

تبدیل رده‌هایی از مسائل برنامه‌ریزی کسری به برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم و حل آن توسط روش نقطه درونی کاهش پتانسیل

سهراب عفتی و مهدی مسروری مقدم

گروه ریاضی - دانشگاه تربیت معلم سبزوار

پست الکترونیکی: effati@sttu.ac.ir

چکیده

در این مقاله ابتدا برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم را معرفی می‌کنیم. سپس رده‌هایی از مسائل برنامه‌ریزی‌های کسری را به مسائل از نوع برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم تبدیل و از روش نقطه درونی کاهش پتانسیل حل می‌کنیم. با حل این دسته از مسائل جواب بهینه مسئله اصلی به دست می‌آید.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم، الگوریتم کاهش پتانسیل، برنامه‌ریزی کسری، تابع مانع، تابع پتانسیل

مقدمه

در این مقاله از برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم برای حل رده‌هایی از مسائل برنامه‌ریزی کسری استفاده می‌کنیم. فرم کلی برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \min f^T x \\ \text{s.t.} : \|A_i x + b_i\| \leq c_i x + d_i, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $f \in R^n$ ، $A_i \in R^{(n_i-1) \times n}$ ، $b_i \in R^{n_i-1}$ ، $c_i \in R^n$ ، $d_i \in R$ ، پارامترهای مسئله هستند. نرمی که در قیود به کار رفته است، نرم استاندارد اقلیدسی است، یعنی: $\|u\| = (u^T u)^{\frac{1}{2}}$. یک مخروط مرتبه دوم استاندارد از بعد k به صورت زیر تعریف می‌شود:

در سال ۱۹۹۸ بوید^۱ و همکاران او [۱] در مورد تبدیل رده‌هایی از مسائل بهینه‌سازی و کاربردهای آن نظیر طراحی وزن آرایه آنتن، بهینه‌سازی نیروی پنجه زدن و طراحی فیلتر و غیره به برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم مطالبی بیان کردند. در سال ۲۰۰۲ آکربلد^۲ [۲] از برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم به عنوان الگوریتمی برای حل کنترل‌های پیشگویانه استفاده کرد و سرانجام در سال ۲۰۰۳ وانگ^۳ و ترلاکی^۴ [۳] روش‌های نقطه درونی را برای حل برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم به کار بردند. ما

1- Boyd
2- Akerblad
3- Wang
4- Terlaky

$$\begin{aligned} \max \quad & -\sum_{i=1}^N (b_i^T z_i + d_i w_i) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^N (A_i^T z_i + c_i w_i) = f \\ & \|z_i\| \leq w_i \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3)$$

دوگان SOCP (۳) همچنین یک مسأله برنامه‌ریزی محدب است، مقدار بهینه SOCP اولیه را با P^* نمایش می‌دهیم و همچنین قرارداد می‌کنیم که $P^* = +\infty$. اگر مسئله نشدنی باشد و مقدار بهینه دوگان را با d^* نمایش می‌دهیم و زمانی که مسأله دوگان نشدنی باشد، $d^* = -\infty$ است. اگر یک x ای وجود داشته باشد که در همه قیود در مسأله اولیه صدق کند شدنی اولیه نامیده می‌شود و اگر یک x شدنی وجود داشته باشد که در همه قیود به صورت نامساوی اکید صدق کند آن x اکیداً شدنی نامیده می‌شود. بردارهای z و w شدنی دوگان نامیده می‌شوند اگر آن‌ها در قیود (۳) صدق کنند و اکیداً شدنی نامیده می‌شوند اگر آن‌ها در قیود نامساوی (۳) به طور اکید صدق کنند. برای توضیحات بیشتر در مورد مسأله دوگان برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم به مراجع [۲] و [۳] مراجعه کنید.

مطالب اساسی درباره دوگانی

۱. دوگانی ضعیف: $p^* \geq d^*$
۲. دوگانی نیمه قوی: اگر مسأله اولیه (یا دوگان) اکیداً شدنی و از پایین (یا از بالا) کراندار باشد در این صورت $p^* = d^*$.
۳. دوگانی قوی: اگر مسائل اولیه و دوگان اکیداً شدنی باشند آن‌گاه نقاط شدنی اولیه و دوگان وجود دارند که مقادیر بهینه مساوی به دست می‌دهند. ما فقط اولین مورد را ثابت می‌کنیم و برای اثبات موارد ۲ و ۳ به مرجع [۴] مراجعه کنید. تفاوت بین توابع هدف

$$c_k = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix} \mid u \in R^{k-1}, t \in R, \|u\| \leq t \right\}.$$

برای $k=1$ مخروط مرتبه دوم بالا به صورت زیر می‌باشد:

$$c_1 = \{t \mid t \in R, t \geq 0\}.$$

مجموعه نقاطی که در یک قید مخروط مرتبه دوم صدق می‌کنند نقش نگاشت زیر است:

$$\|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_i \\ c_i^T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_i \\ d_i \end{bmatrix} \in C_{n_i}$$

که منظور از C_{n_i} مخروط مرتبه دوم از بعد n_i است که مجموعه‌ای محدب است. بنابراین برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم^۱ SOCP یک برنامه‌ریزی محدب است، زیرا تابع هدف یک تابع محدب بوده و قیود مخروط مرتبه دوم نیز یک مجموعه محدب را تعریف می‌کنند (برای توضیحات بیشتر به مرجع [۱] مراجعه کنید).

روش نقطه درونی اولیه - دوگان

در این بخش دوگان مساله SOCP (۱) را معرفی می‌کنیم. سپس از روش نقطه درونی کاهش پتانسیل اولیه - دوگان نستروف و نیمروسفکی^۲ در [۴] برای حل این مسائل استفاده می‌کنیم.

دوگان SOCP

در این قسمت با تغییر متغیر

$$u_i = A_i x + b_i, \quad t_i = c_i^T x + d_i$$

مسأله اولیه به فرم ساده زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & f^T x \\ \text{s.t.} \quad & \|u_i\| \leq t_i, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2)$$

همچنین دوگان SOCP به صورت زیر تعریف می‌شود.

شرط لازم هم هستند برای اثبات به مرجع [۴] مراجعه کنید).

