مروری

نگرشی بر z– ایدآل‌ها از پیدایش تا به امروز

فریبرز آذرپناه

گروه ریاضی– دانشگاه شهید چمران اهواز

پست الکترونیکی: **azarpanah@ipm.ir**

چکیده

در این مقاله نگرشی بر مبحث "z- ایدآل‌ها" با قدمت ۵۰ ساله داشته‌ایم. سیر تکاملی z- ایدآل‌ها را در هر حلقه و به ویژه در حلقهٔ توابع پیوسته $C(X)$ که معرفی مفهوم z- ایدآل از آن جا آغاز شده است مطالعه می‌کنیم. همهٔ ویژگی‌های z- ایدآل‌ها و ارتباط آن‌ها با ایدآل‌های اول مطرح و بالاخره با چند واقعیت و نتیجه، z- ایدآل‌ها به عنوان پل‌های ارتباطی میان خواص توپولوژیکی فضای X و خواص جبری حلقهٔ $C(X)$ شناخته شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: *z- ایدآل، z°– ایدآل، rez– ایدآل، ایدآل اول، ایدآل غیرعادی، حلقهٔ توابع پیوسته، F- فضا، تقریباً P- فضا و ∂– فضا*

مقدمه

شاید بتوان مراجع [۱ و ۲] را آغاز مطالعهٔ حلقه‌های توابع پیوسته دانست. این حلقه‌ها را با $C(X)$ نشان می‌دهیم که متشکل از توابع حقیقی روی فضاهای کاملاً منظم و هاسدورف با دو عمل جمع و ضرب معمولی روی توابع هستند. علاوه بر ویژگی‌هایی جبری که هر حلقه‌ای داراست، این حلقه‌ها به واسطهٔ ویژگی‌های توپولوژیکی‌شان اهمیت دارند. بسیاری از ایدآل‌ها را در این حلقه‌ها می‌توان به کمک مفاهیم توپولوژیکی ساخت که این امر در هر حلقه‌ای میسر نیست. این نوع ایدآل‌ها وقتی اهمیت پیدا می‌کنند که بتوان آن‌ها را در هر حلقهٔ دیگری با کمک ابزار جبری نیز بیان کرد. در چنین وضعیتی است که می‌توان بین خواص جبری حلقهٔ $C(X)$ و خواص توپولوژیکی X ارتباط برقرار کرد که یکی از اهداف مهم مطالعه‌ی حلقه‌های توابع پیوسته است. یکی از این ایدآل‌ها با این ویژگی ممتاز، z- ایدآل است که ابتدا توسط کهلز [۳] و در حلقه‌های توابع پیوسته معرفی شد. ارتباط این ایدآل‌ها با ایدآل‌های مهم در حلقه‌ها مانند ایدآل‌های اول و ماکسیمال نیز توسط کهلز [۴ و ۵] ظاهر شد و سپس این ارتباط‌ها در مراجع [۱۰-۶] قوت بیش‌تری گرفت. در پیگیری خواص z- ایدآل‌ها متوجه می‌شویم که این دسته از ایدآل‌ها چه رفتار سازگار و زیبایی با ایدآل‌های اول دارند و زمانی که خواننده حاصل

پیوند این ایدآل‌ها را با ایدآل‌های اول و اولیه می‌بینند بی‌شک شگفت‌زده خواهد شد. شاید به جرأت بتوان گفت که هیچ دسته‌ای از ایدآل‌ها چنین خوش رفتار و مأنوس بروز نکرده است. حال آن که با توجه به عمر کوتاه پنجاه سالهٔ این ایدآل‌ها، بدون شک در آنها هنوز زیبایی‌های نهفته‌ای وجود دارد که بشر به آنها دست نیافته است.

گرچه z- ایدآل‌ها به لحاظ ماهیت توپولوژیکی‌شان بیش‌تر در حلقه‌های $C(X)$ مورد مطالعه قرار می‌گیرند، ولی از آنجا که با مفاهیم جبری نیز قابل بیان هستند، در حلقه‌های کلی‌تر نیز قابل بررسی‌اند. این بررسی ابتدا در مرجع [۱۱] و در حلقه‌های کاهشی انجام و سپس ارتباط این ایدآل‌ها با ایدآل‌های اول حلقه مطالعه شد. به دلیل همین ماهیت، در حلقه‌های $C(X)$ نمونه‌های فراوانی از z- ایدآل‌ها را می‌توان دید، ایدآل‌های ماکسیمال و ایدآل‌های اول مینیمال در حلقه‌های توابع پیوسته، z- ایدآل هستند و با کمک مفاهیم توپولوژیکی X، به سهولت z- ایدآل‌های بی‌شماری در $C(X)$ ساخته می‌شود. علاوه بر آن، چون در هر حلقه‌ای اشتراک هر تعداد z- ایدآل یک z- ایدآل است و در حلقهٔ $C(X)$ مجموع z- ایدآل‌ها نیز z- ایدآل می‌باشد، این امکان فراهم می‌شود تا برای هر ایدآل در $C(X)$ کوچک‌ترین z- ایدآل شامل آن و بزرگ‌ترین z- ایدآل مشمول در آن را نیز بسازیم. این موضوع در مراجع [۱۳- ۱۱] مطرح و کاربردهای آن از جمله ترکیب z- ایدآل‌ها با ایدآل‌های اول و اولیه مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. واژهٔ "$\sqrt{z}$ - ایدآل" که همان z- ایدآل بودن رادیکال یک ایدآل است، نخست در مرجع [۱۲] به کار برده شد و در همین مأخذ و مرجع [۱۴] به دو روش مختلف ثابت شده است که مفاهیم "z- ایدآل" و "$\sqrt{z}$ - ایدآل" در $C(X)$ یکسانند. با کمک این مفهوم، نتایج شگفت‌انگیز حاصل از ترکیب z- ایدآل‌ها و ایدآل‌های اول در $C(X)$ تعمیم داده می‌شوند. نوع خاصی از z- ایدآل‌ها، شمارا تولید شده‌ها هستند که از سال ۱۹۶۰ توسط گیلمن در مرجع [۱۵] مطرح و سپس در مراجع [۱۸- ۱۶] دنبال شد. حاصل این چهار مقاله، شناسایی z - ایدآل‌های شمارا تولید شده در $C(X)$ برای فضاهای شمارای نوع اول، نرمال و فشردهٔ موضعی بوده است. ویژگی‌های این نوع z - ایدآل‌ها، حقایقی در خصوص z- ایدآل‌های اول شمارا تولید شده در $C(X)$ را آشکار می‌سازد که از اهمیت خاصی برخوردار است. z° - ایدآل‌ها هم نوع دیگری از z- ایدآل‌ها هستند که ابتدا در حلقه‌های کاهشی با عنوان d- ایدآل در مرجع [۱۹] مورد مطالعه قرار گرفت، سپس در مراجع [۲۰ و ۲۱] پیگیری شد و نتایج مشابه با مبحث z- ایدآل‌ها در حلقه‌های کاهشی به‌دست آمد. z° - ایدآل‌ها در $C(X)$ نیز ابتدا در [۲۲] و سپس در مراجع [۲۳ و ۲۴] بررسی شد. برخلاف z- ایدآل‌ها، مجموع z° - ایدآل‌ها در $C(X)$ لزوماً z° - ایدآل‌ها نیست، بنابراین طبیعی است فضاهای X به گونه‌ای شناسایی شوند که این امر نیز تحقق یابد تا بتوانیم روند مشابه‌ای را که در مورد z- ایدآل‌ها طی شد برای z° - ایدآل‌ها نیز دنبال کنیم. این شناسایی در مراجع [۱۹ و ۲۳] انجام شد و با کمک آن نتایج شگرفی از ترکیب z° - ایدآل‌ها و ایدآل‌های اول در مراجع [۱۲ و ۲۴] حاصل گشت. z - ایدآل‌ها در حلقه های مرتبط با $C(X)$ مثل زیرحلقه‌های $C(X)$ و در حالت خاص، z- ایدآل‌ها در ایدآل‌های $C(X)$، دو مقولهٔ دیگر است که مطالعهٔ آنها به نظر ضروری می‌رسد. z- ایدآل‌ها در یک ایدآل دیگر $C(X)$ در مرجع [۲۵] با واژهٔ "z- ایدآل نسبی" معرفی شده است. خانواده z- ایدآل‌های نسبی شامل دستهٔ z- ایدآل‌هاست و z- ایدآل‌های نسبی وجود دارند که z- ایدآل نیستند. مجموع دو z- ایدآل نسبی نیز لزوماً z- ایدآل نسبی نیست و طبعاً نیاز به شناسایی فضاهای X

داریم تا مجموع z- ایدآل‌های نسبی در $C(X)$ یک z- ایدآل نسبی باشد. z- ایدآل‌های نسبی مبحث جدیدی است که به تازگی در مرجع [۲۵] آغاز شده و هنوز ناشناخته‌های فراوانی در آن وجود دارد. در بخش‌های بعد سیر تکاملی z- ایدآل‌ها در پنجاه سال گذشته را با جزئیات بیش‌تری ارائه خواهیم داد و تأثیر نقش z- ایدآل‌ها را به عنوان پل‌های ارتباطی در برقراری ارتباط خواص جبری $C(X)$ و خواص توپولوژیکی X نشان خواهیم داد. در پایان مقدمه، برای آگاهی از مفاهیم جبری که در این مقاله به‌کار گرفته شده‌اند، خواننده را به مراجع [۲۶ و ۲۷] و برای اطلاع از مفاهیم توپولوژی خواننده را به مراجع [۲۸– ۳۱] ارجاع می‌دهیم.

۱– z– ایدآل‌ها در حلقه‌های یکدار تعویض‌پذیر

برای مطالعهٔ z- ایدآل‌ها، ابتدا R را یک حلقهٔ تعویض‌پذیر یکدار فرض می‌کنیم و یادآور می‌شویم که اشتراک همهٔ ایدآل‌های ماکسیمال در R، جاکبسون R نامیده می‌شود که آن را با $J(R)$ نمایش می‌دهیم. به زودی خواهیم دید که برای مطالعهٔ z- ایدآل‌ها، شرط $J(R)=(0)$ را نیز می‌توان بی کم و کاست در نظر گرفت. اگر $\mathcal{M}$ را گردایهٔ همهٔ ایدآل‌های ماکسیمال در R فرض کنیم، آن‌گاه برای هر $a\in R$ تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{M}_a=\{M\in\mathcal{M} : a\in M\},\quad M_a=\bigcap \mathcal{M}_a=\bigcap_{a\in M\in\mathcal{M}} M$$

اکنون گزارهٔ زیر به سادگی و با توجه به تعریف بالا، اثبات می‌شود.

۱–۱ گزاره: اگر $a,b\in R$، آن‌گاه عبارت‌های زیر برقرارند.

(الف) $\mathcal{M}_a\cup\mathcal{M}_b=\mathcal{M}_{ab}$ و $M_a\cap M_b=M_{ab}$.

(ب) برای هر $n\in N$، $\mathcal{M}_{a^n}=\mathcal{M}_a$ و $M_{a^n}=M_a$

(پ) $b\in M_a$ اگر و تنها اگر $M_b\subseteq M_a$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M}_a\subseteq\mathcal{M}_b$.

۱–۲ تعریف: ایدآل I در حلقهٔ R را یک z– ایدآل می‌نامیم، هرگاه برای هر $a\in I$، $M_a\subseteq I$.

با استفاده از گزارهٔ ۱–۱، تعریف‌های معادل دیگری به شرح زیر برای z– ایدآل‌ها می‌توان بیان کرد.

۱–۳ قضیه: هرگاه I یک ایدآل در حلقهٔ R باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر معادلند:

(الف) I یک z–ایدآل است.

(ب) اگر $a\in I$، $b\in R$ و $M_b\subseteq M_a$، آن‌گاه $b\in I$.

(پ) اگر $a\in I$، $b\in R$ و $\mathcal{M}_a\subseteq\mathcal{M}_b$، آن‌گاه $b\in I$.

(ت) $I=\sum_{a\in I}M_a$.

