در بازه‌های $b \leq x \leq c$ و $d \leq x \leq e$ مؤثر خواهد بود. لذا برای محاسبه این مقدار حرارت در نواحی ذکر شده بالا باید انتگرال موجود در (۱۵) با جایگزینی $A(\xi)$ از (۲۱) و استفاده از فرمول (۲۲) حل شود، که مقدار $T(x,0)$ برای بازه‌های $c \leq x \leq d$ و $a \leq x \leq b$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$T(x,0) = \int_x^c g_1(t)dt + \theta(c) \quad b \leq x \leq c \quad (37)$$

$$T(x,0) = \int_x^e g_2(t)dt \quad d \leq x \leq e \quad (38)$$

توابع $g_1(t)$ و $g_2(t)$ را می‌توان به ترتیب از روابط (۲۵) و (۲۶) بدست آورد.

شکل ترک

مقدار جابجایی در باز شدن ترک $u_y(x,0)$ را می‌توان با حل انتگرال موجود در سمت چپ معادله (۱۹) برای فواصل $b < x < c$ و $d < x < e$ همراه با نتایج موجود در (۳۲) و فرمول (۲۲) به صورت زیر به دست آورد.

$$u_y(x,0) = \int_x^c h_1(t)dt + \beta^{-2}u_0(c) \quad b < x < c \quad (39)$$

$$u_y(x,0) = \int_x^e h_2(t)dt \quad d < x < e \quad (40)$$

مؤلفه‌های تنش عمودی

مؤلفه تنش عمودی را با $\sigma_{yy}(x,0)$ نشان داده و می‌توان آن را توسط حل انتگرال واقع در سمت چپ معادله (۲۰) برای فواصل $c < x < d$, $0 < x < b$ و $e < x < \infty$ به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\sigma_{yy}(x,0) = \pm \frac{\Delta(x)}{\pi^2 \delta_3(x)} \quad (41)$$

علامت (+) نمایش بازه $e < x < \infty$ و علامت (-) نمایش بازه $0 < x < b$ و $c < x < d$ می‌باشد.

مقادیر $\Delta(x)$ و $\delta_3(x)$ نیز همان مقادیر واقع در (۳۶) و (۲۸) هستند.

ضرائب شدت تنش

از دیگر کمیت‌های فیزیکی مهم در مکانیک جامدات محاسبه ضرائب شدت تنش در نوک ترک b, c, d, e می‌باشد که می‌توان آن را به ترتیب توسط K_b, K_c, K_d و K_e به صورت زیر به دست آورد.

$$K_b = \lim_{x \rightarrow b^-} \sqrt{b-x} \quad \sigma_{yy}(x,0) \quad x \in (0, b)$$

$$K_c = \lim_{x \rightarrow c^+} \sqrt{x-c} \quad \sigma_{yy}(x,0) \quad x \in (c, d)$$

$$K_d = \lim_{x \rightarrow d^-} \sqrt{d-x} \quad \sigma_{yy}(x,0) \quad x \in (c, d)$$

$$K_e = \lim_{x \rightarrow e^+} \sqrt{x-e} \quad \sigma_{yy}(x,0) \quad x \in (e, \infty)$$

۱- حالت‌های خاص

دو حالت خاص را در تأیید صحت تجزیه و تحلیل مسئله حاضر می‌توان به صورت زیر در نظر گرفته و بحث کرد.