تابع مانع برای مخروط مرتبه دوم

برای مخروط‌های مرتبه دوم که اشتراک آن‌ها فضای شدنی مسائل اولیه و دوگان را به وجود می‌آورند، تابع مانع برای هر زوج $t \in R$ و $u \in R^{m-1}$ را به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\phi(u, t) = \begin{cases} -\log(t^\gamma - \|u\|^\gamma) & \|u\| \leq t \\ \infty & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تابع $\phi(u, t)$ متناهی است اگر و فقط اگر $(u, t) \in C_m$ و $\|u\| < t$ به ∞ میل می‌کند زمانی که (u, t) به مرز C_m نزدیک می‌شود. همچنین این تابع در درون مخروط مرتبه دوم، هموار و محدب است و مشتق‌های اول و دوم آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\nabla \phi(u, t) = \frac{\gamma}{(t^\gamma - u^T u)} \begin{bmatrix} u \\ -t \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 \phi(u, t) = \frac{\gamma}{(t^\gamma - u^T u)^2} \begin{bmatrix} (t^\gamma - u^T u)I + \gamma u^T u & -\gamma t u \\ -\gamma t u & t^\gamma + u^T u \end{bmatrix}$$

تابع پتانسیل اولیه - دوگان

در این بخش یک تابع پتانسیل اولیه - دوگان را تعریف می‌کنیم. یکی از دلایل تعریف این تابع پتانسیل ایجاد یک کران بالا برای شکاف دوگانی است که به صورت زیر تعریف می‌شود (برای جزئیات بیشتر به مرجع [۴] مراجعه کنید):

$$\phi(x, z, w) = (\gamma N + \nu \sqrt{\gamma N}) \log \eta(x, z, w) + \sum_{i=1}^N (\phi(u_i, t_i) + \phi(z_i, w_i)) - \gamma N \log N$$

اولیه و دوگان، شکاف دوگانی مربوط به متغیرهای (x, z, w) می‌نامند و با $\eta(x, z, w)$ یا η نمایش می‌دهیم.

$$\eta(x, z, w) = f^T x + \sum_{i=1}^N (b_i^T z_i + d_i w_i)$$

حال طبق دوگانی ضعیف، شکاف دوگانی همیشه به ازای متغیرهای (x, z, w) نامنفی است، زیرا با استفاده از مقدار f که در قید مسئله دوگان (۳) داده شده است، داریم:

$$\eta(x, z, w) = \sum_{i=1}^N (z_i^T (A_i x + b_i) + w_i (c_i^T x + d_i)) = \sum_{i=1}^N (z_i^T u_i + t_i w_i)$$

هر جمله در مجموع سمت راست نامنفی است، زیرا

$$z_i^T u_i + w_i t_i \geq -\|z_i\| \|u_i\| + w_i t_i \geq 0.$$

نامساوی اول از نامساوی کوشی شوارتز نتیجه می‌شود و دومین نامساوی از این حقیقت که $\|u_i\| \geq \|z_i\|, t_i \geq \|w_i\|$ نتیجه می‌شود.

شکاف دوگان صفر است اگر و فقط اگر شرایط زیر برای هر i برقرار باشد:

$$\|u_i\| < t_i \Rightarrow w_i = \|z_i\| = 0 \quad (4)$$

$$\|z_i\| < w_i \Rightarrow t_i = \|u_i\| = 0 \quad (5)$$

$$\|z_i\| = w_i, \|u_i\| = t_i \Rightarrow w_i u_i = -t_i z_i \quad (6)$$

شرایط (۴) - (۶) شرایط کمبود مکمل بین جواب‌های اولیه و دوگان در برنامه‌ریزی خطی را تعمیم می‌دهند و همچنین شرایط کافی برای بهینگی را نتیجه می‌دهند. یک نقطه شدنی بهینه است اگر برای هر

$$u_i = A_i x + b_i, \quad t_i = c_i^T x + d_i$$

متغیرهای w_i و z_i وجود داشته باشند به طوری که یکی از (۴)، (۵) و (۶) برقرار باشند. (لازم به ذکر است که اگر مسائل اولیه و دوگان اکیداً شدنی باشند آن‌گاه شرایط فوق

$$z' = [z_1, w_1, \dots, z_N, w_N],$$

$$\delta z' = [\delta z_1, \delta w_1, \dots, \delta z_N, \delta w_N], \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ C_1^T \\ \vdots \\ A_N \\ C_N^T \end{bmatrix}$$

ضمناً توجه کنید که ماتریس‌های H و A و g ماتریس‌های قطری بلوکی هستند.

مراحل الگوریتم

در روش نقطه درونی ابتدا بایستی یک نقطه اکیدا شدنی به دست آوریم. سپس برای یک $\varepsilon > 0$ (دقت) و پارامتر $\nu \geq 1$ داده شده مراحل الگوریتم را به صورت زیر تکرار می‌کنیم.

$$(1) \quad \text{جهت‌های جستجو را توسط حل دستگاه (8)}$$

پیدا کنید.

$$(2) \quad \text{جهت جستجو در صفحه } q \text{ و } p \text{ را پیدا کنید که}$$

$$\varphi(x + p\delta x, z + q\delta z, w + q\delta w) \text{ را کمینه کند.}$$

$$(3) \quad \text{نقاط جدید را به دست آورید،}$$

$$w = w + q\delta w, z = z + q\delta z, x = x + p\delta x$$

$$(4) \quad \text{اگر } \eta(x, z, w) \leq \varepsilon \text{ به گام (1) بروید.}$$

در هر تکرار الگوریتم مقدار تابع پتانسیل با یک

مقدار ضمانت شده کاهش می‌یابد، یعنی:

$$\phi(x^{(k+1)}, z^{(k+1)}, w^{(k+1)}) \leq \phi(x^k, z^k, w^k) - \delta \quad (9)$$

که در آن δ به نقطه ابتدای مسأله وابسته نیست، برای اثبات رابطه بالا به مرجع [4] مراجعه کنید. با ترکیب رابطه (9) و فاصله دوگانی که لازم است حداکثر به دقت ε برسد $(\eta(x, z, w) \leq \varepsilon)$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$k \leq \frac{\nu\sqrt{2N} \log\left(\frac{\eta^{(0)}}{\varepsilon}\right) + \psi(x^{(0)}, z^{(0)}, w^{(0)})}{\delta}. \quad (10)$$

در تابع پتانسیل بالا، $\nu \geq 1$ یک پارامتر است و رابطه وزنی بین عبارت فاصله دوگانی و تابع انحراف از مرکزیت، $\psi(x, z, w)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi(x, z, w) = \sum_{i=1}^N (\phi(u_i, t_i) + \phi(z_i, w_i)) - 2N \log N + 2N \log \eta(x, z, w)$$

تابع ψ برای هر (x, z, w) شدنی نامنفی است. برای جزئیات بیشتر به مرجع [4] مراجعه کنید. با استفاده از مرجع [4] رابطه زیر را بین فاصله دوگانی و تابع پتانسیل داریم:

$$\eta(x, z, w) \leq e^{\left(\frac{\psi(x, z, w)}{\nu\sqrt{2N}}\right)} \quad (7)$$