از تعریف‌ها چنین برمی‌آید که گردایهٔ z– ایدآل‌ها شامل $\mathcal{M}$ است و اشتراک هر تعداد z– ایدآل یک z– ایدآل است. به این ترتیب هر ایدآل ماکسیمال و همچنین برای هر $a\in R$، ایدآل M_a و در حالت خاص $J(R)=M_0$ نیز یک z- ایدآل می‌باشد. در حقیقت $J(R)$ کوچک‌ترین z– ایدآل در R است، به این معنی که هر z– ایدآل در R شامل $J(R)$ می‌باشد. از این رو ساختار z– ایدآل‌های حلقهٔ R همان ساختار z–ایدآل‌های $R/J(R)$ است و بدین سان شرط $J(R)=(0)$ را بی هیچ کاستی می‌توان در نظر گرفت. از این که اشتراک همه z– ایدآل‌های شامل یک ایدآل، خود z– ایدآل می‌باشد، پس هر ایدآل I در یک کوچک‌ترین z– ایدآل قرار دارد. کوچک‌ترین z– ایدآل شامل I را با I_z نمایش می‌دهیم. آشکار است که اگر I یک z–ایدآل باشد، آن‌گاه $I_z=I$. با استفاده از این تعریف، نتایج زیر به سادگی به‌دست می‌آید.

۱-۴ گزاره: فرض می‌کنیم I و J دو ایدآل در حلقهٔ R باشند، در این صورت داریم:

(الف) $I \subseteq \sqrt{I} \subseteq I_Z$.

(ب) اگر $I \subseteq J$، آن‌گاه $I_Z \subseteq J_Z$.

(پ) برای هر $n \in N$، $(I^n)_Z = I_Z$.

(ت) $(I \cap J)_Z \subseteq I_Z \cap J_Z$.

(ث) $(I + I)_Z = (I_Z + J_Z)_Z$.

برابری $(I \cap J)_Z = I_Z \cap J_Z$ لزوماً درست نیست، مثلاً می‌توان حلقهٔ Z_{12} و ایدآل‌های اصلی $I=(4)$ و $J=(6)$ را در نظر گرفت. در این صورت $(I \cap J)_Z = I \cap J = (0)$، حال آن‌که $I_Z \cap J_Z = M_4 \cap M_6 = M_2 \cap M_3 \neq (0)$. اینک با کمک گزارهٔ بالا ،نتایج زیر حاصل می‌شود :

۱-۵ نتیجه: (الف) - هر z- ایدآل حلقهٔ R برابر با اشتراک ایدآل‌های اول مینیمال حلقهٔ R روی I است. به عبارت دیگر، هر z ایدآل نیم- اول است.

(ب)- اگر I یک ایدآل در R و I^n، $n \in N$ یک z ایدآل باشد، آن‌گاه I نیز یک z ایدآل است.

قضیهٔ زیر که در مرجع [۱۳] اثبات شده است، نشان می‌دهد که هر ایدآل اول مینیمال روی یک z ایدآل، z - ایدآل است.

۱-۶ قضیه: فرض می‌کنیم P یک ایدآل اول است و در گردایهٔ همهٔ ایدآل‌های اول شامل z- ایدآل I در حلقهٔ R مینیمال می‌باشد. در این صورت P یک z- ایدآل است.

با توجه به این که $J(R) = (0)$ در حلقهٔ R یک z- ایدآل است، نتیجهٔ زیرآشکار می‌باشد.

۱-۷ نتیجه: هرایدآل اول مینیمال در یک حلقهٔ R، یک z- ایدآل است.

عکس قضیهٔ ۱-۶ درست نیست؛ یعنی، اگرهر ایدآل اول روی ایدآل I یک z- ایدآل باشد، لزوماً I یک z- ایدآل نیست. به عبارت دیگر، هرگاه $\sqrt{I}$ یک z- ایدآل باشد، آن‌گاه I لزوماً z- ایدآل نیست. اثبات قضیهٔ زیر را می‌توان در مرجع [۱۲] مشاهده کرد.

۱-۸ قضیه: فرض می‌کنیم I یک ایدآل و P یک ایدآل اول در حلقهٔ R باشد. اگر $I \cap P$ یک z- ایدآل باشد، آن‌گاه یا I یک z- ایدآل است و یا P. در حالت خاص، اگر P و Q دو ایدآل اول در R باشند به گونه‌ای که P و Q تشکیل زنجیر ندهند و $P \cap Q$ یک z- ایدآل باشد، آن‌گاه P و Q هردو z- ایدآل هستند. در حالت کلی‌تر، هرگاه I یک ایدآل و Q یک ایدآل اولیه باشد به گونه‌ای که $I \cap Q$ یک z- ایدآل باشد، آن‌گاه یا $\sqrt{I}$ یک z-ایدآل است و یا $\sqrt{Q}$.

حلقه‌هایی وجود دارند که در آنها هر ایدآلی، z- ایدآل است. این حلقه‌ها، حلقه‌های منظم می‌باشند؛ یعنی، حلقه‌های که به ازای هر عنصر a یک عنصر b در آنها موجود باشد که $a^2 b = a$. این موضوع که در گزارهٔ زیر به طور دقیق‌تر مطرح شده است در مرجع [۲۵] اثبات شده است.

۱-۹ گزاره: حلقهٔ R منظم است اگر و تنها اگر هر ایدآل آن z- ایدآل باشد.

در حلقه‌هایی که مجموع z- ایدآل‌ها در آنها یک z- ایدآل است، مطالب بیش‌تری در مورد z- ایدآل‌ها می‌توان مطرح کرد. در این نوع حلقه‌ها بزرگ‌ترین z- ایدآل در یک ایدآل دلخواه همیشه وجود دارد. در واقع اگر I یک ایدآل در حلقهٔ R با این ویژگی و S گردایهٔ همهٔ z- ایدآل‌ها در I باشد، آن‌گاه $\sum_{J \in S} J$ یک z- ایدآل در I است و به وضوح بزرگ‌ترین z- ایدآل در

I مـی‌باشـد. حلقـه‌هـای توابـع پیوسـته از ایـن ویژگـی برخوردارند و طبعاً مطالعهٔ z– ایدآل‌هـا در ایـن حلقـه‌هـا، همان‌گونه که در بخش بعد می‌بینیم، روند بهتری خواهنـد داشت. در صورتی که بزرگ‌تـرین z– ایـدآل در I وجـود داشته باشد، آن را با I^Z نمایش می‌دهـیم. بـا اسـتفاده از قضیهٔ ۱–۶، می‌توان نشان داد که برای هر ایدآل اول P در صورتی که P^Zوجود داشته باشد، اول است. در قضیهٔ زیر معلوم می‌شود که این ویژگی در یک حلقهٔ R معادل با این است که بگـوییم بـرای هـر دو ایـدآل I و J در R داشـته باشیم. $(I+J)_Z = I_Z + J_Z$. اثبات نتایج بـاقی‌مانـده از ایـن بخش را می‌توانید در مرجع [۲۵] بینید.

۱–۱۰ قضیه: گزاره‌های زیر در هر حلقهٔ R معادلند.

(الف)– برای هر ایدآل I در R، I^Z وجود دارد.

(ب)– مجموع هر دو z– ایدآل در R یک z– ایدآل است.

(پ)– برای هر $a, b \in R$، $M_{a+b} \subseteq M_a + M_b$.

(ت)– برای هر دو ایدال I و J در R، $(I+J)_Z = I_Z + J_Z$.

در صورتی که یکی از شرایط فوق برقرار باشد، آن‌گاه برای هر ایدآل I در R، داریم $I_z = \sum_{a\in I} M_a$ و $I^Z = \sum_{M_a \subseteq I} M_a$.

۱–۱۱ گزاره: فرض کنـیم I و J دوایـدآل و $\{I_\alpha\}_{\alpha\in S}$ گردایه‌ای از ایدآل‌هـا در حلقـهٔ R باشـد بـه گونـه‌ای کـه I^Z، J^Z و I_α^z برای هر $\alpha \in S$ وجود داشـته باشـند، در این صورت:

(الف) اگر $I \subseteq J$، آن‌گاه $I^Z \subseteq J^Z$.

(ب) $(\bigcap_{\alpha\in S} I_\alpha)^z = \bigcap_{\alpha\in S} {I_\alpha}^z$.

(پ) $I^Z + J^Z \subseteq (I+J)^Z$.

سرانجام شرایط معادل با این که ضـرب هـر دو z– ایدآل در یک حلقه، یک z– ایدآل باشد در گزارهٔ زیـر بیان شده‌اند.

۱–۱۲ گزاره: عبارت‌های زیر در هر حلقهٔ R معادلند.

(الف) ضرب هر دو z– ایدآل در R، یک z– ایدآل است.

(ب) بـــرای هـــر دو ایـــدآل I و J در R، $I_Z J_Z = I_Z \bigcap J_Z$.

(پ) برای هر $a,b \in R$، $M_a M_b = M_{ab}$

(ت) برای هر دو ایدآل I و J در R، اگـر J^Z و I^Z وجـود داشته باشند، آن‌گاه $(IJ)^Z$ نیز وجود دارد و $(IJ)^Z = I^Z J^Z$.

۱–۱۳ نتیجه: اگر در حلقهٔ R، مجمـوع و ضـرب هـر دو z– ایدآل یک z– ایدآل باشد، آن‌گاه برای هر دو ایـدآل J و I در R داریم $(IJ)^Z = I^Z J^Z$.

۲- z–ایدآل‌ها در حلقهٔ C(X)

در بخش قبل، حلقهٔ $C(X)$ را معرفی و تعریف جبـری z– ایـدآل را بیـان کـردیم. ایـن بخـش را بـا مـفهوم صـفر مـجموعه آغـاز می‌کنیم کـه در واقـع واژهٔ "z– ایـدآل" از آن سرچـشمه می‌گیرد. اگر $f \in C(X)$، آن‌گاه

$$Z(f) = \{x \in X : f(x) = ۰\} = f^{-۱}(\{۰\})$$

را یک صفر مجموعه می‌نامیم. اهمیت صفر مجموعه‌ها در ایـن اسـت کـه گردایـهٔ صـفر مجموعـه‌هـا؛ یعنـی، $Z(X) = \{Z(f) : f \in C(X)\}$ یـک پایـه بـرای زیـر مجموعـه‌هـای بـستهٔ X اسـت اگـر و تنهـا اگـر فـضای هاسدورف X کاملاً مـنظم باشـد. از آن‌جـا کـه بـرای هـر $f \in C(X)$، داریم

$$Z(f) = \bigcap_{n=۱}^{\infty} \{x \in X : |f(x)| < ۱/n\}.$$

پس هر عنصر $Z(X)$ یک G_δ– مجموعه اسـت، بـه ایـن ترتیب هر مجموعهٔ بسته لزوماً یک صفر مجموعه نیـست، حال آن‌که هر صفر مجموعهٔ بسته است. چـون بـرای هـر $f, g \in C(X)$ داریم

$$Z(fg) = Z(f) \bigcup Z(g)$$

$Z(f^{2}+g^{2})=Z(f)\cap Z(g)$

از این رو $Z(X)$ تحت اشتراک و اجتماع متناهی بسته است. علاوه بر این $Z(X)$ تحت اشتراک شما را نیز بسته می‌باشد، اثبات این موضوع و مطالب دیگر در مورد صفر مجموعه‌ها را خواننده می‌تواند در مرجع [۲۹] ببیند. اگر I یک ایدآل در $C(X)$ باشد و $f\in C(X)$، گاهی ممکن است که $Z(f)=Z(g)$ و $g\in I$ ولی $f\notin I$، مثلاً اگر تابع همانی $i\in C(R)$ و ایدآل اصلی $I=(i)$ را در $C(R)$ در نظر بگیریم، آن‌گاه $Z(i^{1/3})=Z(i)=\{0\}$، $i\in I$ ولی $i^{1/3}\notin I$. در صورتی که از $Z(f)=Z(g)$ و $g\in I$ بتوان نتیجه گرفت $f\in I$، آن‌گاه ایدآل I را یک z- ایدآل می‌نامیم. به سادگی می‌توان دید که این تعریف با تعریف جبری ۱-۲ معادل است. با کمک این تعریف توپولوژیکی، این ویژگی حلقهٔ $C(X)$ که مجموع هر دو z- ایدآل یک z- ایدآل است به سادگی به‌دست می‌آید. این ویژگی ابتدا در مرجع [۲۹] با کمک فشرده‌سازی استون- چک به اثبات رسیده و سپس با یک روش ساده و ابتدایی در مرجع [۳۲] اثبات شد. ویژگی‌های مهم دیگر $C(X)$ در ارتباط با z- ایدآل‌ها و ایدآل‌های اول که در مراجع [۳، ۴، ۵ و ۲۹] مطرح شده‌اند به شرح زیر هستند.