حالت اول: می‌توان شکل ترک-انتشار حرارت و جریان گرمایی تولید شده ناشی از گوه را در هر دو حالت به صورت زیر فرض نمود.

$$u_0(x) = u_0 \quad \text{تابع شکل گوه (ثابت)}$$

$$\theta(x) = \theta_0 \quad \text{تابع توزیع حرارت (ثابت)}$$

$$f(x) = f_0 \quad \text{تابع جریان گرما در فواصل } b \leq x \leq c \text{ و } d \leq x \leq e \text{ (ثابت)}$$

حالت دوم:

$$u_0(x) = u_0 \text{ تابع}$$

تابع شکل گوه (ثابت)

$$\theta(x) = \theta_0$$

انتشار حرارت (ثابت)

تابع جریان گرمایی صفر است (جریان وجود ندارد) $d \leq x \leq e$ و $b \leq x \leq c$ $f(x)=0$

نتیجه گیری

۱- در حقیقت وقتی که دو حالت خاص را در نظر می‌گیریم، ملاحظه می‌کنیم که معادله‌های به دست آمده در کمیته‌های فیزیکی به شکل‌های بسیار ساده‌تری تبدیل می‌شوند که می‌توان آنها را با هر روش تقریبی از قبیل روش تقریبی سیمپسون محاسبه نمود.

۲- می‌توان با استفاده از معادله‌های به دست آمده، نموداری از نحوه پیشرفت ترک در محیط را با استفاده از هر نرم‌افزار ریاضی به دست آورده و رسم کرد.

۳- مهم‌ترین نتیجه در حقیقت این بود که مسئله یک ترک داخلی که در پایان‌نامه دکتری مؤلف [۱۲] به حل و بحث آن پرداخته شده بود را می‌توان برای دو ترک با توجه به فیزیک مسئله و اندکی تغییر در شرایط مرزی تعمیم داده که جواب‌های به دست آمده در واقع به جواب‌هایی از قبل پیش‌بینی شده در [۱۲] بسیار نزدیک بودند. این خود دلیلی بر صحت جواب‌های مسئله می‌باشد. در حقیقت مقایسه در حالت‌های خاص با نتایج گزارش شده در پایان‌نامه مذکور صورت گرفته و چون مقاله حاضر یک مسئله کلاسیک و تحلیلی است و به جهت طولانی نشدن از نمایش کامل روابط و معادلات پرهیز شده است.

۴- در نهایت مسئله حاضر را می‌توان برای n تعداد ترک از نوع گری فیث که در یک راستا و فواصل معین از یکدیگر قرار دارند، تعمیم داد.

مراجع

- [1] Griffith, A.A, "The phenomenon of rupture and flow in solids" Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 221 (1920) 163-198.
- [2] Griffith, A.A, "The theory of rupture" Proc .1st intern. Cong. Appl. Mech. Delft, (1924) 55-63.
- [3] Saraj, M., An interior Griffith crack opened by a heated wedge in an infinite strip whose edges are parallel to crack axis, Bulletin of the Iranian mathematical society, 20, 1 (1994) 19-36.
- [4] Kushwaha, P.S., The stress field in the neighborhood of Griffith crack in an in finite medium, a new approach, 40th Ann. Conf. of IMS, 26-29. I.I.T., Bombay, India, (1974).
- [5] Kushwaha, P.S., and Chandra, Umesh e stress intensity factor for a Griffith crack opened by thermal stresses in an infinite strip, Acta. Ciencia Indica. 8, 3 (1982) 152.
- [6] Lowengrub, M., A two dimensional crack problem, Int. J. Engg. Sci. , 4(b) (1966) 289.
- [7] Sneddon, I.N, The distributions of stresses in the neighborhood of a crack in an elastic solid. Proc. Roy. Soc. London, A 187 (1946) 229.
- [8] Lowengrub, M., A note on Griffith cracks, Proc. Edinb. Maths. Soc. 15 (1966) 131.
- [9] Sneddon, I.N. and Lowengrub, M., The crack problem in mathematical theory of elasticity, John Willey, (1970).
- [10] Saraj, M., Stress Intensity Factors for an Interior Griffith crack opened by heated wedge in a strip whose edges are normal to crack

axis. Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran. 12, 4 (2001)
351-359.

[11] Burniston, E.E., An example of the partially closed Griffith crack. Int.
J. Fracture, Mech. 5 (1969) 17-24.

[12] Saraj, M., "Heated wedge problem in isotropic elasticity" Ph.D
Thesis, (1989).