الگوریتم کاهش پتانسیل اولیه - دوگان

روش کاهش پتانسیل اولیه - دوگان با استفاده از نامساوی (7) بر اساس کاهش پتانسیل $\varphi(x, z, w)$ پایه گذاری شده است. در این روش جهت‌های جستجو کاهش دهنده تابع پتانسیل توسط حل دستگاه معادلات خطی زیر محاسبه می‌گردد که از طریق روش نیوتن به دست آمده‌اند. برای چگونگی تشکیل این دستگاه معادلات می‌توانید به مرجع [4] مراجعه کنید:

$$\begin{bmatrix} H^{-1} & \bar{A} \\ \bar{A}^T & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Z \\ \delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H^{-1}(\rho Z + g) \\ \circ \end{bmatrix} \quad (8)$$

که در آن ∂Z و ∂x متغیرها، $\rho = \frac{(\nu N + \nu\sqrt{2N})}{\eta}$ و ماتریس‌ها و بردارهای A ، H و g و \bar{A} چنین تعریف می‌شوند:

$$H = \begin{bmatrix} \nabla^2 \phi(u_1, t_1) & \dots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \dots & \nabla^2 \phi(u_N, t_N) \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} \nabla \phi(u_1, t_1) \\ \vdots \\ \nabla \phi(u_N, t_N) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^p \frac{c}{a_i^T x + b_i} \\ \text{s.t. } c_i^T x + d_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q \\ a_i^T x + b_i > 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (12)$$

مسئله برنامه‌ریزی کسری بالا جزء مسائل برنامه‌ریزی محدب است، زیرا هر کسر در تابع هدف یک تابع محدب است، چون که برای هر i ، $a_i^T x + b_i > 0$ و ناحیه شدنی نیز محدب است. با معرفی متغیر t_i ، $t_i > 0$ ، مسئله (۱۲) به مسئله زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^p t_i \\ \text{s.t. } \frac{c}{a_i^T x + b_i} \leq t_i, t_i > 0, a_i^T x + b_i > 0, i = 1, \dots, p \\ c_i^T x + d_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q \end{aligned} \quad (13)$$

حال با فرض

$$(j = 1, \dots, p) \quad x_j = a_j^T x + b_j, \quad y_j = t_j, \quad w_j = \sqrt{c}$$

و با به کار بردن نامساوی (۱۱) داریم:

$$\left\| \begin{bmatrix} \sqrt{c} \\ a_i^T x + b_i - t_i \end{bmatrix} \right\| \leq a_i^T x + b_i + t_i, \quad i = 1, \dots, p$$

بنابراین مسئله برنامه‌ریزی کسری (۱۳) به برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^p t_i \\ \text{s.t. } \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{c} \\ a_i^T x + b_i - t_i \end{bmatrix} \right\| \leq a_i^T x + b_i + t_i, \quad i = 1, \dots, p \\ c_i^T x + d_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q \end{aligned} \quad (14)$$

حال مسائل برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم (۱۴) را با روش نقطه درونی کاهش پتانسیل حل نموده و جواب بهینه آن را به دست می‌آوریم.

الگوریتم بیش‌تر از $O(\sqrt{N})$ مرحله طول نمی‌کشد تا شکاف دوگانی را با عامل داده شده کاهش دهد، برای جزئیات بیش‌تر در مورد روش نقطه درونی اولیه دوگان به مرجع [۴] مراجعه کنید.

برنامه‌ریزی کسری

در این بخش رده‌های خاصی از مسائل برنامه‌ریزی کسری را مورد بررسی قرار می‌دهیم که بتوان آن‌ها را به مسائل از نوع برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم تبدیل کرد. روش‌هایی که برای حل مسائل برنامه‌ریزی‌های محدب به کار می‌روند، برای حل برنامه‌ریزی‌های کسری محدب که ناحیه شدنی آن‌ها نه باز و نه بسته است، کارا نیستند. در این بخش رده‌هایی از مسائل برنامه‌ریزی کسری را با تغییر متغیر به مسائلی از نوع برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم تبدیل و با روش نقطه درونی کاهش پتانسیل حل می‌نماییم.

تبدیل رده‌هایی از مسائل برنامه‌ریزی کسری به

SOCP

برای تبدیل برنامه‌ریزی کسری به برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم به نامساوی زیر نیاز داریم:

اگر $x, y > 0$ و w یک بردار حقیقی دلخواه باشد، آنگاه داریم:

$$w^T w \leq xy \Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} w \\ x - y \end{bmatrix} \right\| \leq x + y \quad (11)$$

که در آن $w^T w \leq xy$ یک قید هذلولوی نامیده می‌شود.

برنامه‌ریزی کسری با صورت ثابت مثبت و مخرج

خطی همراه با قیود درجه دوم

صورت کلی یک مسئله برنامه‌ریزی کسری با صورت ثابت مثبت و مخرج به صورت زیر بیان می‌شود:

مسئله برنامه‌ریزی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^p \frac{\|F_i x + g_i\|}{a_i^T x + b_i} \\ \text{s.t.} \quad & a_i^T x + b_i > 0, \quad i = 1, \dots, p, \\ & c_i^T x + d_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن $F_i \in R^{q_i \times n}$, $g_i \in R^{q_i}$ می‌باشند. اکنون با معرفی متغیرهای جدید t_i داریم:

$$\frac{\|F_i x + g_i\|}{a_i^T x + b_i} \leq t_i, \quad i = 1, \dots, p$$

آن‌گاه مسئله به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^p t_i \\ \text{s.t.} \quad & (F_i x + g_i)^T (F_i x + g_i) \leq t_i (a_i^T x + b_i), \quad i = 1, \dots, p, \\ & a_i^T x + b_i > 0, \quad i = 1, \dots, p, \\ & c_i^T x + d_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (18)$$

حال با قرار دادن:

$$w_i = F_i x + g_i, \quad z_i = a_i^T x + b_i, \quad y_i = t_i, \quad i = 1, \dots, p$$

با استفاده از نامساوی (۱۱) مسئله (۱۸) به SOCP زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^p t_i \\ \text{s.t.} \quad & \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{y_i} (F_i x + g_i) \\ a_i^T x + b_i - t_i \end{bmatrix} \right\| \leq a_i^T x + b_i + t_i, \quad i = 1, \dots, p \\ & c_i^T x + d_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q \end{aligned} \quad (19)$$

حال حالتی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که صورت تابع هدف به فرم نرم-۲ با توان ۲ نیست. اگر ما بتوانیم یک فرم درجه دوم را مجموع یک جمله به صورت نرم-۲ به توان ۲ به علاوه یک مقدار عددی بنویسیم که آن مقدار عددی نامنفی است. در این صورت می‌توان یک چنین فرم درجه دوم را به SOCP تبدیل کرد. بدین منظور مسئله برنامه‌ریزی کسری زیر را در نظر بگیرید:

مسائل برنامه‌ریزی با تابع هدف مجموع توابع

کسری (صورت ثابت مثبت و مخرج خطی) و درجه

دوم

نوع دیگری از مسائل را که می‌توان به برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم تبدیل کرد، مسائلی دارای تابع هدف شامل مجموعی از توابع کسری (با صورتی ثابت مثبت و مخرجی خطی) و چند جمله‌ای درجه دوم است. ابتدا با معرفی متغیرهای جدید تابع هدف را به صورت قیود مخروط مرتبه دوم تبدیل می‌کنیم. در حالت کلی مسئله برنامه‌ریزی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^p \frac{c}{a_i^T x + b_i} + x^T P_0 x + 2q_0 x + r \\ \text{s.t.} \quad & a_i^T x + b_i > 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & c_i^T x + d_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q \end{aligned} \quad (15)$$

که در آن $P_0 \in R^{n \times n}$, $q_0 \in R^n$ یک ماتریس معین مثبت است. حال با معرفی متغیرهای t_i , t' استفاده از نامساوی (۱۱), مسئله (۱۵) به مسئله SOCP زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^p t_i + t' \\ \text{s.t.} \quad & \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{c} \\ a_i^T x + b_i - t_i \end{bmatrix} \right\| \leq a_i^T x + b_i + t_i, \quad i = 1, \dots, p \\ & \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} x \\ P_0 x + q_0 \end{bmatrix} \right\| \leq t' \\ & c_i^T x + d_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q \end{aligned} \quad (16)$$

مسائل برنامه‌ریزی کسری محدب با صورت درجه

دوم و مخرج خطی و قیود درجه دوم

در این قسمت به نوع دیگری از مسائل برنامه‌ریزی کسری می‌پردازیم که در صورت دارا بودن شرایطی قابل تبدیل به SOCP هستند.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^p t_i + t'_i \\ \text{s.t.} \quad & \left\| \begin{pmatrix} p_i^{\frac{1}{2}} x + p_i^{-\frac{1}{2}} q_i \\ a_i^T x + b_i - t_i \end{pmatrix} \right\| \leq a_i^T x + b_i + t_i, \quad i = 1, \dots, p \\ & \left\| \begin{pmatrix} r_i - q_i^T p_i^{-1} q_i \\ a_i^T x + b_i - t'_i \end{pmatrix} \right\| \leq a_i^T x + b_i + t'_i, \quad i = 1, \dots, p \\ & \left\| \begin{pmatrix} Q_i^{\frac{1}{2}} x + Q_i^{-\frac{1}{2}} m_i \\ (r_i - m_i^T Q_i^{-1} m_i)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \right\| \leq (r_i - m_i^T Q_i^{-1} m_i)^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, \dots, k \\ & c_i^T x + d_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

مسائل برنامه‌ریزی کسری با تابع هدفی مرکب از مجموع توابع کسری و درجه دوم همراه با قيود درجه دو

مسئله برنامه‌ریزی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^p \frac{\|F_i x + g_i\|}{a_i^T x + b_i} + \sum_{i=1}^l \frac{c}{c_i^T x + d_i} + x^T P x + \alpha q x + r \\ \text{s.t.} \quad & a_i^T x + b_i > 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & c_i^T x + d_i > 0, \quad i = 1, \dots, l \\ & x^T p_i x + \alpha q_i x - r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, q \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن ماتریس‌های p_i ($i = 1, \dots, q$) و P معین مثبت هستند. با معرفی متغیرهای t_i ($i = 1, \dots, p$) و t'_i ($i = 1, \dots, p$) و با فرض

$$x^T P x + \alpha q x + r \leq t'$$

$$\frac{\|F_i x + g_i\|}{a_i^T x + b_i} \leq t_i \quad \text{و} \quad \frac{c}{c_i^T x + d_i} \leq t'_i \quad \text{مسئله (21)}$$

به مسئله SOCP زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^p \frac{x^T p_i x + \alpha q_i x + r_i}{a_i^T x + b_i} \\ \text{s.t.} \quad & a_i^T x + b_i > 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & c_i^T x + d_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q \\ & x^T Q_i x + \alpha m_i x + l_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, k \end{aligned} \quad (20)$$

که در آن ماتریس‌های p_i ($i = 1, \dots, p$) و Q_i ($i = 1, \dots, k$) معین مثبت هستند و $m_i \in R^n$ ($i = 1, \dots, k$) فرم درجه دوم در مسئله (20) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x^T p_i x + \alpha q_i x + r_i = \left\| \begin{pmatrix} p_i^{\frac{1}{2}} x + p_i^{-\frac{1}{2}} q_i \\ r_i - q_i^T p_i^{-1} q_i \end{pmatrix} \right\|^2 + r_i - q_i^T p_i^{-1} q_i$$

که در آن مقدار عددی $r_i - q_i^T p_i^{-1} q_i$ ($i = 1, \dots, p$) باید مثبت باشد تا مسئله (20) قابل تبدیل به SOCP باشد. پس

$$\begin{aligned} \frac{x^T p_i x + \alpha q_i x + r_i}{a_i^T x + b_i} &= \frac{\left\| \begin{pmatrix} p_i^{\frac{1}{2}} x + p_i^{-\frac{1}{2}} q_i \\ r_i - q_i^T p_i^{-1} q_i \end{pmatrix} \right\|^2}{a_i^T x + b_i} \\ &+ \frac{r_i - q_i^T p_i^{-1} q_i}{a_i^T x + b_i}, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

حال با معرفی متغیرهای جدید t_i, t'_i ($i = 1, \dots, p$) و با فرض:

$$\frac{\left\| \begin{pmatrix} p_i^{\frac{1}{2}} x + p_i^{-\frac{1}{2}} q_i \\ r_i - q_i^T p_i^{-1} q_i \end{pmatrix} \right\|^2}{a_i^T x + b_i} \leq t_i, \quad \frac{r_i - q_i^T p_i^{-1} q_i}{a_i^T x + b_i} \leq t'_i$$

مسئله بالا به SOCP زیر تبدیل می‌شود:

مثال‌های عددی

در این بخش برای روشن شدن مطالب شرح داده شده مثال‌هایی عددی زیر را می‌آوریم. نقطه آغازین مسئله ما نقطه $(0,0)$ می‌باشد. برای حل مثال‌های زیر از نرم‌افزار msocp_auto مرجع [۵] استفاده شده است.