۲-۱ قضیه: (الف) ایدآل‌های اول شامل یک ایدآل اول، تشکیل یک زنجیر می‌دهند.

(ب) یک z- ایدآل، اول است اگر و تنها اگر شامل یک ایدآل اول باشد.

(پ) اگر I یک z- ایدآل (ایدآل اول) در $C(X)$ باشد و $f^{2}+g^{2}\in I$، آن‌گاه $f,g\in I$.

از ویژگی‌های جالب دیگر در حلقهٔ $C(X)$، اول بودن مجموع دو ایدآل اول است که که ابتدا توسط کهلز مطرح شد و سپس در مرجع [۳۲] کمی کلی‌تر نتیجهٔ زیر به اثبات رسید.

۲-۲ گزاره: (الف) اگر I و J دو ایدآل نیم-اول در $C(X)$ باشند، آن‌گاه $I+J$ نیز نیم-اول است و یا $I+J=C(X)$.

(ب) اگر دو ایدآل I و J در $C(X)$ به ترتیب اول و نیم- اول باشند، آن‌گاه $I+J$ اول است و یا $I+J=C(X)$.

با کمک این گزاره، برای هر دو ایدآل I و J در $C(X)$ خواهیم داشت $\sqrt{I+J}=\sqrt{I}+\sqrt{J}$. بعد از آن با کمک این گزاره و مفهوم بزرگ‌ترین z- ایدآل مشمول در یک ایدآل، نتیجهٔ زیر در مرجع [۱۳] به اثبات رسید که حاصل پیوند z- ایدآل‌ها و ایدآل‌های اول در $C(X)$ را نشان می‌دهد.

۲-۳ گزاره: (الف) مجموع دو ایدآل اول در $C(X)$ که در یک زنجیر نباشند یا یک z- ایدآل اول است و یا برابر با $C(X)$ می‌باشد.

(ب) مجموع یک ایدآل اول و یک z- ایدآل در $C(X)$ که در یک زنجیر نباشند، یا همهٔ $C(X)$ است و یا یک z- ایدآل اول می‌باشد.

اکنون با استفاده از مفهوم صفر مجموعه، برای هر $f\in C(X)$، یک نمایش توپولوژیکی برای M_f به صورت $M_f=\{g\in C(X):Z(f)\subseteq Z(g)\}$ می‌توان بیان کرد. به این ترتیب با استفاده از این نمایش توپولوژیکی به سادگی خواهیم دید که گردایهٔ $\{M_f:f\in C(X)\}$ تحت جمع، ضرب و اشتراک بسته است.

۲-۴ گزاره: اگر $f,g\in C(X)$، آن‌گاه

(الف) $M_fM_g=M_f\bigcap M_g=M_{fg}$.

(ب) $M_f + M_g = M_{f^2+g^2}$.

از این رو با کمک این موضوع و قضیهٔ ۱–۱۰، برای هر ایدآل I در $C(X)$، I^z وجود دارد و اضافه بر نمایش‌های جبری $I_z = \sum_{f\in I} M_f$ و $I^z = \sum_{M_f \subseteq I} M_f$ می‌توان نمایش‌های توپولوژیکی $I_z = \{g \in C(X) : \exists f \in I \ni Z(f) \subseteq Z(g)\}$ و $I^z = \{g \in C(X) : Z(g) \subseteq Z(f) \Rightarrow f \in I\}$ را نیز به‌دست آورد. علاوه براین، بنا به قضیهٔ ۱–۱۰، برای هر دو ایدآل I و J در $C(X)$ خواهیم داشت $(I+J)_z = I_z + J_z$. قبلاً دیدیم که برابری قسمت (ت) در گزارهٔ ۱–۴ در هر حلقه‌ای درست نیست، ولی در $C(X)$ با کمک این نمایش‌های توپولوژیکی می‌توان این برابری را اثبات کرد.

۲–۵ گزاره: اگر I و J دو ایدآل در $C(X)$ باشند، آن‌گاه $(I \cap J)_z = I_z \cap J_z = I_z J_z = (IJ)_z$.

در بخش قبل مثال‌هایی از z– ایدآل‌ها را در حلقه‌ها دیدیم و همان‌طور که پیش‌تر گفتیم با کمک ویژگی‌های توپولوژیکی $C(X)$ می‌توان z– ایدآل‌های فراوانی معرفی کرد. مثلاً برای هر $x \in X$، ایدآل‌های

$C_F(X) = \{f \in C(X) :$ متناهی است $X \setminus Z(f)\}$

$C_K(X) = \{f \in C(X) :$ فشرده است $\overline{X \setminus Z(f)}\}$

$O_x = \{f \in C(X) : x \in \operatorname{int}_X Z(f)\}$

و ایدآل‌های اول مینیمال در $C(X)$ مثال‌های دیگری از z– ایدآل‌ها می‌باشد. همچنین اگر I یک z– ایدآل در یک حلقهٔ کاهشی R باشد و $S \subseteq R$، آن‌گاه ایدآل خارج قسمتی $(I:S) = \{a \in R : aS \subseteq I\}$ نیز یک z– ایدآل است. عکس این موضوع درست نیست، در واقع اگر $(I:S)$ یک z– ایدآل باشد، I ممکن است حتی نیم- اول هم نباشد. این موضوع و بسیاری از موارد دیگر مانند نادرستی عکس قسمت (ب) در گزارهٔ ۱–۴، نادرستی عکس قسمت (الف) و نابرابری در قسمت (پ) در گزاره ۱–۱۱ با کمک ویژگی‌های برتر حلقهٔ $C(X)$، در [۲۵] نشان داده شده‌اند.

پیش‌تر دیدیم که اگر P یک ایدآل اول در یک حلقهٔ R و P^z وجود داشته باشد، آن‌گاه P^z نیز اول است. اول بودن یا نبودن P_z در هر حلقه‌ای تاکنون معلوم نشده است، ولی اگر P یک ایدآل اول در $C(X)$ باشد، آن‌گاه P_z یک z– ایدآل شامل ایدآل اول P است و بنا به قضیهٔ ۲–۱، P_z اول است. گرچه بسیاری از نتایج پیشین در خصوص ایدآل‌های حلقهٔ $C(X)$ هم درست نیست، ولی وقتی که ایدآل‌ها را اول فرض کنیم موضوع متفاوت خواهد بود. قضیهٔ زیر که در مرجع [۲۵] اثبات شده است به چند مورد اشاره می‌کند.

۲–۶ قضیه: فرض می‌کنیم P و Q دو ایدآل اول و I یک z– ایدآل در $C(X)$ باشد. در این صورت،

(الف) $(P+Q)^z = P^z + Q^z$ و

$(I+P)^z = I^z + P^z$.

(ب) اگر $P^z \subseteq Q^z$، آن‌گاه Q و P تشکیل زنجیر می‌دهند.

(پ) هرگاه $P_z \subseteq Q^z$، آن‌گاه $P \subseteq Q$.

(ت) اگر $P \subseteq Q$، آن‌گاه P و Q^z در یک زنجیر قرار دارند، همچنین P^z و Q نیز تشکیل زنجیر می‌دهند.

(ث) اگر $P_z \subseteq Q_z$ ، آن‌گاه Q و P لزوماً در یک زنجیر نیستند.

۳- $\sqrt{z}$ - ایدآل‌ها در حلقهٔ $C(X)$

در بخش ۱ دیدیم که هر ایدآل اول مینیمال روی یک z– ایدآل در هر حلقه‌ای یک z– ایدآل است ولی عکس آن درست نیست. در مراجع [۱۲ و ۱۴] به دو روش

متفاوت نشان داده شد که عکس این موضوع در $C(X)$ نیز درست است. در صورتی که هر ایدآل اول مینیمال روی یک ایدآل I در یک حلقهٔ R، z- ایدآل باشد، آن‌گاه ایدآل I یک $\sqrt{z}$ - ایدآل نامیده می‌شود، [۱۲]. وقتی هر ایدآل اول مینیمال روی ایدآل I یک z– ایدآل باشد، آن‌گاه اشتراک آن‌ها؛ یعنی، $\sqrt{I}$ یک z– ایدآل است و در صورتی که $\sqrt{I}$ یک z– ایدآل باشد، آن‌گاه بنا به قضیهٔ ۱– ۶، هر ایدآل اول مینیمال روی $\sqrt{I}$ و در نتیجه روی I یک z– ایدآل خواهد بود. به این ترتیب $\sqrt{z}$ - ایدآل بودن ایدآل I همان z– ایدآل بودن $\sqrt{I}$ است. با کمک قضیهٔ زیر که در مرجع [۱۲] اثبات شده است، معادل بودن دو واژهٔ "z– ایدآل" و " $\sqrt{z}$ - ایدآل" در $C(X)$ به سادگی به‌دست می‌آید.

۱-۳ قضیه: فرض می‌کنیم I یک ایدآل در $C(X)$ باشد. در این صورت اگر $f \in C(X)$ و $M_f \subseteq \sqrt{I}$، آن‌گاه $M_f \subseteq I$.

از قضیهٔ ۳–۱ نتیجه می‌شود که برای هر دو ایدآل I و J در $C(X)$، اگر J یک z– ایدآل باشد و $J \subseteq \sqrt{I}$، آن‌گاه $J \subseteq I$. همچنین با استفاده از این قضیه خواهیم داشت

$$\left\{M_f : M_f \subseteq I\right\} = \left\{M_f : M_f \subseteq \sqrt{I}\right\}$$

و از آن‌جا که برای هر $n \in N$، داریم $M_{f^n} = M_f$، پس $\{M_f : f \in I\} = \left\{M_f : f \in \sqrt{I}\right\}$. این نشان می‌دهد که $\sum_{M_f \subseteq I} M_f = \sum_{M_f \subseteq \sqrt{I}} M_f$ و $\sum_{f \in I} M_f = \sum_{f \in \sqrt{I}} M_f$ و به این ترتیب نتایج زیر به سادگی به‌دست می‌آید.

۲-۳ نتیجه: فرض می‌کنیم I یک ایدآل در $C(X)$ باشد. در این صورت

(الف) $\left(\sqrt{I}\right)_z = I_z$ و $\left(\sqrt{I}\right)^z = I^z$.

(ب) $\sqrt{I}$ یک z– ایدآل است اگر و تنها اگر I یک z– ایدآل باشد.

نتیجهٔ ۳–۲ در واقع نشان می‌دهد که دو واژهٔ "z– ایدآل" و " $\sqrt{z}$ -ایدآل" در $C(X)$ یکی است. به عبارت دیگر، با کمک این نتایج در $C(X)$ به سادگی می‌توان نشان داد که هر ایدآل اول مینیمال روی یک ایدآل I یک z– ایدآل است اگر و تنها اگر I یک z– ایدآل باشد. در صورتی که هر ایدآل اول مینیمال روی I یک z– ایدآل باشد، آشکارا $\sqrt{I}$ یک z– ایدآل خواهد بود که بنا به نتیجهٔ ۳–۲، I نیز یک z– ایدآل است. به عکس اگر I یک z– ایدآل و P یک ایدآل اول مینیمال روی I باشد، آن‌گاه $I = I^z \subseteq P^z \subseteq P$ و چون P مینیمال روی I و P^z اول است، پس $P = P^z$؛ یعنی، P یک z– ایدآل است.

پیش‌تر دیدیم که مجموع یک z– ایدآل و یک ایدآل اول که در یک زنجیر نباشند، یا یک z– ایدآل است و یا برابر با همهٔ $C(X)$ می‌باشد. با استفاده از نتایج این بخش، این موضوع در مرجع [۱۲] به شرح زیر تعمیم داده شده است.

۳–۳ قضیه: مجموع یک z– ایدآل و یک ایدآل اولیه در $C(X)$ که در یک زنجیر نیستند، یا یک z– ایدآل اول است و یا برابر با همهٔ $C(X)$ می‌باشد.

سرانجام مشابه نتایجی که در بخش‌های قبل در خصوص ارتباط ایدآل‌های اول و z– ایدآل‌ها ارائه شد، ارتباط‌هایی بین z– ایدآل‌ها و ایدآل‌های اولیهٔ $C(X)$ در مرجع [۱۲] به شرح زیر به‌دست آمده است.

۳–۴ گزاره: فرض می‌کنیم Q یک ایدآل اولیه در $C(X)$ باشد. در این صورت

(الف)– Q_z و Q^z ایدآل‌های اول هستند.

(ب) عنصر یکتای $x \in \beta X$ وجود دارد که $O^x \subseteq Q \subseteq M^x$.