مثال ۱- مسئله برنامه‌ریزی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{x_1 + x_2 + 2} + \frac{1}{2x_1 - 3x_2 - 2} \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 + 2 > 0 \\ & 2x_1 - 3x_2 - 2 > 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

در این مثال با معرفی متغیرهای جدید t_1 و t_2 و با فرض این که:

$$\frac{1}{x_1 + x_2 + 2} \leq t_1, \quad \frac{1}{2x_1 - 3x_2 - 2} \leq t_2$$

و با قرار دادن:

$$\begin{aligned} w_1 = w_2 = 1, \quad z_1 = x_1 + x_2 + 2, \\ z_2 = 2x_1 - 3x_2 - 2, \quad y_1 = t_1, y_2 = t_2 \end{aligned}$$

روابط زیر را داریم:

$$w_1^2 \leq z_1 y_1, \quad z_1 > 0, \quad y_1 \geq 0 \Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} w_1 \\ z_1 - y_1 \end{bmatrix} \right\| \leq z_1 + y_1$$

همچنین برای کسر دوم داریم:

$$w_2^2 \leq z_2 y_2, \quad z_2 > 0, \quad y_2 \geq 0 \Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} w_2 \\ z_2 - y_2 \end{bmatrix} \right\| \leq z_2 + y_2$$

پس با جایگزینی در روابط بالا مسئله SOCP زیر را داریم:

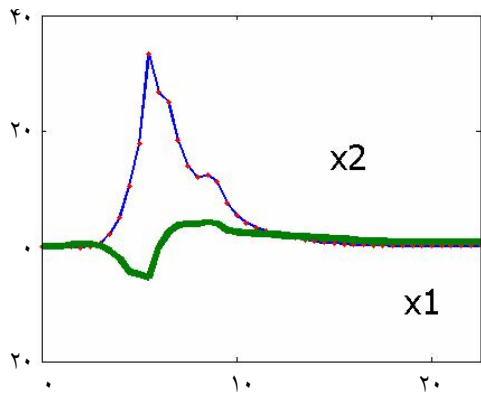
$$\begin{aligned} \min \quad & t_1 + t_2 \\ \text{s.t.} \quad & \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ x_1 + x_2 + 2 - t_1 \end{bmatrix} \right\| \leq x_1 + x_2 + 2 + t_1 \\ & \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2 - t_2 \end{bmatrix} \right\| \leq 2x_1 - 3x_2 - 2 + t_2 \quad (22) \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^p t_i + \sum_{i=1}^l t'_i + t' \\ \text{s.t.} \quad & \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{2}(F_i x + g_i) \\ a_i^T x + b_i - t_i \end{bmatrix} \right\| \leq a_i^T x + b_i + t_i, \quad i = 1, \dots, p \\ & \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{p_i^T x + p_i^T q_i} \\ 1 - t' \end{bmatrix} \right\| \leq t' + 1, \\ & \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{p_i^T x + p_i^T q_i} \end{bmatrix} \right\| \leq (r_i - q_i^T p_i^{-1} q_i)^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, \dots, q \\ & \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{2}c \\ c_i^T x + d_i - t' \end{bmatrix} \right\| \leq c_i^T x + d_i + t', \quad i = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

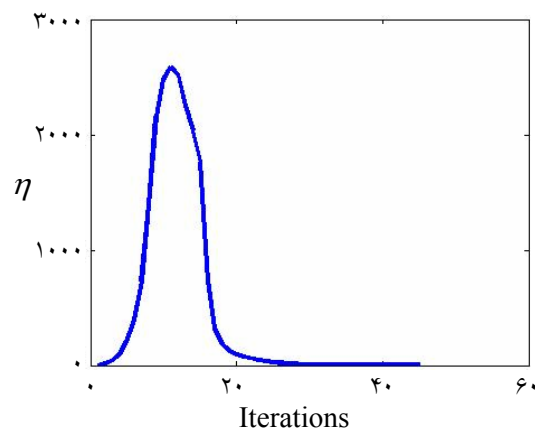
وجود جواب

همان‌طور که مشاهده شد مسائلی با ساختار تابع هدف کسری، با تغییر متغیر به یک مسئله با قيود هذلولوی تبدیل می‌شوند. سپس با نامساوی ریاضی (۱۱) به برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم قابل تبدیل هستند. اما این سؤال پیش می‌آید که آیا مسائل کسری با ساختار خاص تابع هدف و ناحیه شدنی نه باز و نه بسته دارای جواب بهینه هستند؟ چون مسائل بهینه‌سازی محدب با ناحیه شدنی بسته دارای جواب بهینه می‌باشند و جواب بهینه در یک نقطه مرزی از ناحیه شدنی اتفاق می‌افتد، اگر مسائل کسری ذکر شده دارای جواب بهینه باشد این جواب بهینه در کجای ناحیه شدنی اتفاق می‌افتد. در جواب به این سئوالات با توجه به نامساوی (۱۱) این نوع مسائل به مسائل SOCP که یک برنامه‌ریزی محدب با ناحیه شدنی بسته است، تبدیل می‌شوند که جواب بهینه مسائل SOCP در یک نقطه مرزی از ناحیه شدنی اتفاق می‌افتد. اما چون مسائل برنامه‌ریزی کسری به مسائل SOCP قابل تبدیل هستند، پس جواب بهینه مسائل برنامه‌ریزی کسری گاهی در نقاط مرزی و گاهی در درون ناحیه شدنی اتفاق می‌افتد.

بهینه $x' = (۰/۷۰۸۴, ۰/۵۸۵۴, ۰/۳۰۳۸, ۹/۰۰۶۸)$ با شکاف دوگانی $\eta = 10^{-6}$ پس از ۳۹ تکرار به دست می‌آید، پس جواب بهینه مسئله اصلی $x^* = (۰, ۰/۷۰۸۴)$ است، به شکل‌های ۳ و ۴ توجه کنید.



شکل ۳- همگرایی مسیرها با روش نقطه درونی



شکل ۴- شکاف دوگانی (η) مربوط به SOCP

برای روشن‌تر شدن تبدیل بالا ما روی یک مثال آن را نشان می‌دهیم.

مثال ۳- مسئله برنامه‌ریزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\min \frac{\| -3x_1 + x_2 + 1 \|^2}{x_1 + x_2 + 2} + \frac{\| x_1 + x_2 + 1 \|^2}{2x_1 - 3x_2 + 1}$$

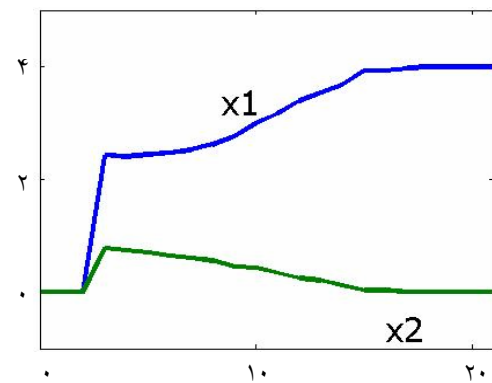
$$s.t. \quad x_1 + x_2 + 2 > 0$$

$$2x_1 - 3x_2 + 1 > 0$$

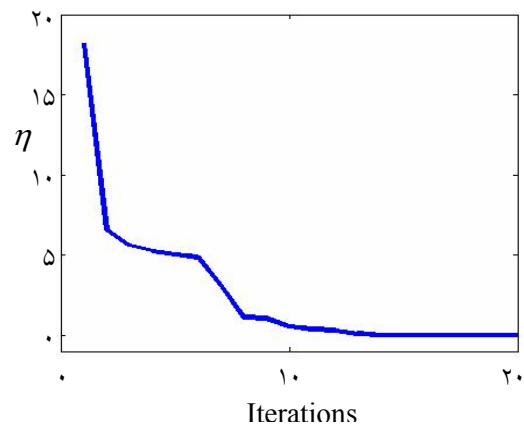
$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

حال با روش نقطه درونی کاهش پتانسیل و با $\epsilon = 10^{-6}$ مسئله (۲۲) را حل می‌کنیم و جواب بهینه مسئله (۰/۱۱۱)، $x' = (۴, ۰, ۰/۱۶۶۷)$ با شکاف دوگانی 10^{-7} بعد از ۲۷ تکرار به دست می‌آید، پس جواب بهینه مسئله اصلی $x = (۴, ۰)$ است، به شکل‌های ۱ و ۲ توجه کنید.



شکل ۱- همگرایی مسیرها با روش نقطه درونی



شکل ۲- شکاف دوگانی (η) مربوط به SOCP

مثال ۲- مسئله برنامه‌ریزی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\min \frac{1}{5x_1 + x_2 + 1} + \frac{1}{7x_1 - x_2 + 4}$$

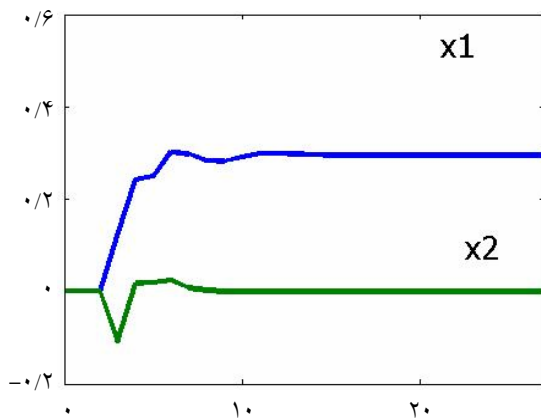
$$+ x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_1x_2 + x_1 - 4x_2 - 8$$

$$s.t. \quad 5x_1 + x_2 + 1 > 0$$

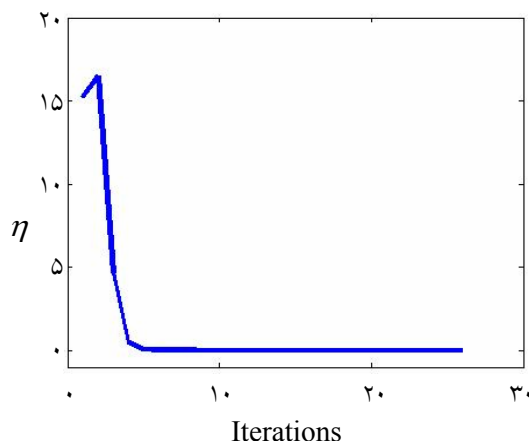
$$7x_1 - x_2 + 4 > 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$
(۲۳)

با تبدیل مسئله (۲۳) به فرم SOCP و حل آن توسط روش نقطه درونی کاهش پتانسیل با $\epsilon = 10^{-5}$ جواب



شکل ۵- همگرایی مسیرها با روش نقطه درونی

شکل ۶- شکاف دوگانی (η) مربوط به SOCP

مثال ۴- مسأله برنامه‌ریزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\min \frac{\|3x_1 - 2x_2 - 4\|^2}{x_1 + x_2 + 2} + \frac{\|x_1 - x_2 + 5\|^2}{2x_1 - 3x_2 + 1}$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 + 2 > 0$$

$$2x_1 - 3x_2 + 1 > 0 \quad (25)$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مسأله (۲۵) توسط روش نقطه درونی کاهش پتانسیل و با $\varepsilon = 10^{-5}$ حل شده و جواب بهینه $(0.2997, 1.0/2305)$ ، دوگانی $\eta = 10^{-6}$ پس از ۲۳ تکرار به دست می‌آید، جواب بهینه مسأله اصلی $x^* = (1/6825, 0)$ است، به شکل‌های ۷ و ۸ توجه کنید.

با معرفی متغیرهای جدید t_1 و t_2 و با فرض این که:

$$\frac{\|3x_1 + x_2 + 1\|^2}{x_1 + x_2 + 2} \leq t_1$$

$$\frac{\|x_1 + x_2 + 1\|^2}{2x_1 - 3x_2 + 1} \leq t_2$$

داریم:

$$\|3x_1 + x_2 + 1\|^2 \leq t_1 (x_1 + x_2 + 2)$$

$$\|x_1 + x_2 + 1\|^2 \leq t_2 (2x_1 - 3x_2 + 1)$$

اکنون با فرض

$$y_1 = t_1, z_1 = x_1 + x_2 + 2, w_1 = \|3x_1 + x_2 + 1\|$$

$$z_2 = 2x_1 - 3x_2 + 1, w_2 = \|x_1 + x_2 + 1\|, y_2 = t_2 \text{ و}$$

و با استفاده از نامساوی (۱۱) مخروط‌های مرتبه دوم زیر را داریم:

$$w_1^2 \leq z_1 y_1, z_1 > 0, y_1 \geq 0 \Leftrightarrow \left\| \frac{w_1}{z_1 - y_1} \right\| \leq z_1 + y_1$$

$$w_2^2 \leq z_2 y_2, z_2 > 0, y_2 \geq 0 \Leftrightarrow \left\| \frac{w_2}{z_2 - y_2} \right\| \leq z_2 + y_2$$

حال مسأله تبدیل یافته ما به صورت زیر می‌باشد:

$$\min t_1 + t_2$$

$$s.t. \quad \left\| \frac{2(3x_1 + x_2 + 1)}{x_1 + x_2 + 2 - t_1} \right\| \leq x_1 + x_2 + 2 + t_1$$

$$\left\| \frac{2(x_1 + x_2 + 1)}{2x_1 - 3x_2 + 1 - t_2} \right\| \leq 2x_1 - 3x_2 + 1 + t_2 \quad (24)$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2, t_1, t_2 \geq 0$$

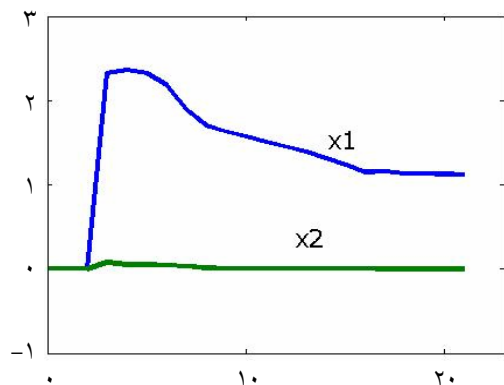
مسأله (۲۴) توسط روش نقطه درونی کاهش پتانسیل و با $\varepsilon = 10^{-5}$ حل شده و جواب بهینه $(0.2951, 0, 0.0057, 1.0/054)$ با شکاف دوگانی $\eta = 10^{-6}$ پس از ۱۶ تکرار به دست می‌آید، که جواب بهینه مسأله اصلی $x^* = (0.2951, 0)$ است، به شکل‌های ۵ و ۶ توجه کنید.