(پ) اگر $\sqrt{Q}$ ماکسیمال (مینیمال) باشد، آن‌گاه Q نیز ماکسیمال (مینیمال) است.

۳-۵ گزاره: (الف) اگر I یک ایدآل، Q یک ایدآل اولیه در $C(X)$ و $I \bigcap Q$ یک z– ایدآل باشد، آن‌گاه I یک z– ایدآل است و Q یک z– ایدآل اول می‌باشد. در صورتی که I هم اولیه و $I \bigcap Q$ یک z– ایدآل باشد، آن‌گاه I و Q هردو z– ایدآل اول هستند.

(ب) اگر I و J دو ایدآل اولیه در $C(X)$ باشند به گونه‌ای که $\sqrt{I}$ و $\sqrt{J}$ تشکیل زنجیر ندهند، آن‌گاه $I + J$ یک z– ایدآل اول است و یا برابر با همهٔ $C(X)$ می‌باشد.

(پ) هر z– ایدآل تجزیه‌پذیر با تجزیهٔ اولیهٔ مینیمال در $C(X)$، اشتراک تعداد متناهی از z– ایدآل‌های اول است.

(ت) اگر I و J دو ایدآل تجزیه‌پذیر با تجزیهٔ اولیهٔ مینیمال در $C(X)$ باشند، آن‌گاه $(I+J)^z = I^z + J^z$.

۴- z- ایدآل‌های شمارا تولید شده در حلقهٔ $C(X)$

ابتدا یادآور می‌شویم که ایدآل‌های ماکسیمال $C(X)$ به صورت $M^p = \{f \in C(X) : p \in cl_{\beta X} Z(f)\}$، $p \in \beta X$ هستند که βX فشردهٔ استون- چک فضای X می‌باشد. برای هر $p \in \beta X$، ایدآل O^p نیز به‌صورت $O^p = \{f \in C(X) : p \in \operatorname{int}_{\beta X} cl_{\beta X} Z(f)\}$ تعریف می‌شود. برای هر $A \subseteq \beta X$، ایدآل‌های M^A و O^A نیز به صورت $M^A = \bigcap_{p \in A} M^p$ و $O^A = \bigcap_{p \in A} O^p$ می‌باشند. وقتی $A \subseteq X$ یا $P \in X$، آن‌گاه این ایدآل‌ها با M_p، O_p، M_A و O_A نمایش داده می‌شوند. برای هر ایدآل I در $C(X)$، قرار می‌دهیم $\theta(I) = \{p \in \beta X : I \subseteq M^p\}$، در واقع $\theta(I) = \bigcap_{f \in I} cl_{\beta X} Z(f)$ و به این ترتیب $I \subseteq M^p$ اگر و تنها اگر $p \in \theta(I)$. هر هیأت خارج قسمتی $C(X)/M^p$ شامل هیأت R می‌باشد که در واقع همان مجموعهٔ توابع ثابت است. در صورتی که $C(X)/M^p = R$، آن‌گاه ایدآل M^p و همین‌طور نقطهٔ p را حقیقی و در غیر این صورت ابرحقیقی می‌گوییم. اگر هر تابع $f \in C(X)$ را به عنوان تابعی از X به فشرده شدهٔ تک نقطه‌ای R؛ یعنی، $R^* = R \bigcup \{\infty\}$ تصور کنیم، آن‌گاه یک توسیع $f^* : \beta X \to R^*$ خواهد داشت. در این صورت ابر حقیقی بودن یک ایدآل ماکسیمال M^p و یا نقطهٔ p معادل با وجود تابع $f \in C(X)$ است که $f^*(p) = \infty$ و یا معادل با این است که برای $n \in N$، $Z_n = \{x \in X : |f(x)| \geq n\}$ متعلق به $Z[M^p]$ باشد. همچنین می‌توان نشان داد که ایدآل ماکسیمال M در $C(X)$ حقیقی است اگر و تنها اگر $Z[M]$ تحت اشتراک شمارا بسته باشد. اثبات این واقعیت‌ها و همچنین زمینه‌های مربوط به مباحث این بخش را می‌توان جامع‌تر در مرجع [۲۹] مطالعه کرد.

ایدآل I در $C(X)$ (z- فیلتر F در $Z(X)$) را تولید شده توسط $A \subseteq C(X)$ ($A \subseteq Z(X)$) گوییم هرگاه I (F) کوچک‌ترین ایدآل (z- فیلتر) شامل A باشد. در صورتی که ایدآل I توسط یک مجموعهٔ شمارا تولید شده باشد، ایدآل I را شمارا تولید شده و یا دارای مولد شمارا می‌گوییم و اگر z– فیلتر $Z[I]$ توسط یک مجموعهٔ شمارا تولید شود، I را شمارا z– تولید شده می‌نامیم و یا می‌گوییم I دارای z– مولد شمارا است. در مورد ایدآل‌های شمارا تولید شده، نخست قضیهٔ زیر در مرجع [۱۵] مطرح و اثبات شده است.

۴-۱ قضیه: هر ایدآل شمارا تولید شده در $C(X)$ که در یک ایدآل ماکسیمال ابر حقیقی قرار داشته باشد، در 2^c ایدآل ماکسیمال ابر حقیقی قرار دارد.

به سادگی می‌توان دید که اگر ایدآل ماکسیمال M^p در $C(X)$ شامل یک ایدآل شمارا تولید شدهٔ I باشد به گونه‌ای که $p \notin cl_{\beta X} \bigcap Z[I]$، آن‌گاه M^p ابر حقیقی است. در حالت خاص اگر I شمارا تولید شده و $\bigcap Z[I]$ فشرده باشد، آن‌گاه هر ایدآل ماکسیمال آزاد شامل I ابر حقیقی است. این موضوع نشان می‌دهد که یک ایدآل آزاد واقع در یک ایدآل ماکسیمال یکتا، شمارا (z-) تولید شده نیست. در حالت خاص ایدآل‌های آزاد O^p و ایدآل‌های اول آزاد، مولد شمارا ندارند. در واقع با کمک قضیهٔ سادهٔ زیر، یک ایدآل ماکسیمال مولد شمارا دارد هرگاه با یک خود توان تولید شود.

۴-۲ قضیه: اگر F یک زیر مجموعهٔ بستهٔ X و z- ایدآل M_F دارای مولد شمارا باشد، آن‌گاه F باز است. در حالت خاص اگر ایدآل ماکسیمال M دارای مولد شمارا باشد، آن‌گاه $M = M_p$ که $p \in X$ یک نقطهٔ منفرد است؛ یعنی، M با یک خودتوان تولید می‌شود.

در مرجع [۱۵] ابتدا این واقعیت ثابت می‌شود که اگر $p \in X$ یک G_δ- نقطه و Z یک صفر مجموعه در $S = X \setminus \{p\}$ باشد، آن‌گاه $Z \bigcup \{p\}$ نیز یک صفر مجموعه در X است و سپس با کمک آن، قضیهٔ جالب و با اهمیت زیر به اثبات می‌رسد.

۴-۳ قضیه: z- ایدآل اول شمارا تولید شده‌ی غیر ماکسیمال در $C(X)$ وجود ندارد.

z- ایدآل‌های با مولد شمارا در $C(X)$ برای برخی از فضاهای توپولوژی مانند فضاهای فشرده، فشردهٔ موضعی، نرمال و شمارا نوع اول در مراجع [۱۶-۱۸] شناسایی شده‌اند. بقیهٔ نتایج این بخش از این سه مأخذ استخراج شده‌اند. پیش از پرداختن به این نتایج به مفهوم ایدآل خالص نیازمندیم. ایدآل I در حلقه را خالص می‌نامیم، هرگاه برای هر $f \in I$، تابع $g \in I$ موجود باشد که $f = fg$. این نوع ایدآل‌ها به صورت زیر شناسایی شده‌اند.

۴-۴ گزاره: فرض کنیم I یک ایدآل در $C(X)$ *باشد.*

(الف) I خالص است اگر و تنها اگر برای هر $f \in I$، عنصر $g \in I$ موجود باشد به گونه‌ای که $X \setminus Z(f)$ و $Z(g)$ کاملاً مجزا باشند.

(ب) اگر X نرمال باشد، آن‌گاه ایدآل I در $C(X)$ خالص است اگر و تنها اگر برای هر $f \in I$، عنصر $g \in I$ وجود داشته باشد که $Z(g) \subseteq \operatorname{int}_X Z(f)$.

در صورتی که $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $C(X)$ باشد که برای هر $n \in N$ داشته باشیم $Z(f_{n+1}) \subseteq \operatorname{int}_X Z(f_n)$، آن‌گاه به سادگی می‌توان نشان داد که ایدآل تولید شده توسط این دنباله، یک z- ایدآل است. همچنین می‌توان دید که هر ایدآل نیم- اول در $C(X)$ با مولد شمارا توسط یک دنباله $\{g_n\}$ تولید می‌شود که $(g_1) \subseteq (g_2) \subseteq \ldots \subseteq (g_n) \subseteq \ldots$. اکنون با کمک این موضوع و بحثی که پیش از قضیهٔ ۴-۲ داشتیم، می‌توان به نتیجهٔ زیر دست یافت.

۴-۵ قضیه: فرض کنیم X یک فضای شمارای نوع اول (فشردهٔ موضعی) باشد. در این صورت هر z- ایدآل با مولد شمارا در $C(X)$ دارای یک مولد شمارای $\{f_n\}$ است به گونه‌ای که برای هر $n \in N$، $Z(f_{n+1}) \subseteq \operatorname{int}_X Z(f_n)$.

اکنون با استفاده از این قضیه و گزارهٔ ۴-۴، ایدآل‌های شمارا تولید شده در $C(X)$، *وقتی* X نرمال و

شمارای نوع اول (یا نرمال و فشردهٔ موضعی) است به شرح زیر شناسایی خواهند شد.

۴-۶ نتیجه: اگر فضای X نرمال و شمارای نوع اول (فشرده موضعی) باشد، در این صورت هر z– ایدآل با مولد شمارا در $C(X)$ خالص است.

سرانجام در مراجع [۱۷ و ۱۸] نشان داده شد که هر ایدآل خالص در $C(X)$ به صورت O^A است که $A \subseteq \beta X$ یک صفر مجموعه در βX می‌باشد. با توجه به این موضوع و نتیجهٔ ۴-۶، در قضیهٔ زیر، z– ایدآل‌های شمارا تولید شده در $C(X)$ برای فضاهای نرمال و شمارای نوع اول (فشرده موضعی) به گونه‌ای آشکارتر شناسایی می‌شوند.

۴-۷ قضیه: اگر X یک فضای نرمال و شمارای نوع اول (فشرده موضعی) باشد، آن‌گاه هر z– ایدآل در $C(X)$ با مولد شمارا به صورت O^A است که A یک صفر مجموعه در βX می‌باشد.

در مراجع [۳ و ۴] فضاهای توپولوژی X به گونه‌ای معرفی شده‌اند که در $C(X)$، z– ایدآل‌های با مولد شمارا وجود دارند که خالص و یا به صورت O^A نیستند.

۵- z – ایدآل‌های نسبی در $C(X)$

قبل از آن که به سراغ نوع قوی‌تری از z – ایدآل‌ها؛ یعنی، z° – ایدآل‌ها برویم، به z – ایدآل‌های ضعیف‌تری می‌پردازیم که تاکنون مورد مطالعه قرار نگرفته‌اند. وقتی z – ایدآل‌ها را در یک حلقه و یا در $C(X)$ تعریف می‌کنیم، به طور طبیعی می‌توان این تعریف را به یک ایدآل حلقه به جای همهٔ حلقه محدود کرد. به عبارتی اگر J یک ایدآل در $C(X)$ و I زیر ایدآل J باشد، آن‌گاه I را در J یک z– ایدآل می‌نامیم هرگاه اگر $g \in J$، $f \in I$ و $Z(f) \subseteq Z(g)$، آن‌گاه $g \in I$. با چنین شرایطی، I را یک z_J – ایدآل می‌گوییم. آشکارا هر ایدآل I خود یک z_I – ایدآل است و هر z- ایدآل I در $C(X)$، به ازای هر ایدآل J شامل I، یک z_J – ایدآل می‌باشد. در صورتی که ایدآل J موجود باشد که $I \subset J$، $I \neq J$ و I یک z_J – ایدآل باشد، می‌گوییم I یک z – ایدآل نسبی است و به اختصار I را یک rez – ایدآل می‌نامیم.