$$\min \left\| \begin{bmatrix} 0.07794 & 0.6265 \\ 0.6265 & 1.6148 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.506 \\ 0.0883 \end{bmatrix} \right\|^2$$

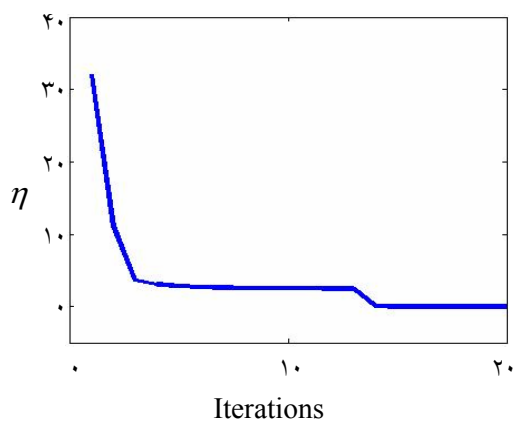
$$+ \frac{0.66667}{x_1 - x_2 + 2} + \frac{\|x_1 + x_2 + 1\|^2}{2x_1 - 3x_2 + 2} \quad (27)$$

s.t. $x_1 - x_2 + 2 > 0$
 $2x_1 - 3x_2 + 1 > 0$
 $x_1 + x_2 \leq 4$
 $x_1, x_2 \geq 0$

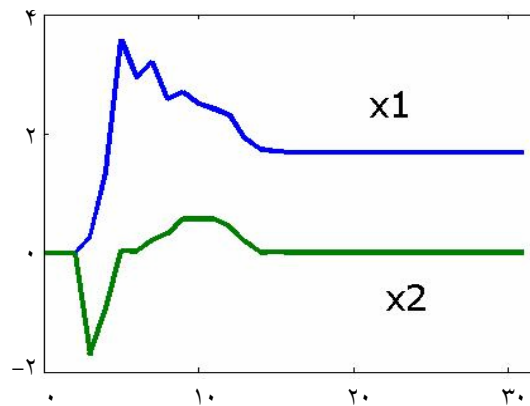
مسأله (۲۷) توسط روش نقطه درونی کاهش پتانسیل و با $\epsilon = 10^{-8}$ حل شده و جواب بهینه مسأله SOCP $x^* = (1/1057, 0, 0/8569, 3/7566, 1/3807)$ با شکاف دوگانی $\eta = 10^{-9}$ پس از ۴۸ تکرار به دست می‌آید. به شکل‌های ۹ و ۱۰ توجه کنید.



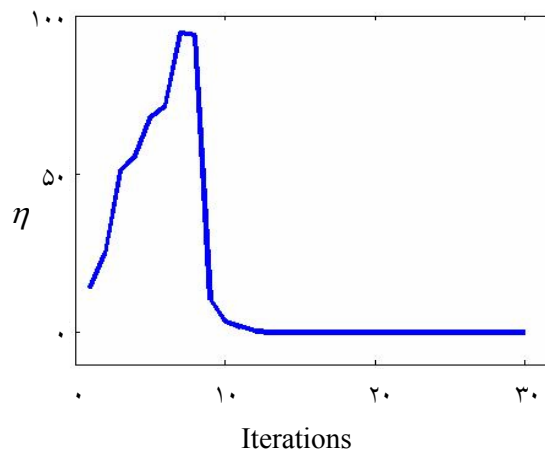
شکل ۹- همگرایی مسیرها با روش نقطه درونی



شکل ۱۰- شکاف دوگانی (η) مربوط به SOCP



شکل ۷- همگرایی مسیرها با روش نقطه درونی



شکل ۸- شکاف دوگانی (η) مربوط به SOCP

مثال ۵- مسأله برنامه‌ریزی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\min \frac{x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_1x_2 + x_1 + x_2 + 12}{x_1 + x_2 + 2} + \frac{\|x_1 + x_2 + 1\|^2}{2x_1 - 3x_2 + 1}$$

s.t. $x_1 + x_2 + 2 > 0$
 $2x_1 - 3x_2 + 1 > 0$
 $x_1 + x_2 \leq 4$
 $x_1, x_2 \geq 0$ (۲۶)

ابتدا مسأله بالا را به مسأله زیر تبدیل می‌کنیم:

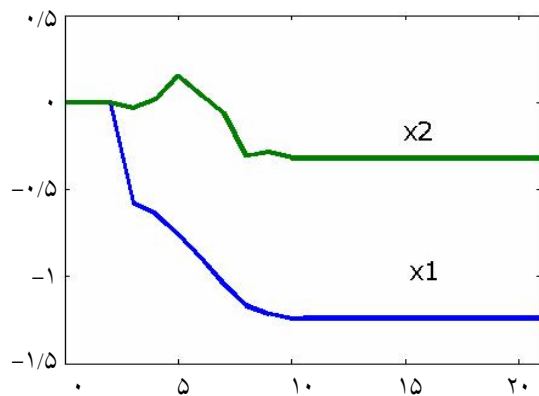
$$\min \frac{\| -3x_1 + 4x_2 + 5 \|^2}{-x_1 + 2x_2 + 4} + \frac{\| -3x_1 + 8x_2 + 4 \|^2}{x_1 + x_2 + 5}$$

$$s.t. \quad -x_1 + 2x_2 + 4 > 0 \quad (29)$$

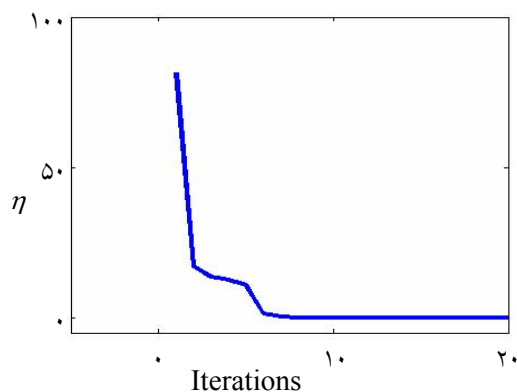
$$x_1 + x_2 + 5 > 0$$

$$2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 - x_2 - 6 \leq 0$$

با تبدیل مسئله بالا به SOCP و حل آن توسط روش نقطه درونی و با $\varepsilon = 10^{-11}$ جواب بهینه مسئله $(0, 0)$ ، $x' = (-1/24, 0/33)$ با شکاف دوگانی $\eta = 10^{-12}$ پس از ۲۰ تکرار به دست می‌آید، پس جواب بهینه مسئله اصلی $x^* = (-1/24, -0/33)$ است، به شکل‌های ۱۳ و ۱۴ توجه کنید.