با استفاده از تعریف، به سادگی می‌توان دید که اگر J یک z– ایدآل در $C(X)$ و $I \subseteq J$ یک z_J– ایدآل باشد، آن‌گاه I نیز یک z – ایدآل است. اینک با توجه به این موضوع، اگر ایدآل J یک z – ایدآل نباشد، نخستین پرسشی که مطرح است این است که آیا یک z_J–ایدآل I وجود دارد که z–ایدآل نباشد؟ پرسش‌های متعدد دیگری در ارتباط با z– ایدآل‌های نسبی نیز مطرح‌اند، مثلاً، آیا هر ایدآل می‌تواند یک rez– ایدآل باشد؟ آیا مجموع هر دو z_J– ایدآل همواره یک z_J– ایدآل است؟ و بالاخره آیا مجموع هر دو rez– ایدآل یک rez – ایدآل می‌باشد؟ پیش از آن که به این پرسش‌ها پاسخ دهیم، تعریف‌های معادل دیگری از z – ایدآل‌های نسبی به شرح زیر ارائه می‌دهیم که با استفاده از تعریف، به سادگی به‌دست می‌آیند.

۵-۱ گزاره: فرض کنیم I و J دو ایدآل در $C(X)$ هستند که $I \subseteq J$. در این صورت عبارت‌های زیر معادلند.

(الف) I یک z_J – ایدآل است.

(ب) $I_z \bigcap J = I$.

(پ) z – ایدآل K در $C(X)$ وجود دارد که $K \bigcap J = I$.

همان‌گونه که در هر ایدآلی، z - ایدآل‌های متعدد یافت می‌شود، برای هر ایدآل J، z_J - ایدآل غیربدیهی وجود دارد. این موضوع در گزارهٔ زیر به طور دقیق بیان شده که پاسخ پرسش اول است.

۵-۲ گزاره: فرض کنیم J یک ایدآل در $C(X)$ باشد که z - ایدآل نیست. در این صورت ایدآل $I \subset J$، $I \neq J$ وجود دارد که z_J - ایدآل است ولی z - ایدآل نیست.

در حقیقت چون J یک z - ایدآل نیست، $k \in J$ و $h \in C(X)$ موجودند که $Z(h) = Z(k)$ و $h \notin J$. در این صورت کافی است $g \in C(X)$ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $Z(g) \bigcap Z(h) = \phi$ و قرار دهیم $I = M_g \bigcap J$. پاسخ پرسش بعدی از مثال‌های زیر استخراج می‌شود، پیش از آن یادآور می‌شویم که یک ایدآل در یک حلقه را اساسی گوییم هرگاه هر ایدآل ناصفر را در غیر از صفر قطع کند. ایدآل‌های اساسی $C(X)$ به طور توپولوژیکی در مراجع [۳۳ و ۳۴] شناسایی شده‌اند. در این دو مأخذ ثابت شده است که ایدآل E در $C(X)$ اساسی است اگر و تنها اگر $\operatorname{int}_X \bigcap Z[E] = \operatorname{int}_X \bigcap_{f \in E} Z(f) = \phi$.

۵- ۳ مثال: هر ایدآل غیر اساسی در $C(X)$ یک rez - ایدآل است. در واقع اگر I غیراساسی باشد، آن‌گاه ایدآل K وجود دارد که $I \bigcap K = (\circ)$ و به این ترتیب کافی است قرار دهیم $J = I + k$. پیداست که $I \subset J$ و $I \neq J$ و به سادگی دیده می‌شود که I یک z_J - ایدآل است. به عنوان مثالی دیگر، اگر P و Q را دو ایدآل اول در $C(X)$ در نظر بگیریم که Q یک z - ایدآل باشد ولی P یک z - ایدآل نباشد، آن‌گاه مطابق قضیهٔ ۱-۸ و گزارهٔ ۵-۱، $I = P \bigcap Q$ یک z_P - ایدآل است که z - ایدآل نیست و $I \neq P$. سرانجام به سادگی خواهیم دید که ایدآل اصلی (f) در $C(X)$ یک rez - ایدآل است اگر و تنها اگر $Ann(f) \neq (\circ)$ و یا $\operatorname{int}_X Z(f) \neq \phi$؛ یعنی، اگر و تنها اگر (f) یک ایدآل غیر اساسی باشد. پیش از این دیدیم که هر ایدآل غیراساسی یک rez - ایدآل است و در صورتی که (f) یک rez - ایدآل باشد، در مرجع [۲۵] ثابت شده که $\operatorname{int}_X Z(f) \neq \phi$؛ یعنی (f) یک ایدآل غیراساسی است. به این ترتیب، این مثال نشان می‌دهد که هر ایدآلی لزوماً یک rez - ایدآل نیست و علاوه بر آن نتیجهٔ زیر که شناسایی جبری تقریبا" P - فضاهاست به‌دست می‌آید. فضای X را تقریبا" P - فضا می‌نامیم هرگاه هر G_δ - مجموعهٔ ناتهی دارای درون ناتهی باشد. برای آگاهی از ویژگی‌های بیش‌تر این فضاها، خواننده می‌تواند به [۳۵، ۳۶ و ۳۷] مراجعه نماید.

۵- ۴ نتیجه: هر ایدآل اصلی در $C(X)$ یک rez - ایدآل است اگر و تنها اگر X تقریباً P - فضا باشد.

دو مفهوم " z - ایدآل" و" rez - ایدآل " در مورد ایدآل‌های اول $C(X)$ یکسانند. علاوه بر آن اگر I یک z_J - ایدآل باشد، آن‌گاه هر ایدآل اولی که z - ایدآل نیست و شامل I است، شامل J نیز هست. در حالت خاص اگر P یک ایدآل اول باشد ولی z - ایدآل نباشد و ایدآل I یک z_P - ایدآل باشد، آن‌گاه P بزرگ‌ترین عنصر مجموعهٔ $\{J$: یک z_J - ایدآل است $I\}$ خواهد بود. با کمک این موضوع و گزارهٔ ۵-۱، به سادگی دیده می‌شود که اگر I یک rez - ایدآل باشد، آن‌گاه $\sqrt{I}$ نیز یک rez - ایدآل می‌باشد. برای هر ایدآل نیم اول Q همیشه بزرگ‌ترین ایدآل J وجود دارد که Q یک z_J - ایدآل باشد. نه تنها برای ایدآل‌های نیم- اول، بلکه برای هر ایدآل $C(X)$، وقتی X یک F - فضا باشد نیز این پدیده رخ می‌دهد. اثبات این واقعیت‌ها را خواننده

می‌تواند در مرجع [۲۵] مطالعه کند. نتایج زیر نیز به سادگی با استفاده از تعریف و گزارهٔ ۵–۱ به‌دست می‌آید.

۵–۵ گزاره: فرض کنیم A، B، I، J، K و I_α برای هر $\alpha \in S$ ایدآل‌هایی در $C(X)$ باشند، در این صورت:
(الف) اگر $I \subseteq J \subseteq K$ و I یک z_K– ایدآل باشد، آن‌گاه I یک z_J– ایدآل نیز هست.
(ب) اگر $I \subseteq J \subseteq K$، I یک z_J– ایدآل و J یک z_K– ایدآل باشد، آن‌گاه I یک z_K– ایدآل است.
(پ) اگر $\sqrt{I} \subseteq J$ و I یک z_J– ایدآل باشد، آن‌گاه $I = \sqrt{I}$. در حالت خاص اگر I یک $z_{\sqrt{I}}$– ایدآل باشد، آن‌گاه $I = \sqrt{I}$.
(ت) اگر $I \subseteq J$ و I یک z_J – ایدآل باشد، آن‌گاه $\sqrt{I}$ یک $z_{\sqrt{J}}$– ایدآل است.
(ث) اگر $A \subseteq J$، $A, B \subseteq K$ یک z_J– ایدآل و B یک z_K– ایدآل باشد، آن‌گاه $A \bigcap B$ یک $z_{J \bigcap K}$– ایدآل است.
(ج) هرگاه برای هر $\alpha \in S$، $I_\alpha \subseteq J$ و I_α یک z_J– ایدآل باشد، آن‌گاه $\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha$ یک z_J– ایدآل است.

قسمت (ج) در گزارهٔ بالا در واقع نشان می‌دهد که اگر $I \subseteq J$، آن‌گاه کوچک‌ترین z_J– ایدآل شامل I وجود دارد که آن را با I_{z_J} نمایش می‌دهیم. به راحتی می‌توان دید که I_{z_J} چیزی جزء $I_z \bigcap J$ نیست. بزرگ‌ترین z_J– ایدآل در I نیز در صورت وجود با I^{zJ} نمایش داده می‌شود. آشکارا وقتی مجموع هر دو z_J– ایدآل یک z_J– ایدآل باشد، آن‌گاه I^{zJ} وجود دارد. عکس این موضوع نیز درست است و با توجه به این شرایط جبری فضای X را می‌توان شناسایی کرد. نخست می‌توان نشان داد که اگر J یک ایدآل در $C(X)$ باشد، آن‌گاه برای هر دو z– ایدآل I و K برابری $(I+K)\bigcap J = I \bigcap J + K \bigcap J$ معادل با وجود I^{zJ} و همچنین معادل است با این که مجموع هر دو z_J– ایدآل در $C(X)$ یک z_J– ایدآل باشد. سپس با اثباتی مشابه لم ۳–۱ را در مرجع [۳۲] می‌توان دید که برای هر ایدآل مطلقاً محدب J و برای هر دو z– ایدآل I و K داریم $J \bigcap (I+K) = J \bigcap I + J \bigcap K$ و در صورتی که این برابری برقرار بوده و J یک ایدآل محدب باشد، حتماً مطلقاً محدب است. سرانجام با توجه به این که هر ایدآل $C(X)$ مطلقاً محدب است اگر و تنها اگر X یک F– فضا باشد، ثابت می‌شود که فضای X یک F– فضا است اگر و تنها اگر به ازای هر ایدآل J در $C(X)$، مجموع هر دو z_J– ایدآل یک z_J– ایدآل باشد.

۵–۶ قضیه: گزاره‌های زیر معادل هستند.
(الف) برای هر ایدآل J در $C(X)$ و برای هر دو z– ایدآل I و K داریم $(I+K)\bigcap J = I \bigcap J + K \bigcap J$.
(ب) برای هر ایدآل J در $C(X)$، مجموع هر دو z_J– ایدآل یک z_J– ایدآل است.
(پ) برای هر ایدآل J و هر زیر ایدآل I از J، I^{zJ} وجود دارد و $I^{zJ} = \sum_{M_f \bigcap J \subseteq I} M_f \bigcap J$.
(ت) X یک F– فضاست.

در صورتی که X یک P– فضا باشد، آن‌گاه هر ایدآل $C(X)$ یک z– ایدآل است و طبعاً هر ایدآل $C(X)$ یک *rez*– ایدآل نیز هست و در نتیجه مجموع هر دو *rez*– ایدآل در $C(X)$ یک *rez*– ایدآل می‌باشد. اکنون اگر مجموع هر دو *rez*– ایدآل در $C(X)$ یک *rez*– ایدآل باشد و X یک P– فضا نباشد، آن‌گاه ایدآل اول P در $C(X)$ وجود دارد که z– ایدآل نیست. در این صورت با در نظر گرفتن دو ایدآل ماکسیمال M و M' با ویژگی $M + M' = C(X)$، می‌توان دو z_p– ایدآل $I = P \bigcap M$ و $K = P \bigcap M'$ را ساخت که

مجموع آن‌ها rez- ایدآل نمی‌باشد و بالاخره به نتیجهٔ زیر دست یافت.

۵-۷ قضیه: گزاره‌های زیر معادل هستند:

(الف) X یک P- فضاست.

(ب) هر ایدآل در $C(X)$ یک rez- ایدآل است.

(پ) مجموع هر دو rez- ایدآل در $C(X)$ یک rez- ایدآل است.

۶- z°- ایدآل‌ها در حلقه‌های یکدار کاهشی

مبحث z°- ایدآل‌ها را نیز مانند z- ایدآل‌ها، ابتدا در حلقه‌های تعویض‌پذیر یکدار مطالعه می‌کنیم و خواهیم دید که شرط کاهشی را بی هیچ کاستی نیز می‌توان در نظر گرفت. اگر R یک حلقهٔ تعویض‌پذیر یکدار باشد، $Min(R)$ را گردایهٔ همهٔ ایدآل‌های اول مینیمال R در نظر می‌گیریم برای هر $a \in R$، اشتراک همهٔ ایدآل‌های اول مینیمال شامل a را با P_a نمایش می‌دهیم؛ یعنی، $P_a = \bigcap_{a \in p \in Min(R)} P$، نتایج زیر در ارتباط با این نماد به سادگی به‌دست می‌آید.

۶-۱ گزاره: اگر R یک حلقه باشد و $a,b,c \in R$، آن‌گاه عبارت‌های زیر برقرارند.

(الف) $P_a \cap P_b = P_{ab}$.

(ب) اگر $P_a \subseteq P_b$، آن‌گاه $P_{ac} \subseteq P_{bc}$.

(پ) برای هر $n \in N$، $P_{a^n} = P_a$.

(ت) $b \in P_a$ اگر و تنها اگر $P_b \subseteq P_a$.

ایدآل I در یک حلقهٔ R را z°- ایدآل می‌گوییم هرگاه برای هر $a \in I$ داشته باشیم $P_a \subseteq I$. با استفاده از این تعریف، هر ایدآل اول مینیمال یک z°- ایدآل می‌باشد و آشکارا اشتراک هر تعداد z°- ایدآل نیز یک z°- ایدآل است. از این رو برای هر عنصر a در حلقه، P_a یک z°- ایدآل می‌باشد که آن را z°- ایدآل پایه‌ای حلقه می‌نامیم. در حالت خاص $P_\circ$؛ یعنی، $rad(R)$ کوچک‌ترین z°- ایدآل در R است و هر z°- ایدآل در R شامل $rad(R)$ می‌باشد. از این رو ساختار z°- ایدآل‌های یک حلقهٔ R، همان ساختار z°- ایدآل‌های حلقهٔ $R/rad(R)$ می‌باشد و به همین سبب می‌توان فرض کرد $rad(R) = (\circ)$؛ یعنی، می‌توان حلقه را کاهشی تصور کرد. پیش از آن که به مطالب اصلی در ارتباط با z°- ایدآل‌ها بپردازیم، گزاره زیر را بیان می‌کنیم که در روند مطالعهٔ z°- ایدآل‌ها موثر و مفید است.

۶-۲ گزاره: (الف) هرگاه P یک ایدآل اول در یک حلقهٔ R باشد، در این صورت P مینیمال است اگر و تنها اگر برای هر $a \in P$، عنصر $b \notin P$ موجود باشد که $ab \in rad(R)$.

(ب) هرگاه P یک ایدآل اول در یک حلقهٔ کاهشی R باشد، آن‌گاه P مینیمال است اگر و تنها اگر برای هر $a \in P$، عنصر $b \notin P$ موجود باشد که $ab = \circ$. به عبارت دیگر، P مینیمال است اگر و تنها اگر برای هر $a \in P$، $Ann(a) \not\subseteq P$.

با استفاده از گزاره‌های بالا می‌توان نتیجه گرفت که در یک حلقهٔ R، $P_a \subseteq P_b$ اگر و تنها اگر $Ann(b) \subseteq Ann(a)$ و از این رو هر P_a به صورت $P_a = \{b \in R : Ann(a) \subseteq Ann(b)\}$ شناسایی می‌شود. به این ترتیب با استفاده از این موضوع، می‌توان تعریف‌های معادلی برای z°- ایدآل‌ها به شرح زیر ارائه داد.

۶-۳ گزاره: فرض کنیم R یک حلقهٔ کاهشی، I یک ایدآل در آن باشد و $a,b \in R$. در این صورت عبارت‌های زیر معادل هستند.

(الف) I یک z°- ایدآل است.

(ب) اگر $P_a \subseteq P_b$ و $b \in I$، آن‌گاه $a \in I$.

(پ) اگر $Ann(a) \subseteq Ann(b)$ و $a \in I$، آن‌گاه $b \in I$.

(ت) برای هر $a \in I$، $Ann(Ann(a)) \subseteq I$.

(ث) $I = \sum_{a\in I} P_a = \bigcup_{a\in I} P_a$.

مثال‌های متعددی از z- ایدآل‌ها وجود دارد که z°- ایدآل نیستند و هر z°- ایدآل در یک حلقه نیز لزوماً یک z- ایدآل نمی‌باشد. در واقع می‌توان ثابت کرد که هر z°- ایدآل در یک حلقه‌ی R یک z- ایدآل است اگر و تنها اگر $rad(R) = J(R)$ و در حالت خاص در یک حلقهٔ کاهشی، هر z°- ایدآل یک z- ایدآل است اگر و تنها اگر $J(R) = (\circ)$.

۶-۴ قضیه: اگر I یک z°- ایدآل در یک حلقهٔ کاهشی باشد، آن‌گاه هر ایدآل اول مینیمال روی I یک z°- ایدآل است.

به این ترتیب هر z°- ایدآل در یک حلقهٔ کاهشی با شرط $J(R) = (\circ)$ برابر با اشتراک z°- ایدآل‌های اول است. در مرجع [۲۴] ثابت شده است که عکس قضیهٔ ۶-۴ درست نیست. اثبات گزارهٔ زیر را نیز می‌توان در مرجع [۱۲] دید.

۶-۵ گزاره: فرض می‌کنیم I یک ایدآل و P یک ایدآل اول در حلقهٔ R باشد. هرگاه $I \bigcap P$ یک z°- ایدآل باشد، آن‌گاه یا I و یا P یک z°- ایدآل است. در حالت خاص اگر P و Q دو ایدآل اول در R باشند که تشکیل زنجیر ندهند و $P \bigcap Q$ یک z°- ایدآل باشد، آن‌گاه P و Q هر دو z°- ایدآل هستند.

در صورتی که I یک z°- ایدآل در یک حلقهٔ کاهشی R باشد و $I \neq R$، آن‌گاه عناصر I همگی مقسوم علیه صفر هستند؛ یعنی، I غیر عادی است، چرا که مطابق گزارهٔ ۶-۳، برای هر $a \in I$، داریم $Ann(Ann(a)) \subseteq I$. حال اگر a مقسوم علیه صفر نباشد، آن‌گاه $Ann(a) = (\circ)$ و بنابراین $R = Ann(Ann(a)) \subseteq I$ که با فرض تناقض دارد. ولی عکس این موضوع درست نیست؛ یعنی هر ایدآل غیر عادی لزوماً z°- ایدآل نمی‌باشد، حتی ممکن است یک ایدآل غیر عادی در یک z°- ایدآل قرار نداشته باشد. ولی در حلقه‌های با ویژگی A این وضعیت رخ می‌دهد. می‌گوییم حلقه دارای ویژگی A است هرگاه هر ایدآل غیر عادی متناهیاً تولید شده در آن دارای پوچساز ناصفر باشد. مانند قبل و کمی کلی‌تر، برای هر $A \subseteq R$، P_A را برابر با اشتراک همهٔ ایدآل‌های اول مینیمال شامل A در حلقهٔ R در نظر می‌گیریم. به سادگی می‌توان دید که اگر A و B دو زیر مجموعهٔ متناهی در حلقهٔ R باشند و $t \in R$، آن‌گاه $P_A \subseteq P_B$ اگر و تنها اگر $Ann(B) \subseteq Ann(A)$ و $t \in P_A$ اگروتنها اگر $Ann(A) \subseteq Ann(t)$. همچنین اگر $P_A \subseteq P_B$، آن‌گاه خواهیم داشت $P_{tA} \subseteq P_{tB}$. با کمک این حقایق، قضیهٔ زیر در مرجع [۲۵] ثابت شده و اثباتی دیگر با روشی متمایز در مرجع [۲۱] و با استفاده از مفاهیم نظریه مجموعه‌ها ارائه شده است.

۶-۶ قضیه: اگر R یک حلقهٔ کاهشی با ویژگی A باشد، آن‌گاه هر ایدآل غیر عادی آن در یک z° - ایدآل شامل I می‌باشد.

علاوه بر این، در یک حلقهٔ کاهشی با ویژگی A نتایج زیر معادل هستند.

۶-۷ قضیه: در یک حلقهٔ کاهشی R با ویژگی A، گزاره‌های زیر معادلند.

(الف) مجموع هر دو z° - ایدآل در یک ایدآل غیر عادی R، یک z° - ایدآل است.

(ب) برای هر ایدآل غیر عادی I در R، I° وجود دارد.

(پ) برای هر a و b در یک ایدآل غیر عادی R، $P_{a+b} \subseteq P_a + P_b$.

(ت) برای هر دو ایدآل I و J، اگر $I+J$ غیر عادی باشد، آن‌گاه $(I+J)_\circ = I_\circ + J_\circ$.

در صورتی که یکی از شرایط بالا برقرار باشد، آن‌گاه برای هر ایدآل غیر عادی I در R داریم

$$I_\circ = \sum_{a \in I} P_a \text{ و } I^\circ = \sum_{P_a \subseteq I} P_a.$$

این بخش را با دو نتیجهٔ دیگر به پایان می‌رسانیم که در مرجع [۲۵] اثبات شده‌اند.

۶-۸ گزاره: اگر R یک حلقهٔ کاهشی، I و J دو ایدآل در R و $I_\circ$ و $J_\circ$ موجود باشند، آن‌گاه $(IJ)_\circ = (I \cap J)_\circ \subseteq I_\circ \cap J_\circ$.

۶-۹ قضیه: در یک حلقهٔ کاهشی R، گزاره‌های زیر معادل هستند.

(الف) ضرب هر دو z° - ایدآل در R یک z° - ایدآل است.

(ب) اگر I و J دو ایدآل در R و $I_\circ$ و $J_\circ$ موجود باشند، آن‌گاه $I_\circ \cap J_\circ = IJ_\circ$.

(پ) برای هر $a,b \in R$، $P_a P_b = P_{ab}$.

(ت) برای هر دو ایدآل I و J در R، اگر I° و J° وجود داشته باشند، آن‌گاه $I^\circ J^\circ = I^\circ \cap J^\circ$.

۷- z° - ایدآل‌ها در حلقهٔ C(X)

به لحاظ ویژگی‌های فراوان حلقه‌ی $C(X)$، ایدآل‌ها در این حلقه شخصیت بارزی دارند، به خصوص این که می‌توان از خواص توپولوژیکی فضای X برای شناسایی این ایدآل‌ها هم استفاده کرد. پیش‌تر دیدیم ایدآل‌هایی که هم به صورت جبری و هم به صورت توپولوژیکی قابل شناسایی باشند، نشان از اهمیت آن‌هاست. z° - ایدآل‌ها نیز مانند z - ایدآل‌ها در $C(X)$ از این ویژگی برخوردارند. شخصیت توپولوژیکی z°-ایدآل‌ها از آنجا ناشی می‌شود که برای هر $f,g \in C(X)$، $Ann(f) \subseteq Ann(g)$، اگر و تنها اگر $\operatorname{int}_X Z(f) \subseteq \operatorname{int}_X Z(g)$. اینک با استفاده از این موضوع، برای هر $f \in C(X)$، می‌توان z° - ایدآل‌های پایه‌ای را به صورت توپولوژیکی، یعنی به صورت

$$P_f = \{g \in C(X) : \operatorname{int}_X Z(f) \subseteq \operatorname{int}_X Z(g)\}$$

شناسایی کرد. حال با کمک گزارهٔ ۶-۳، می‌توان تعریفی توپولوژیکی برای z° - ایدآل‌ها ارائه داد به این ترتیب که ایدآل I در $C(X)$ یک z° - ایدآل است هرگاه اگر $f \in I$، $g \in C(X)$ و $\operatorname{int}_X Z(f) \subseteq \operatorname{int}_X Z(g)$، آن‌گاه داشته باشیم $g \in I$. z° - ایدآل‌های پایه‌ای نیز مانند z - ایدآل‌های پایه‌ای در روابط زیر صدق می‌کنند.

۷-۱ گزاره: اگر $f,g \in C(X)$، آن‌گاه

$$P_{fg} = P_f \cap P_g = P_f P_g \text{ و } P_f + P_g = P_{f^2+g^2}.$$

از آن‌جا که حلقهٔ $C(X)$ دارای ویژگی A است، بنا به قضیهٔ ۶-۶، هر ایدآل غیر عادی $C(X)$ در یک z° – ایدآل قرار دارد، ولی با استفاده از گزارهٔ ۷- ۱، می‌توان کوچک‌ترین z° – ایدآل شامل ایدآل غیر عادی I در $C(X)$ را به‌دست آورد. در واقع $J=\sum_{f\in I}P_f$ کوچک‌ترین z° – ایدآل شامل I است؛ یعنی، $I_\circ=\sum_{f\in I}P_f$. به این ترتیب هر ایدآل ماکسیمال غیر عادی در $C(X)$ یک z° – ایدآل می‌باشد. کوچک‌ترین ایدآل شامل یک ایدآل غیر عادی I در $C(X)$ را نیز می‌توان به صورت توپولوژیکی به شرح زیر شناسایی کرد:

$$I_\circ=\{g\in C(X):\exists\ f\in I\ni \operatorname{int}_X Z(f)\subseteq \operatorname{int}_X Z(g)\}$$

اکنون نتایج زیر را می‌توان به راحتی نشان داد.

۷-۲ گزاره: فرض می‌کنیم I و J دو ایدآل غیر عادی، P یک ایدآل اول غیر عادی و Q یک ایدآل اولیه غیر عادی در $C(X)$ باشند. در این صورت .

(الف)- اگر $I\subseteq J$، آن‌گاه $I_\circ\subseteq J_\circ$.

(ب)- برای هر $n\in N$، $(I^n)_\circ=I_\circ$.

(پ)- $(IJ)_\circ=(I\cap J)_\circ\subseteq I_\circ\cap J_\circ=I_\circ J_\circ$.

(ت)- اگر $I+J$ نیز یک ایدآل غیر عادی باشد، آن‌گاه $(I+J)_\circ=(I_\circ+J_\circ)_\circ$.

(ث)- $\left(\sqrt{I}\right)_\circ=I_\circ$

(ج)- $P_\circ$ و $Q_\circ$ اول هستند.

از آن‌جا که $J(C(X))=(\circ)$، پس هر z°- ایدآل در $C(X)$ یک z– ایدآل می‌باشد. از این رو برای هر مقسوم‌علیه صفر $f\in C(X)$، z°- ایدآل پایه‌ای P_f یک z– ایدآل است. به این ترتیب چون $f\in P_f$، پس بنا به تعریف، $M_f\subseteq P_f$. در واقع P_f کوچک‌ترین z°- ایدآل شامل M_f است؛ یعنی، $(f)_\circ=(M_f)_\circ=P_f$. پیش‌تر دیدیم که اگر I یک z° – ایدآل در یک حلقهٔ کاهشی R باشد، ایدآل‌های اول مینیمال روی I نیز z° – ایدآل هستند. به عبارت دیگر هرگاه I یک z° – ایدآل باشد، آن‌گاه $\sqrt{I}$ نیز یک z°- ایدآل است. در صورتی که $\sqrt{I}$ یک z° – ایدآل باشد، I یک $\sqrt{z^\circ}$ – ایدآل نامیده می‌شود. در مرجع [۱۲] ثابت می‌شود که دو واژهٔ "z° – ایدآل" و "$\sqrt{z^\circ}$ – ایدآل" در $C(X)$ یکی است. در حقیقت هرگاه I یک ایدآل در $C(X)$ باشد، آن‌گاه I یک z° – ایدآل است اگر و تنها اگر $\sqrt{I}$ یک z° – ایدآل باشد. به معنای دیگر I در $C(X)$ یک z° – ایدآل است اگر و تنها اگر هر ایدآل اول مینیمال روی I یک z° – ایدآل باشد .

هر ایدآل در $C(X)$ دست کم شامل یک z°– ایدآل می‌باشد. در واقع برای هر $f\in C(X)$، z°- ایدآل $O_{Z(f)}$ در ایدآل اصلی (f) قرار دارد. ولی لازمهٔ وجود بزرگ‌ترین z°- ایدآل در یک ایدآل $C(X)$ ، همان‌گونه که در بخش قبل دیدیم، این است که مجموع هر دو z°- ایدآل در $C(X)$ یک z°–ایدآل باشد. در مرجع [۱۹] نشان داده شد که مجموع در z°- ایدآل $C(X)$ یک z° – ایدآل است اگر و تنها اگر X یک شبه F– فضا باشد؛ یعنی، فضایی که هر متمم صفر مجموعهٔ چگال در آن یک C– نشانده باشد. برای آگاهی و مطالعهٔ بیش‌تر این فضاها، خواننده می‌تواند به مراجع [۳۲، ۳۸ و ۳۹] نیز مراجعه نماید. به این ترتیب وقتی X یک شبه F– فضا باشد، مجموع همهٔ z°– ایدآل‌های در یک ایدآل I بزرگ‌ترین z°- ایدآل در I خواهد بود که آن را با I° نمایش می‌دهیم. گزارهٔ زیر که شناسایی شبه F– فضاها را از دیدگاهی متفاوت بیان می‌کند، در شناسایی جبری و

توپولوژیکی I° برای هر ایدآل I در $C(X)$ نیز بی‌تأثیر نیست.

۷-۳ گزاره: عبارت‌های زیر معادلند.

(الف) X یک شبه F- فضا است.

(ب) برای هر دو ایدآل I و J در $C(X)$، $(I+J)_\circ = I_\circ + J_\circ$.

(پ) برای هر $f, g \in C(X)$، $P_f + P_g = P_{f^۲+g^۲}$.

۷-۴ قضیه: اگر X یک شبه F - فضا و I یک ایدآل در $C(X)$ باشد، آن‌گاه

$$I^\circ = \sum_{P_f \subseteq I} P_f = \{f \in C(X) : P_f \subseteq I\} =$$
$$\{f \in I : \operatorname{int}_X Z(f) \subseteq \operatorname{int}_X Z(g) \Rightarrow g \in I\}$$

وقتی فضای X یک شبه F - فضا باشد، نتایجی مشابه با آن‌چه در مبحث z- ایدآل‌ها ارائه شد به‌دست می‌آید.

۷-۵ گزاره: فرض می‌کنیم X شبه F- فضا باشد، در این صورت عبارت‌های زیر برقرارند.

(الف)- اگر $I \subseteq J$ دو ایدآل در $C(X)$ باشند، آن‌گاه $I^\circ \subseteq J^\circ$.

(ب)- اگر I یک ایدآل در $C(X)$ باشد، آن‌گاه $\sqrt{I}^\circ = I^\circ \subseteq I^z \subseteq I \subseteq \sqrt{I} \subseteq I_z \subseteq I_\circ$.

(پ)- هرگاه P یک ایدآل اول (یا اولیه) در $C(X)$ باشد، آن‌گاه P° اول است .

(ت)- هرگاه P و Q دو ایدآل اول در $C(X)$ باشند، آن‌گاه $(P+Q)^\circ = P^\circ + Q^\circ$.

۷-۶ قضیه: فرض می‌کنیم X یک شبه F- فضا باشد، در این صورت

(الف) اگر P و Q دو ایدآل اول در $C(X)$ باشند به گونه‌ای که تشکیل زنجیر ندهند، آن‌گاه $P+Q$ یک z°- ایدآل اول است.

(ب) هرگاه I یک z°- ایدآل و P یک ایدآل اول در $C(X)$ باشد به گونه‌ای که I و P تشکیل زنجیر ندهند، آن‌گاه $P+I$ یک z°- ایدآل اول است.

سرانجام قضیهٔ زیر حاصل نتیجهٔ قضیهٔ ۷-۶ و ویژگی مهم $\sqrt{I+J} = \sqrt{I} + \sqrt{J}$ برای هر دو ایدآل I و J در $C(X)$ است.

۷-۷ قضیه: فرض می‌کنیم X یک شبه F- فضا باشد.

(الف)- اگر I یک z°- ایدآل و Q یک ایدآل اولیه در $C(X)$ باشد به گونه‌ای که در یک زنجیر نباشند، آن‌گاه $I+Q$ یک z°- ایدآل اول است.

(ب)- اگر R و S دو ایدآل اولیه در $C(X)$ باشند به گونه‌ای که $\sqrt{R}$ و $\sqrt{S}$ تشکیل زنجیر ندهند، آن‌گاه $R+S$ یک z°- ایدآل اول است.

۸- z-ایدآل‌ها و z°- ایدآل‌ها به عنوان پل‌های ارتباطی

همان‌گونه که پیش‌تر گفتیم، یکی از اهداف مطالعهٔ $C(X)$، برقراری ارتباط میان ویژگی‌های جبری $C(X)$ و خواص توپولوژیکی X می‌باشد. در بخش‌های قبل چند نمونه از این ارتباط‌ها را مشاهده کردیم، مثلاً دیدیم که مجموع هر دو z-ایدآل نسبی یک z- ایدآل نسبی است اگر و تنها اگر X یک P- فضا باشد و یا مجموع هر دو z°- ایدآل در $C(X)$ یک z°- ایدآل است اگر و تنها اگر X یک شبه F- فضا باشد. در این بخش ارتباط‌های دیگری بین X و $C(X)$ را که توسط z- ایدآل‌ها و z°- ایدآل‌ها برقرار و تاکنون شناخته شده‌اند ارائه داده و برای آگاهی از ارتباط‌های بیش‌تر، خواننده را به مراجع [۴۲-۴۰] ارجاع می‌دهیم. در بخش قبل دیدیم که هر z°- ایدآل در $C(X)$

یک z – ایدآل است ولی عکس آن همیشه درست نیست، حتی یک z – ایدآل غیر عادی در $C(X)$ لزوماً یک z° – ایدآل نمی‌باشد. به این ترتیب نخستین پرسش‌هایی که به طور طبیعی مطرح خواهند بود به شرح زیرند.

۱– برای کدام فضای X، هر ایدآل در $C(X)$ یک z – ایدآل (z° – ایدآل) است؟

۲– برای کدام فضای X، هر ایدآل غیر عادی در $C(X)$ یک z° – ایدآل است؟

۳– برای کدام فضای X، هر z – ایدآل در $C(X)$ یک z° – ایدآل است؟

۴– برای کدام فضای X ، هر z – ایدآل غیر عادی در $C(X)$ یک z° – ایدآل است؟

پرسش ۱ در مرجع [۲۹] و بقیه در مرجع [۲۴] پاسخ داده شده‌اند. قبلاً نیز دیدیم که اگر هر ایدآل یک حلقهٔ z– ایدآل باشد، آن‌گاه حلقه منظم است و به عکس. منظم بودن حلقهٔ $C(X)$ معادل با P– فضا بودن X می‌باشد و به این ترتیب هر ایدآل در $C(X)$ یک z– ایدآل است اگر و تنها اگر X یک P– فضا باشد. z°– ایدآل بودن هر ایدآل غیر عادی در $C(X)$ نیز معادل با P– فضا بودن X است. علاوه بر این ثابت شده است که X یک P– فضاست اگر و تنها اگر هر z° – ایدآل اول در $C(X)$ ماکسیمال باشد، اگر و تنها اگر هر z°– ایدآل پایه‌ای در $C(X)$ یک ایدآل اصلی باشد. پرسش‌های ۳ و ۴ یکسانند و در واقع معادل با تقریباً P– فضا بودن X هستند. همچنین این دو پرسش معادل با این هستند که بگوییم هر z – ایدآل اول در $C(X)$ یک z° – ایدآل است و یا z – ایدآل‌های پایه‌ای و z°– ایدآل‌های پایه‌ای در $C(X)$ برهم منطبق‌اند. در صورتی که هر z – ایدآل در $C(X)$ یک z°– ایدآل باشد، آن‌گاه مجموع هر دو z° – ایدآل یک z° – ایدآل خواهد بود و در نتیجه هر تقریباً P– فضا یک شبه F– فضاست. در مرجع [۲۲] نشان داده شد که وقتی فضای X ناهمبند پایه‌ای (یعنی، فضایی که درون هر صفر مجموعه در آن بسته است) باشد، مجموع دو z° – ایدآل در $C(X)$ یک z° – ایدآل است و این نتیجه می‌دهد که هر فضای ناهمبند پایه‌ای نیز شبه F– فضاست. اکنون که صحبت از فضاهای ناهمبند به میان آمد، پرسش‌های بعدی را در مورد این فضا مطرح می‌کنیم.

۵– فضاهای ناهمبند پایه‌ای چگونه توسط z° – ایدآل‌ها شناسایی می‌شوند؟

۶– فضاهای ناهمبند شدید (یعنی، فضاهایی که در آن‌ها درون هر مجموعهٔ بسته، بسته است) چگونه توسط z°– ایدآل‌ها شناسایی می‌شوند؟

به این پرسش‌ها در مرجع [۴۳] پاسخ داده شده است، در واقع ثابت شد که فضای X ناهمبند پایه‌ای است اگر و تنها اگرهر z°– ایدآل پایه‌ای در $C(X)$ اصلی باشد، اگر و تنها اگر هر z°– ایدآل در $C(X)$ توسط مجموعه‌ای از خود توان‌ها تولید شود. همچنین ثابت شده است که فضای X ناهمبند شدید است اگر و تنها اگر اشتراک هر تعداد z° – ایدآل پایه‌ای در $C(X)$ یک ایدآل اصلی باشد. برای آگاهی بیش‌تر از این نوع فضاهای ناهمبند، خواننده می‌تواند به مرجع [۲۹] مراجع کند.

وقتی فضای X را تقریباً P– فضا در نظر بگیریم که P– فضا نباشد، آن‌گاه ایدآل اول P در $C(X)$ وجود دارد که ماکسیمال نیست. اگر M ایدآل ماکسیمال یکتای شامل P باشد، آن‌گاه چون X تقریباً P– فضاست، از این رو M غیر عادی است و بنابراین یک z°– ایدآل است. به این ترتیب با انتخاب مناسب فضای X، دست کم یک

z° - ایدآل اول در $C(X)$ وجود دارد که مینیمال نیست. در مراجع [۲۲ و ۲۴] فضای X به گونه‌ای ساخته شده است که z° - ایدآل‌های اول در $C(X)$ لزوماً نه مینیمال باشند و نه ماکسیمال. به این ترتیب پرسش‌های بعدی به طور طبیعی به شرح زیر می‌باشند.

۷- فضای X چگونه باشد تا هر z - ایدآل اول در $C(X)$ یا مینیمال باشد و یا ماکسیمال؟

۸- فضای X چگونه باشد تا هر z° - ایدآل اول در $C(X)$ یا مینیمال باشد و یا ماکسیمال؟

۹- فضای X چگونه باشد تا هر z° - ایدآل اول در $C(X)$ مینیمال باشد؟

در مرجع [۴۴]، تحت شرایط خاص برای فضاهای X که فشرده‌اند و تعداد نقاط نامنفرد آن‌ها متناهی است، ثابت شده است که هر z - ایدآل اول $C(X)$ یا مینیمال است و یا ماکسیمال. به پرسش ۹ در مرجع [۲۴] پاسخ داده شده و فضاهایی در ارتباط با این پرسش شناسایی شده‌اند که z° - برشی نام دارند. فضاهای متریک و ناهمبند پایه‌ای مثال‌هایی از فضاهای z° - برشی هستند. در واقع وقتی فضای X متریک و یا ناهمبند پایه‌ای باشد، هر z° - ایدآل اول در $C(X)$ مینیمال خواهد بود. به پرسش ۸ نیز در مرجع [۲۴] پاسخ داده شده است و در این ارتباط فضاهایی ضعیف‌تر از z° - برشی به نام z° - نیم برشی شناسایی شده‌اند. فضاهای فشرده شدهٔ تک‌نقطه‌ای یک فضای گسستهٔ ناشمارا مثال‌هایی از z° - نیم برشی‌اند که z° - برشی نیستند. وقتی فضای X این گونه باشد، آن‌گاه هر z° - ایدآل اول در $C(X)$ یا مینیمال است و یا ماکسیمال و z° - ایدآل اول در $C(X)$ وجود دارد که مینیمال نیست.

دیدیم که هر z - ایدآل غیرعادی در $C(X)$ یک z° - ایدآل است اگر و تنها اگر فضای X تقریباً P- فضا باشد. این بار می‌خواهیم ببینیم وقتی هر ایدآل اول غیرعادی یا هر z - ایدآل اول غیرعادی در $C(X)$ یک z° - ایدآل باشد چه رخ می‌دهد؟ به این ترتیب پرسش‌های بعدی به شرح زیر مطرح می‌شوند.

۱۰- برای کدام فضای X، هر z - ایدآل اول غیرعادی در $C(X)$ یک z° - ایدآل است؟

۱۱- برای کدام فضای X، هر ایدآل اول غیرعادی در $C(X)$ یک z° - ایدآل است؟

از آن‌جا که برای تقریباً P- فضای X، هر z - ایدآل در $C(X)$ یک z° - ایدآل است، آشکارا به ازای این فضاها، هر z - ایدآل اول غیرعادی در $C(X)$ نیز یک z° - ایدآل می‌باشد. به این ترتیب به‌نظر می‌رسد که فضاهای ضعیف‌تری برای این منظور نیز جوابگو هستند. در واقع در مرجع [۲۴] ثابت شده است که فضاهایی ضعیف‌تر به نام تقریباً P- فضاهای ضعیف پاسخ پرسش ۱۰ می‌باشند. پاسخ پرسش ۱۱ فضاهایی به نام ∂- فضا هستند که در مرجع [۲۴] مطرح شده‌اند. فضای X را ∂- فضا می‌نامیم هرگاه مرز هر صفر مجموعه در X در یک صفر مجموعه با درون تهی قرار گیرد. فضاهای متریک و فضاهای نرمال تام از این قبیل هستند و بنا به پرسش‌های ۱۰ و ۱۱ طبیعتاً هر ∂- فضا یک تقریباً P- فضای ضعیف نیز هست ولی اگر X را فشرده‌شدهٔ تک نقطه‌ای یک فضای گسستهٔ ناشمارا بگیریم، تقریباً P- فضای ضعیف است ولی ∂-فضا نیست. پاسخ این دو پرسش به طور دقیق‌تر این گونه است که هر z - ایدآل غیرعادی (ایدآل غیرعادی) در $C(X)$ یک z° - ایدآل است اگر و تنها اگر فضای X تقریباً P- فضای ضعیف (∂- فضا) باشد.

در خصوص z –ایدآل‌ها و z° – ایدآل‌های حلقهٔ $C(X)$، به عنوان پل‌های ارتباطی و همچنین در خصوص ماهیت و ساختار z – ایدآل‌ها و z° – ایدآل‌های $C(X)$ پرسش‌های دیگر مطرح است که به دلیل طولانی شدن مقاله به همین بسنده می‌کنیم. حلقهٔ $C(X)$ با ساختار زیبای خود می‌تواند از دیدگاه‌های مختلف، زمینه‌ای مناسب و ایده‌آل برای پژوهش باشد. این نوشتار با این هدف نگاشته شده است تا علاقمندان، به ویژه جوانان آشنایی بیش‌تر با حلقه‌های توابع پیوسته پیدا کنند.

مراجع

[1] Gelfand, I. and Kolmogoroff, A.N., *On rings of continuous functions on topological spaces*, C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS. 22 (1939) 11-15.

[2] Shilov, G.E., *Ideals and subrings of the ring of continuous functions*, C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS. 22 (1939) 7-10.

[3] Kohls, C.W, *Ideals in rings of continuous functions*, Fund. Math., 45 (1957) 28-50.

[4] Kohls, C.W., *Prime ideals in rings of continuous functions*, Illinois J. Math., 2 (1958) 505-536.

[5] Kohls C.W., *Prime ideals in rings of continuous functions II*, Duke Math. J., 25 (1958) 447-458.

[6] Dietrich, W., *On the ideal structure of C(X)*, Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970) 61-77.

[7] Gillman, L. and Kohls, C.W., *Convex and pseudoprime ideals in rings of continuous functions*, Math. Zeitschr, 72 (1960) 399-409.

[8] Gillman, L. and Henriksen, M., *Concerning rings of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 77 (1954) 340-362.

[9] Henriksen, M. and Jerison, M., *The space of minimal prime ideals of a commutative ring*, Trans. Amer. Math. Soc.,115 (1965) 110-130.

[10]Hewitt, E., *Rings of real-valued continuous functions I*, Trans. Amer. Math. Soc., 64 (1948) 54-99.

[11]Mason, G., *Ideals and prime ideals*, J. Algebra, 26 (1973) 280-297.

[12]Azarpanah, F. and Mohamadian, R., *√z-ideals and √z°-ideals in C(X),* Acta Math. Sinica, English Series, 23, 6 (2007) 989-996.

[13]Mason, G., *Prime z-ideals of C(X) and related rings*, Canad. Math. Bull., 23, 4 (1980) 437-443.

[14]Mulero, M.A., *Algebraic properties of rings of continuous functions*, Fund. Math., 149 (1996) 55-66.

[15]Gillman, L., *Countably generated ideals in rings of continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960) 660-666.

[16]De Marco, G., *On the countably generated z-ideals of C(X)*, Proc. Amer. Math. Soc. 31 (1972) 574-576.

[17]LeDonne, A., *On a question cocerning countably generated z-ideals of C(X)*, Proc. Amer. Math. Soc., 80 3 (1980) 505-510.

[18]LeDonne, A., *On countably generated z-ideals of C(X) for first countable spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 82, 2 (1981) 280-282.

[19]De Pagter, B., *On z-ideals and d-ideals in Riesz spaces III*, Indag Math., 43(1981), 409-422.

[20]Mason, G., *Prime ideals and qoutient rings of reduced rings*, Math. Japonica, 34, 6 (1989) 941-956.

[21]Azarpanah, F., Karamzadeh, O.A.S. and Rezai Aliabad, A., *On ideal consisting entirely of zerodivisors*, Comm. Algebra, 28, 2 (2000) 1061-1073.

[22]Azarpanah, F., Karamzadeh, O.A.S. and Rezai Aliabad, A., *On z°-ideals in C(X)*, Fund. Math., 160 (1999) 15-25.

[23]Azarpanah, F. and Henriksen, *When is the set of d-ideals closed under addition?* The first Turkish international conference on topology and its application, Istanbul University, (2000).

[24]Azarpanah, F. and Karavan, M., *On nonregular ideals and z°-ideals in C(X)*, Cech. Math. J., 55, 130 (2005) 397-407.

[۲۵]آذرپناه، فریبرز و افروز، سوسن، z – ایدآل‌ها، طرح تحقیقاتی، دانشگاه شهید چمران اهواز، سال ۱۳۸۵، شماره ۵۷۲.

[26]Atiyah, M.F. and MacDonald, I.G., *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, Readin Mass. (1969).

[27]Kaplansky, I., *Commutative rings*, Allyn and Bacon Inc., Buston, (1970).

[28]Engelking, R., *General Topology*, Heldermann-Verlag, (1989).

[29]Gillman, L. and Jerison, M., *Rings of continuous functions*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, (1976).

[30]Willard, S., *General Topology*, Addison Wesley, Reading Mass., (1970).

[31]Walker, R.C., *The Stone-Cech compactification*, Springer-Verlag Mass., 1970.

[32]Rudd, D., *On two sum theorems for ideals of C(X)*, Michigan Math. J., 17 (1970) 139-141.

[33]Azarpanah, F. *Essential ideals in C(X)*, Period. Math. Hangar. 31, 2 (1995) 105-112.

[34]Azarpanah, F. *Intersection of essential ideals in C(X),* Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997) 2149-2154.

[35]Azarpanah, F., *On almost P-spaces*, Far East J. Math. Sci., Special volume (2000) 121-132.

[36]Levy, R., *almost P-spaces*, Canad. J. Math., 2 (1977) 284-288.

[37]Veksler, A.I., *P'-points P'-sets, P'-spaces, a new class of order-continuous measures and functions*, Sov. Math. Dokl, 14 (1973) 1445-1450.

[38]Huijsmans, C.B. and DePagter, B., *On z-ideals and d-ideals in Riesz spaces I*, Indag. Math., 42 (1980) 183-195.

[39]Dashiel, F., Hager, A. and Henriksen, M., *Order-Cauchy completions of rings and vector lattices of continuous functions*, Canad. J. Math., XXXII 3 (1980) 657-685.

[40]Aliabad, A.R., Azarpanah, F. and Paimann, M., *z°, z-ideals in the factor rings of C(X)*, Acta Math. Sinica, in press.

[41]Azarpanah, F. Karamzadeh, O.A.S. and Rahmati, S., *C(X) vs. C(X) modulo its Socle* Coloquium Mathematiqum, 111, 2 (2008) 315-336.

[42]Karamzadeh, O.A.S. and Rostami, M., *On the intrinsic topology and some related ideals of C(X)*, Proc. Amer. Math. Soc., 93, 1 (1985) 179-184.

[43]Azarpanah, F. and Karamzadeh, O.A.S., *Algebraic characterizations of some disconnected spaces*, Italian J. Pure and Applied Math., 12 (2002) 155-168.

[44]Henriksen, M., Martinez, J. and Woods, R.G., *Spaces X in which all prime z-ideals of C(X) are minimal or maximal*, Comment. Math. Univ. Carolinae, 44, 2 (2003) 261-294.