شکل ۱۳- همگرایی مسیرها با روش نقطه درونی



شکل ۱۴- شکاف دوگانی (η) مربوط به SOCP.

مثال ۸- مسئله برنامه‌ریزی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\min \frac{4x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 - x_1 - 4x_2 + 6}{3x_1 - 7x_2 + 6} + \frac{\| 4x_1 + 8x_2 + 7 \|^2}{x_1 - 4x_2 + 3}$$

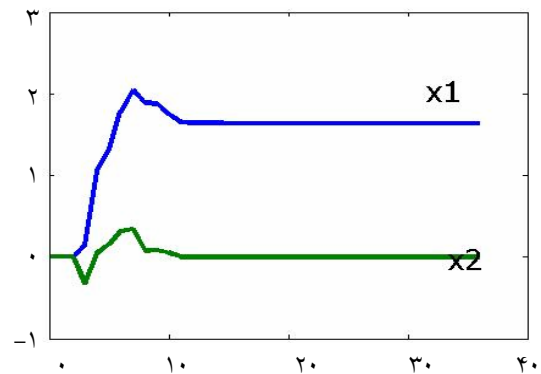
$$s.t. \quad 3x_1 - 7x_2 + 6 > 0$$

$$x_1 - 4x_2 + 3 > 0 \quad (28)$$

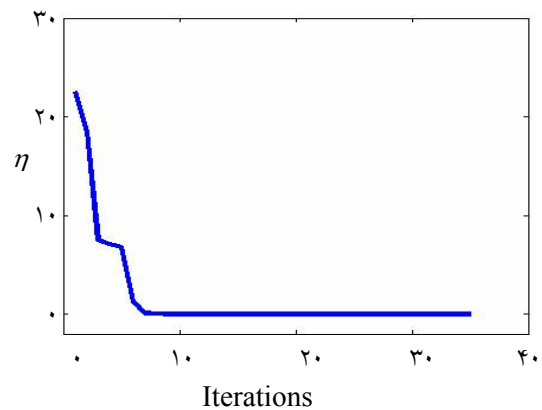
$$x_1 + 5x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

حال با حل مسئله SOCP معادل مسئله (۲۸) با روش نقطه درونی و با $\varepsilon = 10^{-6}$ جواب بهینه $(0/443, 0/1604)$ ، $x' = (1/6367, 0, 0/9925)$ با شکاف دوگانی $\eta = 10^{-9}$ پس از ۳۰ تکرار به دست می‌آید، پس جواب بهینه مسئله اصلی $x^* = (1/6367, 0)$ است، به شکل‌های ۱۱ و ۱۲ توجه کنید.



شکل ۱۱- همگرایی مسیرها با روش نقطه درونی



شکل ۱۲- شکاف دوگانی (η) مربوط به SOCP

مثال ۷- مسئله برنامه‌ریزی کسری زیر را در نظر بگیرید:

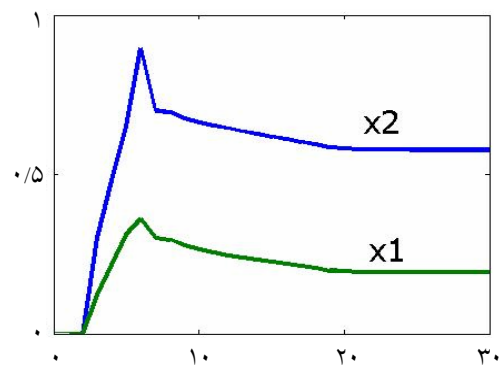
استفاده شده است. سپس رده‌هایی از مسائل برنامه‌ریزی‌های کسری به مسائل از نوع برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم تبدیل شده و با حل روش مذکور جواب بهینه مسئله اصلی به دست می‌آید. امید می‌رود که بتوان مسائل برنامه‌ریزی کسری با قیود کسری را به مسائل برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم تبدیل و با روش مذکور و یا با روش‌های دیگر حل کرد.

مراجع

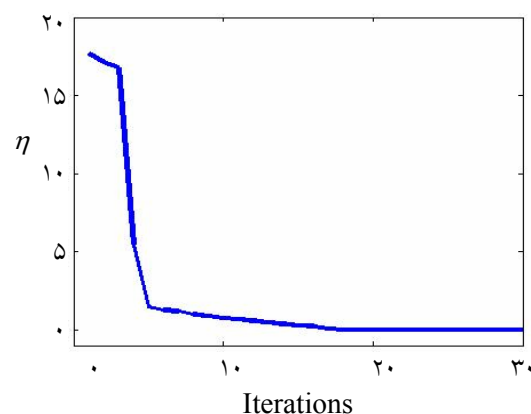
- [1] Sousa lobo, M., Vandenberghe, L., Boyd, S. and Lebret, H., Application of second order cone programming, Published in Linear Algebra and its Applications, 284 (1998) 193-228.
- [2] Akerblad, H., A second order cone programming algorithm for model Predictive control, licentiate thesis department of signals, sensors and systems, royal institute of technology stockholm sweden, (2002) 1-84.
- [3] Wang, B. and Terlaky, T., Implementation of interior point methods for second order conic optimization, A thesis Submitted to the School of Graduate Studies in Partial Fulfillment the Requirements for Degree Master of Science, McMaster, University, (2003) 4-17.
- [4] Nesterov, Y. and Nemirovski, A., Interior-point polynomial methods in SIAM Philadelphia PA, convex programming, 13 (1994).
- [5] Lobo, M.S., Vandenberghe, L. and Boyd, S., Sosp: Software for Second-Order Cone Programming. Information Systems Laboratory, Stanford University, (1997).

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{4x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 - x_1 - 4x_2 + 6}{3x_1 - 7x_2 + 4} \\ & + 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1 - 2x_2 + 4 \quad (30) \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 - 7x_2 + 4 > 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

با تبدیل مسئله (۳۰) به SOCP و حل آن توسط روش نقطه درونی و با $\varepsilon = 10^{-6}$ جواب بهینه مسئله SOCP با $x' = (0/5772, 0/1928, 0/3281, 3994, 0/02)$ شکاف دوگانی $\eta = 10^{-7}$ پس از ۲۷ تکرار به دست می‌آید، جواب مسئله اصلی $x^* = (0/5772, 0/1928)$ است، به شکل‌های ۱۵ و ۱۶ توجه کنید.



شکل ۱۵- همگرایی مسیرها با روش نقطه درونی



شکل ۱۶- شکاف دوگانی (η) مربوط به SOCP

نتیجه گیری

در این مقاله از روش نقطه درونی کاهش پتانسیل اولیه- دوگان برای حل مسائل برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم