مجله بین المللی علوم مهندسی، شماره ۲، جلد۱۶، تابستان ۱۳۸۴، صفحه ۴۱- ۲۹
دانشگاه علم وصنعت ایران

زمان‌بندی تولید انباشته‌های اقتصادی در سیستم‌های کارگاهی انعطاف‌پذیر

سید علی ترابی، سید محمد تقی فاطمی قمی و بهروز کریمی

چکیده: در این مقاله، مسئله زمان‌بندی تولید در یک سیستم تولیدی چند مرحله‌ای از نوع کارگاهی انعطاف‌پذیر مورد بررسی قرار گرفته است. این سیستم‌ها از چندین مرکز کاری (مرحله) تشکیل شده‌اند که در هر مرکز کاری یک یا چند ماشین موازی یکسان وجود دارد و هر محصول با توجه به مسیر ساخت از قبل تعیین شده خود، از تمامی یا زیر مجموعه‌ای از این مراحل عبور می‌کند. در هر مرحله عملیات مربوطه توسط یکی از ماشین‌ها روی کل انباشته مربوط به هر محصول انجام می‌شود. فرضیات اصلی مسئله شامل وجود تقاضای پیوسته و ثابت محصولات طی یک افق برنامه‌ریزی نامحدود و استفاده از رویکرد سیکل مشترک در زمان‌بندی است. هدف مسئله تعیین یک برنامه زمانی بهینه تولید برای این محصولات است به نحوی که مجموع هزینه‌های راه‌اندازی و نگهداری موجودی محصولات در جریان ساخت و نهایی در واحد زمان بدون بروز کمبود موجودی حداقل گردد. بدین منظور یک مدل ریاضی غیرخطی مختلط صفر و یک جدید توسعه یافته است که برای تعیین همزمان جواب بهینه زیرمسائل تخصیص محصولات به ماشین‌ها در هر مرحله، تعیین توالی تولید محصولات تخصیص یافته به هر ماشین در هر مرحله، تعیین اندازه انباشته‌های تولیدی محصولات و برنامه زمانی تولید بکار می‌رود. به علت پیچیدگی محاسباتی بالای این مدل غیرخطی، یک روش ابتکاری برای تعیین جواب نزدیک به بهینه این مسئله ارائه شده و از یک مثال عددی برای بیان کاربردی بودن این روش استفاده شده است. همچنین دو حالت مهم دیگر (یعنی هزینه‌های راه‌اندازی صفر و تجزیه انباشته‌ها) مورد بررسی قرار گرفته و تغییرات لازم در مدل ریاضی و روش حل ارائه شده است.

واژه های کلیدی: زمان‌بندی تولید، سیستم تولید کارگاهی انعطاف‌پذیر، سیکل مشترک، افق نامحدود

۱. مقدمه

سیستم‌های چند مرحله‌ای چند محصولی از نوع کار کارگاهی انعطاف‌پذیر[1] (یا باختصار کارگاهی انعطاف‌پذیر) از سیستم‌های معمول در تولید انواع قطعات گسسته[2] می‌باشند. در این سیستم‌ها که از چندین مرکز کاری (مرحله) تشکیل شده‌اند، در هر مرکز کاری یک یا چند ماشین یکسان وجود دارد و هر محصول با توجه به مسیر ساخت از قبل تعیین شده خود (که در برگه مسیر ساخت[3] آورده می‌شود)، از تمامی یا زیرمجموعه‌ای از این مراحل عبور کرده و در هر مرحله عملیات مربوطه توسط یکی از ماشین‌ها روی کل انباشته انجام می‌شود.

مقاله در تاریخ ۱۳۸۲/۶/۱ دریافت شده و در تاریخ ۱۳۸۲/۱۲/۱۶ به تصویب نهایی رسیده است.

دکتر سید علی ترابی استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی- دانشگاه تهران، satorabi@ut.ac.ir
دکتر سید محمد تقی فاطمی قمی استاد دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیر کبیر، fatemi@aut.ac.ir
دکتر بهروز کریمی استادیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیر کبیر، b.karimi@aut.ac.ir

[1] Flexible job shop
[2] Discrete manufacturing
[3] Route sheet

کاربردهای واقعی این گونه سیستم‌ها در محیط‌های زنجیره تأمین است. یعنی در مواردی که یک تأمین‌کننده که دارای یک سیستم تولیدی از نوع کارگاهی انعطاف‌پذیراست، قطعات مختلفی را برای چندین تولید کننده می‌سازد. در این گونه مواقع، نرخ تقاضای قطعات تولیدی نسبتاً ثابت و پیوسته است و این نرخ‌ها بر اساس حجم قراردادهای تنظیم شده مابین تأمین‌کننده و تولیدکنندگان و نیز ظرفیت سیستم تولیدی تعیین شده‌اند. به عنوان مثال می‌توان از شرکت‌های تولیدکننده قطعات موردنیاز خطوط مونتاژ اتومبیل یا سیستم‌های تولیدی با اتوماسیون بالا نام برد که در هر دو مورد، قطعات مختلفی با نرخ تقریباً ثابتی برای قراردادهای بلند مدت تولید می‌شوند.

بطور کلی در شرایطی که حجم تقاضای محصولات ثابت (یا تقریباً ثابت) است، مسئله زمان‌بندی در حالت تقاضای ثابت و پیوسته با افق برنامه‌ریزی نامحدود مدل‌سازی شده و در واقع فعالیت‌های برنامه‌ریزی و زمان‌بندی تولید به طور همزمان انجام می‌گیرند. مثال فوق نیز بیانگر کاربردی بودن فرضیات مربوط به ثابت بودن نرخ تقاضا و تولید محصولات در یک افق زمانی نسبتاً نامحدود و به تبع آن استفاده از سیاست‌های زمان‌بندی سیکلی (چرخشی[1]) در زمان‌بندی تولید این گونه سیستم‌ها است.

تاریخچه موضوع نشان می‌دهد که اغلب تحقیقات در زمینه مسائل زمان‌بندی در حالت تقاضای ثابت و پیوسته، با فرض وجود یک افق برنامه‌ریزی نامحدود و استفاده از سیاست‌های زمان‌بندی چرخشی نظیر سیاست سیکل مشترک انجام شده‌اند و عمدتاً مربوط به حالات خاص سیستم‌های تولیدی کار کارگاهی انعطاف‌پذیر یعنی سیستم‌های تک‌مرحله‌ای با ماشین‌های موازی [3,4,13] و سیستم‌های چند مرحله‌ای از نوع جریان کارگاهی می‌شوند [5,6,7,11].

همچنین تحقیقات انجام گرفته در خصوص مسئله زمان‌بندی تولید در سیستم‌های کارگاهی در حالت تقاضای پیوسته و ثابت مربوط به اونیچه و همکاران [10,12] می‌شود که البته در حالت افق برنامه‌ریزی محدود این مسئله مورد بررسی قرار گرفته است. یادآوری می‌شود که در این سیستم‌ها در هر مرحله تنها یک ماشین وجود دارد. آنها ابتدا مسئله مذکور را تحت رویکرد سیکل مشترک مدل‌سازی کرده و یک الگوریتم برای یافتن جواب بهینه مسئله ارائه کرده‌اند [10]. سپس همین مسئله را تحت رویکرد سیکل پایه (یا رویکرد چند سیکلی)[2] بررسی کرده و یک الگوریتم ابتکاری برای یافتن جواب نزدیک به بهینه طراحی نموده‌اند [12].

بدین ترتیب مشاهده می‌شود که تاکنون هیچ تحقیقی در خصوص مسئله زمان‌بندی تولید در سیستم‌های کارگاهی انعطاف‌پذیر در حالت تقاضای پیوسته و ثابت محصولات طی یک افق برنامه‌ریزی نامحدود انجام نشده است. البته در خصوص مسئله زمان‌بندی یک سیستم کارگاهی کلاسیک تحقیقات زیادی تاکنون صورت گرفته است. این مسئله به شکل تعیین توالی انجام عملیات و زمان‌های شروع عملیات مجموعه مشخصی از چندین کار غیر قابل تجزیه در یک سیستم کارگاهی تعریف می‌شود. در بررسی ادبیات مربوط به این مسئله نیز مشاهده می‌شود که اهداف مختلفی نظیر حداقل نمودن زمان انجام کل کارها [1,15] و یا حداقل نمودن دیرکرد کارها [2] در تعیین برنامه بهینه تولید بکار رفته‌اند. مسئله زمان‌بندی یک سیستم کارگاهی کلاسیک کاملاً با مسئله مورد بررسی در این مقاله اختلاف دارد زیرا در مسئله کلاسیک، زیرمسائل تعیین اندازه انباشته هر محصول و نحوه تخصیص محصولات به ماشین‌آلات هر مرکز کاری وجود ندارد. علت این امر نیز در این است که در مسئله کلاسیک اولاً اندازه هر کار از ابتدا مشخص بوده و ثانیاً در هر مرحله تنها یک ماشین وجود دارد.

در این مقاله، یک مدل ریاضی غیرخطی مختلط صفر و یک جدید جهت تعیین جواب بهینه مسئله زمان‌بندی تولید با افق نامحدود در سیستم‌های تولیدی از نوع کارگاهی انعطاف‌پذیر قطعی توسعه یافته است. فرضیات اصلی مدل شامل تقاضای پیوسته و ثابت محصولات طی یک افق برنامه‌ریزی نامحدود و استفاده از رویکرد سیکل مشترک در زمان‌بندی است. با حل این مدل می‌توان بطور همزمان جواب بهینه زیرمسائل تخصیص محصولات به ماشین‌آلات هر مرحله و تعیین توالی تولید محصولات تخصیص یافته به هر ماشین در هر مرحله را به همراه اندازه انباشته‌های تولیدی محصولات و برنامه زمانی بهینه تولید مشخص نمود. اهداف موردنظر در زمان‌بندی بهینه تولید شامل تأمین بموقع تقاضای محصولات، کاهش حجم موجودی های در جریان ساخت و کاهش زمان‌های راه‌اندازی است. به عبارت دیگر، تابع هدف بشکل حداقل نمودن مجموع هزینه‌های راه‌اندازی و نگهداری موجودی محصولات نیمه‌ساخته و نهایی در واحد زمان بدون بروز

[1] Cyclic scheduling

[2] Basic period (Multiple cycle) approach

کمبود موجودی[۱] می‌باشد. مسئله مورد بررسی در واقع توسعه مسئله زمان‌بندی انباشته‌های اقتصادی در یک سیستم تک مرحله‌ای[۲] (ELSP) به مسئله زمان‌بندی تولید با افق نامحدود در یک سیستم چندمرحله‌ای چندمحصولی از نوع کارگاهی انعطاف‌پذیر محسوب شده و لذا به مسئله زمان‌بندی انباشته‌های اقتصادی در سیستم‌های کارگاهی انعطاف‌پذیر (ELSP-FJS) نام‌گذاری شده است.

ساختار ادامه مقاله بدین شرح است که ابتدا در بخش دوم، مدل‌سازی مسئله به همراه شرایط لازم برای وجود جواب‌های موجه ارائه شده است. در بخش سوم یک الگوریتم ابتکاری با فرآیند تکراری برای تعیین جواب نزدیک به بهینه مسئله توسعه یافته و در بخش چهارم نیز یک مثال موردی آورده شده است. در بخش پنجم دو حالت مهم دیگر (هزینه‌های راه‌اندازی صفر و تجزیه انباشته‌ها) بررسی و تغییرات حاصله در ساختار مدل ریاضی و روش حل تشریح شده است. بخش ششم نیز به نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای پژوهش‌های آتی اختصاص یافته است.

۲. مدل‌سازی مسئله

در این قسمت ابتدا فرضیات موردنظر در ساخت مدل ریاضی مسئله ELSP-FJS به همراه تعریف پارامترها و متغیرهای آن آورده می‌شود. سپس شرایط لازم برای وجود حداقل یک جواب موجه برای این مسئله بیان شده و به دنبال آن ساختار مدل ریاضی این مسئله ارائه می‌گردد.

۲-۱. فرضیات اساسی مدل ریاضی

- سیستم تولید به صورت کارگاهی انعطاف‌پذیراست، یعنی از چندین مرکز کاری یا مرحله تشکیل شده و در هر مرحله یک یا چند ماشین موازی و یکسان (از لحاظ نوع عملکرد و کلیه پارامترها نظیر نرخ تولید و زمان‌های راه‌اندازی) وجود دارد که همگی به طور پیوسته در دسترس هستند. هر محصول نیز با توجه به مسیر ساخت خود، از تمامی یا زیرمجموعه‌ای از این مراحل عبور می‌کند.
- در مراحل دارای بیش از یک ماشین، عملیات کل انباشته هر محصول تنها روی یک ماشین انجام می‌گیرد. این فرض در حالت یکسان بودن ماشین‌ها (به خصوص در حالت زمان‌های راه‌اندازی بالا) یک فرض بهینه است و از افزایش هزینه‌هایی نظیر دوبله کردن وسایل و تجهیزات موردنیاز تولید یک محصول روی بیش از یک ماشین جلوگیری می‌کند [4].
- هر یک از ماشین‌ها در مراحل مختلف در هر لحظه تنها قادر به پردازش یک نوع محصول می‌باشند.
- فرآیند ساخت هر محصول از قبل تعیین شده و آلترناتیو دیگری وجود ندارد.
- افق برنامه‌ریزی (به دلیل نسبتاً بزرگ بودن آن) نامحدود فرض می‌شود.
- تقاضای هر محصول نهایی پیوسته بوده و دارای نرخ مشخص و ثابت است.
- کمبود موجودی مجاز نبوده و تقاضای محصولات باید به موقع پاسخ داده شوند.
- زمان‌های راه‌اندازی در مقایسه با زمان‌های عملیاتی قابل توجه بوده و به همین علت، تولید محصولات در مراحل مختلف انباشته‌ای است.
- کلیه زمان‌های راه‌اندازی مستقل از توالی[۳] هستند. به عبارت دیگر زمان راه‌اندازی هر محصول در هر مرحله مستقل از نوع محصول تولید شده قبلی روی ماشین مربوطه است.
- به علت پیوسته و ثابت بودن تقاضاها از سیاست زمان‌بندی چرخشی در زمان‌بندی تولید استفاده می‌شود. یعنی برنامه زمانی تولید بارها تکرار می‌شود.
- سیاست زمان‌بندی تولید استفاده از یک زمان سیکل مشترک برای تمامی محصولات است. یعنی در هر سیکل تولیدی، از هر محصول یک انباشته در مراحل مختلف تولید می‌شود.
- اندازه انباشته تولیدی از هر محصول در مراحل مختلف ثابت بوده و برابر با نیاز آن محصول در طی یک سیکل تولید است.
- از قاعده موجودی صفر[۴] استفاده می‌شود. یعنی در هر سیکل، تولید مجدد هر محصول در هر مرحله در زمان صفر بودن موجودی آن صورت می‌گیرد.
- توالی تولید محصولات تخصیصی به هر ماشین از هر مرحله منحصر بفرد بوده و توسط مدل ریاضی، توالی های بهینه تعیین می‌شوند.
- تجزیه انباشته‌ها مجاز نیست.

---

[۱] Backlogging
[۲] Economic lot-scheduling problem (ELSP)
[۳] Sequence independent set up times
[۴] Zero-switch rule

- در انتهای هر مرحله یک انبار موقت با ظرفیت کافی جهت نگهداری محصولات نیمه‌ساخته وجود دارد، بطوری که محدودیتی برای مسئله ایجاد نمی‌نماید.
- بریدگی کارها[1] مجاز نیست. یعنی در هر مرحله پس از راه‌اندازی هر ماشین برای هر محصول، کل انباشته مربوطه یکجا تولید می‌شود.
- ظرفیت هر مرکز کاری جهت پاسخگویی به تقاضای محصولات ورودی به آن کافی بوده و لذا حداقل یک جواب موجه برای مسئله وجود دارد.
- تدارک مواد و قطعات اولیه به موقع و به میزان موردنیاز صورت گرفته و لذا تولید محصولات به علت کمبود مواد اولیه هرگز متوقف نمی‌شود.

۲-۲. پارامترها و متغیرهای مدل ریاضی

پارامترها:

n = تعداد محصولات

m = تعداد مراکز کاری (مراحل) سیستم تولید

m_i = تعداد مراحل موردنیاز محصول i $(i=1,\ldots,n)$

M_j = تعداد ماشین‌های یکسان مرحله j $(j=1,\ldots,m)$

M_{kj} = ماشین k از مرحله j $(j|M_j>1,\ k=1,\ldots,M_j)$

n_j = تعداد محصولات مورد پردازش در مرحله j $(n_j \le n)$

$p(j)$ = مجموعه محصولات مورد پردازش در مرحله j

$\mu(i)$ = مسیر ساخت محصول i (یک مجموعه مرتب از مراحل موردنیاز محصول i)

$\mu(i,r)$ = اندیس مرحله r از فرآیند ساخت محصول i

d_i = نرخ تقاضای محصول i

$p_{i,\mu(i,r)}$ = نرخ تولید محصول i در مرحله r

$s_{i,\mu(i,r)}$ = زمان راه‌اندازی محصول i در مرحله r که مستقل از توالی محصولات فرض می‌شود.

A_i = کل هزینه‌های راه‌اندازی محصول i در هر رانش تولیدی (برای تمامی مراحل)

$h_{i,\mu(i,r)}$ = هزینه نگهداری یک واحد موجودی محصول نیمه‌ساخته i مابین مراحل r و $r+1$ در واحد زمان

h_i = هزینه نگهداری یک واحد محصول نهائی i در واحد زمان

M = یک عدد خیلی بزرگ

متغیرها:

σ_j = بردار توالی تولید محصولات در مرحله j $(j|M_j=1)$

$$\sigma_j = \{\sigma_j(1),\ldots,\sigma_j(n)\};\ j|M_j=1$$

J_{kj} = مجموعه محصولات تخصیص یافته به ماشین M_{kj} (در مراحل با بیش از یک ماشین)

n_{kj} = تعداد محصولات تخصیص یافته به ماشین M_{kj} (در مراحل با بیش از یک ماشین)

σ_{kj} = بردار توالی تولید محصولات تخصیص یافته به ماشین M_{kj} (در مراحل با بیش از یک ماشین)

$$\sigma_{kj} = \{\sigma_{kj}(1),\ldots,\sigma_{kj}(n_{kj})\};\ j|M_j>1,\ k=1,\ldots,M_j$$

T = زمان سیکل تولید (ثابت برای تمامی محصولات)

$b_{i,\mu(i,r)}$ = زمان شروع عملیات انباشته محصول i در مرحله r از فرآیند ساخت آن (پس از خاتمه عملیات راه‌اندازی مربوطه)

$z_{i\ell j}$ = ۱، اگر محصول i در موقعیت ℓ از بردار توالی ماشین مرحله j قرار گیرد $(M_j=1)$ و صفر است در غیر اینصورت

$x_{i\ell kj}$ = ۱، اگر محصول i در موقعیت ℓ از بردار توالی ماشین k از مرحله j قرار گیرد $(M_j>1)$ و صفر است در غیر اینصورت

y_{iukj} = ۱، اگر i و u دو محصول متوالی (u بعد از i) در بردار توالی ماشین k از مرحله j باشند $(M_j>1)$ و صفر است در غیر اینصورت

w_{iukj} = ۱، اگر i و u به ترتیب محصول اول و آخر در بردار توالی ماشین k از مرحله j باشند $(M_j>1)$ و صفر است در غیر اینصورت

تذکر۱: به دلیل ایجاد ارزش افزوده در محصولات نیمه‌ساخته در هر یک از مراحل سیستم تولید، هزینه‌های نگهداری به صورت افزایشی خواهند بود، یعنی خواهیم داشت:

$$h_i > h_{i,\mu(i,r)};\ h_{i,\mu(i,r)} \ge h_{i,\mu(i,r-1)};\ i=1,\ldots,n,\ r=2,\ldots,m_i-1.$$

تذکر۲: متغیرهای $z_{i\ell j}$ برای مراحل با یک ماشین بکاررفته و متغیرهای زیرمسئله تعیین توالی تولید محصولات در این نوع مراحل محسوب می‌شوند. همچنین متغیرهای $x_{i\ell kj}$، y_{iukj} و w_{iukj} برای مراحل با بیش از یک ماشین بکاررفته و متغیرهای مربوط به زیرمسائل تخصیص محصولات به ماشین‌ها و تعیین توالی تولید محصولات در این نوع مراحل می‌باشند.

تذکر۳: متغیر T در واقع بیانگر فاصله زمانی مابین دو رانش متوالی از هر محصول در هر مرحله است. همچنین به لحاظ عدم مجاز بودن کمبود موجودی، باید کلیه راه‌اندازی‌ها و عملیات در هر مرحله در زمانی حداکثر برابر T انجام شود. بدین ترتیب اندازه انباشته محصول i در مراحل مختلف که به علت عدم مجاز بودن کمبود موجودی برابر با نیاز آن در طی زمان سیکل تولید است، به شکل ($Q_i = d_i\,.T$) خواهد بود. همچنین زمان عملیات یک انباشته از محصول i در مرحله j (یعنی t_{ij}) برابر خواهد بود با: $t_{ij} = Q_i / p_{ij} = d_i\,.T / p_{ij}$.

---
[1] Job pre-emption

۲-۳. شرایط لازم برای وجود جواب موجه

شرط لازم برای وجود حداقل یک جواب موجه برای مسئله ELSP-FJS را می‌توان مشابه با مدل تک مرحله‌ای با ماشین‌های موازی به شکل زیر بیان نمود [4]:

$$\sum_{i\in p(j)}\left(\frac{d_i}{p_{ij}}+\frac{s_{ij}}{T}\right)\le M_j\ ;\ \ \forall j=1,\ldots,m.$$

در رابطه فوق عبارت سمت چپ بیانگر کسری از زمان است که برای راه‌اندازی و عملیات کلیه محصولات ورودی به مرحله j جهت جوابگویی به تقاضای آنها در واحد زمان موردنیاز است. البته نظر به اینکه مقدار T مشخص نیست، لذا تعریف دیگر شرط لازم برای وجود حداقل یک جواب موجه به شکل زیر قابل بیان است:

در هر مرحله نظیر j $(j=1,..,m)$، محصولات را به ترتیب غیر افزایشی مقادیر d_i/p_{ij} مرتب کرده و آنها را به ترتیب لیست فوق به ماشینی که دارای ظرفیت باقیمانده فعلی بیشتری است، تخصیص دهید (نظیر قاعده LPT[1] در تخصیص محصولات به چندین ماشین موازی [15]). حال چنانچه رابطه ذیل برقرار باشد، آنگاه حداقل یک جواب موجه برای مسئله وجود خواهد داشت.

$$Min_k\left(1-\sum_{i\in J_{kj}}\frac{d_i}{p_{ij}}\right)>0\ ;\ \ \forall j=1,\ldots,m.$$

۲-۴. مدل ریاضی مسئله

در این قسمت ابتدا جزئیات نحوه تعیین عبارت ریاضی تابع هدف تشریح می‌شود. سپس مدل ریاضی مسئله زمان‌بندی تولید در سیستم‌های کارگاهی انعطاف‌پذیر در حالت افق زمانی نامحدود به همراه توضیحات مربوط به محدودیت‌های آن آورده می‌شود.

تابع هدف مدل ریاضی

هدف مسئله، حداقل نمودن مجموع هزینه‌های راه‌اندازی و نگهداری موجودی محصولات نیمه‌ساخته و نهایی در واحد زمان بدون بروز کمبود موجودی است. از اینرو تابع هدف مدل ریاضی مسئله از دو بخش هزینه‌های راه‌اندازی و نگهداری موجودی تشکیل می‌شود که عبارت ریاضی مربوط به هر یک از آنها به شکل زیر تعیین می‌شود:

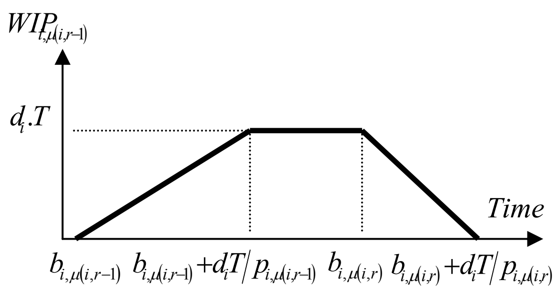
هزینه‌های راه‌اندازی در واحد زمان

بدلیل استفاده از سیاست سیکل مشترک، تعداد راه‌اندازی های هرمحصول (در هر مرحله) در واحد زمان معادل با تعداد سیکل‌های تولید در واحد زمان یعنی $1/T$ است. A_i نیز کل هزینه‌های راه‌اندازی محصول i درمراحل مختلف در هر رانش تولیدی است. این هزینه‌ها مقداری ثابت و مستقل از مقدار متغیرهای تصمیم‌گیری خواهند بود، زیرا زمان‌های راه‌اندازی محصولات در مراحل مختلف مستقل از توالی هستند. بدین ترتیب کل هزینه‌های راه‌اندازی در واحد زمان برابر است با:

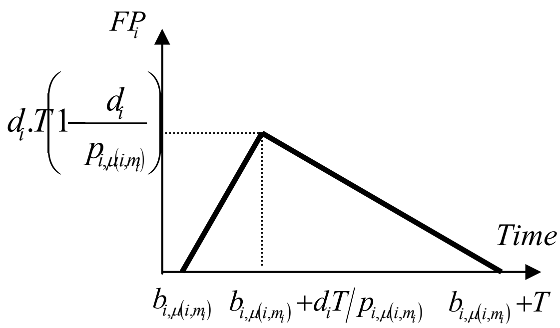
$$TC_{setup}=\sum_{i=1}^{n}A_i/T$$

هزینه‌های نگهداری موجودی در واحد زمان

این هزینه‌ها بخش اصلی هزینه کل سیستم تولید را تشکیل داده و شامل هزینه‌های نگهداری موجودی محصولات نیمه‌ساخته و نهائی می‌شوند. یک روش ساده و مؤثر برای تعیین عبارت ریاضی این نوع هزینه‌ها استفاده از گراف تغییرات سطح موجودی نسبت به زمان است. در اشکال ۱ و ۲ به ترتیب گراف تغییرات سطح موجودی محصول نیمه‌ساخته i مابین مراحل $\mu(i,r-1)$ و $\mu(i,r)$ و گراف تغییرات سطح موجودی محصول نهائی i در انبار محصولات نهایی (پس از مرحله $\mu(i,m_i)$) نشان داده شده است.



شکل ۱. گراف تغییرات سطح موجودی محصول نیمه‌ساخته i مابین مراحل $\mu(i,r-1)$ و $\mu(i,r)$



شکل ۲. گراف تغییرات سطح موجودی محصول نهائی i

سطح زیر گراف ۱ بیانگر کل موجودی محصول نیمه‌ساخته i در مرحله $\mu(i,r-1)$ در طی یک سیکل تولید است. لذا میانگین سطح موجودی این محصول در انبار پس از مرحله $\mu(i,r-1)$ در واحد زمان به شکل زیر خواهد بود:

---
[1] Longest processing time

$$I_{i,\mu(i,r-1)}=\frac{1}{T}\left\{\begin{aligned}&\frac{d_iT}{2}.\frac{d_iT}{p_{i,\mu(i,r-1)}}+d_iT.\\&\left(b_{i,\mu(i,r)}-b_{i,\mu(i,r-1)}-\frac{d_iT}{p_{i,\mu(i,r-1)}}\right)\\&+\frac{d_iT}{2}.\frac{d_iT}{p_{i,\mu(i,r)}}\end{aligned}\right\}$$

$$=d_i\left(\begin{aligned}&b_{i,\mu(i,r)}+\frac{d_iT}{2\,p_{i,\mu(i,r)}}-\\&b_{i,\mu(i,r-1)}-\frac{d_iT}{2\,p_{i,\mu(i,r-1)}}\end{aligned}\right).$$

بنابراین کل هزینه نگهداری موجودی محصولات نیمه‌ساخته در واحد زمان برابر است با:

$$TC_{WIP}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=2}^{m_i}h_{i,\mu(i,r-1)}\,.d_i\,.\left(b_{i,\mu(i,r)}+\frac{d_iT}{2\,p_{i,\mu(i,r)}}-b_{i,\mu(i,r-1)}-\frac{d_iT}{2\,p_{i,\mu(i,r-1)}}\right).$$

همچنین با توجه به شکل ۲، کل هزینه نگهداری موجودی محصولات نهایی در واحد زمان به شکل ذیل خواهد بود:

$$TC_{FPI}=\sum_{i=1}^{n}h_i\,.\,\frac{d_i}{2}\left(1-\frac{d_i}{p_{i,\mu(i,m_i)}}\right).T\,.$$

بنابراین می‌توان عبارت ریاضی تابع هدف میانگین کل هزینه‌ها در واحد زمان را به شکل ذیل نوشت:

$$TC=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{T}+\sum_{i=1}^{n}\left[\begin{aligned}&h_i.\frac{d_i}{2}\left(1-\frac{d_i}{p_{i,\mu(i,m_i)}}\right)+\frac{d_i^2}{2}.\\&\sum_{r=2}^{m_i}h_{i,\mu(i,r-1)}\left(\frac{1}{p_{i,\mu(i,r)}}-\frac{1}{p_{i,\mu(i,r-1)}}\right)\end{aligned}\right].T$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=2}^{m_i}h_{i,\mu(i,r-1)}.d_i\left(b_{i,\mu(i,r)}-b_{i,\mu(i,r-1)}\right).$$

حال با توجه به تابع هدف بدست آمده در فوق و نیز منطق حاکم بر رابطه مابین متغیرهای مختلف مسئله، یک مدل ریاضی غیرخطی مختلط صفر و یک جدید برای مسئله زمان‌بندی تولید در سیستم‌های کارگاهی انعطاف‌پذیر تحت رویکرد سیکل مشترک در حالت افق زمانی نامحدود (مسئله P_1) توسعه یافته است.

تابع هدف مدل ریاضی مسئله ELSP-FJS (یعنی میانگین هزینه کل سیستم در واحد زمان) باید نسبت به ۲۲ نوع محدودیت حداقل گردد. محدودیت‌های شماره (۲) مربوط به عدم امکان همزمانی عملیات یک محصول در مراحل متوالی بوده و بیان می‌کنند که در مرحله دوم از فرآیند ساخت هر محصول و مراحل بعدی، عملیات مربوط به انباشته هر محصول باید پس از اتمام عملیات انباشته این محصول در مرحله قبلی باشد. البته حضور متغیرهای $d_{i,\mu(i,r)}$ در این محدودیت‌ها بیانگر این مطلب است که امکان انجام عملیات راه‌اندازی محصول i در در مرحله $\mu(i,r)$ همزمان با عملیات آخرین واحدهای انباشته این محصول در مرحله $\mu(i,r-1)$ وجود دارد[1]. محدودیت‌های (۳) و (۴) نیز بیانگر عدم امکان تداخل (همزمانی) تولید دو محصول متوالی از بردار توالی هر یک از ماشین‌ها هستند. این محدودیت‌ها نشان می‌دهند که اگر محصولات i و u بترتیب در موقعیت های ℓ و $\ell+1$ از بردار توالی هر ماشینی قرار گیرند، آنگاه بایستی زمان شروع راه‌اندازی محصول u روی این ماشین پس از اتمام عملیات انباشته محصول i روی این ماشین باشد. البته محدودیت‌های (۳) مربوط به مراحلی است که دارای تنها یک ماشین بوده و محدودیت‌های (۴) مربوط به مراحلی است که بیش از یک ماشین دارند. محدودیت‌های (۵) و (۶) مربوط به متغیرهای توالی در مراحلی است که تنها یک ماشین دارند. محدودیت‌های (۵) نشان می‌دهند که هر محصول تنها در یک موقعیت از بردار توالی ماشین مرحله مورد نظر قرار می‌گیرد زیرا طبق سیاست سیکل مشترک در هر سیکل تولید از هر محصول در هر مرحله تنها یک انباشته تولید می‌شود. همچنین محدودیت‌های (۶) بیان می‌کنند که در هر موقعیت از بردار توالی ماشین‌های این نوع مراحل، تنها یک محصول قرار می‌گیرد. محدودیت‌های (۷)، (۸) و (۹) نیز معادل محدودیت‌های (۵) و (۶) بوده و مربوط به مراحلی هستند که بیش از یک ماشین دارند. محدودیت‌های (۷) بیانگر قرار گرفتن هر محصول در یک موقعیت از بردار توالی یکی از ماشین‌های این نوع مراحل بوده و محدودیت‌های (۸) نیز دلالت بر قرار گرفتن حداکثر یک محصول در هر موقعیت از بردار توالی هر یک از ماشین‌های این نوع مراحل دارند. همچنین محدودیت‌های (۹) نشان می‌دهند که اگر موقعیت $\ell+1$ در ماشین M_{kj} توسط محصولی اشغال شده است، باید قبلاً محصول دیگری موقعیت ℓ در این ماشین را

[1] Setup overlapping

اشغال کرده باشد. محدودیت‌های (۱۰) مربوط به مراحل با یک ماشین بوده و نشان می‌دهند که اگر i اولین محصول از بردار توالی ماشین مرحله j باشد $(M_j=1)$، زمان شروع عملیات انباشته آن در این مرحله باید پس از اتمام عملیات راه‌اندازی مربوطه باشد. محدودیت‌های (۱۱) نیز مشابه محدودیت‌های (۱۰) و نشان می‌دهند که اگر i اولین محصول از بردار توالی یکی از ماشین‌های مرحله j باشد $(M_j>1)$، زمان شروع عملیات انباشته آن در این مرحله باید پس از اتمام عملیات راه‌اندازی مربوطه باشد.

محدودیت‌های (۱۲) نیز مربوط به مراحلی است که یک ماشین دارند و برای تضمین سیکلی (چرخشی) بودن برنامه تولید در این نوع مراحل بکار می‌روند. این محدودیت‌ها بیان می‌کنند اگر i و u به ترتیب اولین و آخرین محصول از بردار توالی ماشین مرحله j باشند $(M_j=1)$، آنگاه فاصله زمانی بین زمان خاتمه عملیات انباشته محصول u و زمان شروع راه‌اندازی محصول i روی این ماشین باید حداکثر برابر با زمان سیکل تولید یعنی T باشد.

همچنین محدودیت‌های (۱۳) به همراه محدودیت‌های تکمیلی (۱۴) تا (۲۲) برای تضمین سیکلی بودن برنامه تولید در مراحل دارای بیش از یک ماشین بیان شده و در واقع پیچیده‌ترین بخش مدل ریاضی هستند. محدودیت‌های (۱۳) مشابه محدودیت‌های (۱۲) بوده و برای تضمین سیکلی بودن برنامه تولید در ماشین M_{kj} بیان شده‌اند. محدودیت‌های (۱۴) نشان می‌دهند حداکثر دو محصول خاص نظیر i و u در ماشین M_{kj} بعنوان اولین و آخرین محصولات توالی این ماشین مطرح خواهند بود. صفر شدن عبارت سمت چپ این نوع محدودیت‌ها برای ماشین‌هایی است که تنها یک محصول به آنها اختصاص یافته شده است. محدودیت‌های (۱۵) تا (۱۷) نیز رابطه ما بین متغیرهای $x_{i\ell kj}$ و y_{iukj} را بیان کرده و در واقع شرایط ذیل را تأمین می‌کنند:

$$y_{iukj}=\begin{cases}1 & if \quad x_{i\ell kj}=1, x_{u,\ell+1,kj}=1;\ \forall \ell<n\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

به بیان دیگر این محدودیت‌ها نشان می‌دهند که اگر i و u دو محصول متوالی در ماشین M_{kj} باشند، آنگاه مقدار متغیر y_{iukj} برابر یک خواهد شد. محدودیت‌های (۱۸) نیز نشان می‌دهند که حداکثر یک محصول نظیر u بعد از محصول i در بردار توالی یکی از ماشین‌های مرحله j قرار می‌گیرد. همچنین محدودیت‌های (۱۹) تا (۲۲) بیانگر رابطه مابین متغیرهای w_{iukj} با متغیرهای $x_{i\ell kj}$ و y_{iukj} بوده و در واقع شرایط ذیل را تأمین می‌کنند:

$$w_{iukj}=\begin{cases}1 & if \quad x_{i1kj}=1, \sum_{v\neq u} y_{vukj}=1, \sum_{v\neq u} y_{uvkj}=0\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

یعنی مقدار متغیر w_{iukj} برابر یک خواهد بود اگر محصول i در اولین موقعیت و محصول u نیز در آخرین موقعیت از بردار توالی ماشین M_{kj} قرار گیرند.

محدودیت‌های (۲۳) نیز بیانگر نوع متغیرهای تصمیم‌گیری بوده و نشان می‌دهند که متغیرهای تعیین اندازه انباشته و زمان‌بندی (یعنی متغیرهای T و b_{ij}) پیوسته و غیر منفی بوده و متغیرهای تخصیص و تعیین توالی (یعنی متغیرهای $z_{i\ell j}$، $x_{i\ell kj}$، y_{iukj} و w_{iukj}) نیز متغیرهای صفر و یک می‌باشند.

مسئله P_1:

$$Min\ Z=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{T}+\sum_{i=1}^{n}\left[h_i.\frac{d_i}{2}\left(1-\frac{d_i}{p_{i,\mu(i,m_i)}}\right)+\frac{d_i^2}{2}\sum_{r=2}^{m_i}h_{i,\mu(i,r-1)}\left(\frac{1}{p_{i,\mu(i,r)}}-\frac{1}{p_{i,\mu(i,r-1)}}\right)\right].T$$

$$(1)\qquad +\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=2}^{m_i}h_{i,\mu(i,r-1)}.d_i\left(b_{i,\mu(i,r)}-b_{i,\mu(i,r-1)}\right)$$

Subject to :

$$(2)\quad b_{i,\mu(i,r-1)}+\frac{d_i.T}{p_{i,\mu(i,r-1)}}\le b_{i,\mu(i,r)};\ i=1,\dots,n,\ r=2,\dots,m_i$$

$$(3)\quad b_{ij}+\frac{d_i.T}{p_{ij}}+s_{uj}-b_{uj}\le M\left(2-Z_{i\ell j}-Z_{u,\ell+1,j}\right);\ j|M_j=1,\ i,u\in p(j), u\neq i, \ell<n$$

$$(4)\quad b_{ij}+\frac{d_i.T}{p_{ij}}+s_{uj}-b_{uj}\le M\left(2-x_{i\ell kj}-x_{u,\ell+1,kj}\right);$$

$$\forall k,\ j|M_j>1,\ i,u\in p(j), u\neq i,\ \ell<n$$

$$(5)\quad \sum_{\ell=1}^{n_j} z_{i\ell j}=1;\quad j|M_j=1,\, i\in p(j)$$
$$(6)\quad \sum_{i\in p(j)} z_{i\ell j}=1;\quad j|M_j=1,\, \ell=1,...,n$$
$$(7)\quad \sum_{k=1}^{M_j}\sum_{\ell=1}^{n_j} x_{i\ell kj}=1;\quad j|M_j>1,\, i\in p(j)$$
$$(8)\quad \sum_{i\in p(j)} x_{i\ell kj}\le 1;\quad j|M_j>1,\, k=1,...,M_j,\, \ell=1,....,n$$
$$(9)\quad \sum_{i\in p(j)} x_{i,\ell+1,kj}\le \sum_{i\in p(j)} x_{i\ell kj};\quad j|M_j>1,\, k=1,...,M_j,\, \ell<n$$
$$(10)\quad b_{ij}\ge s_{ij}\,.z_{i1j};\quad j|M_j=1,\, i\in p(j)$$
$$(11)\quad b_{ij}\ge s_{ij}\,.\sum_{k=1}^{M_j} x_{i1kj};\quad j|M_j>1,\, i\in p(j)$$
$$(12)\quad b_{uj}+\frac{d_u\,.T}{p_{uj}}+s_{ij}-b_{ij}-T\le M\left(2-Z_{i1j}-Z_{unj}\right);\ j|M_j=1, i,u\in p(j), u\ne i$$
$$(13)\quad b_{uj}+\frac{d_u\,.T}{p_{uj}}+s_{ij}-b_{ij}-T\le M\left(1-w_{iukj}\right);\ j|M_j>1, k=1,...,M_j, i,u\in p(j),\, u\ne i$$
$$(14)\quad \sum_{i\in p(j)}\ \sum_{\substack{u\ne i,\\ u\in p(j)}} w_{iukj}\le 1;\quad j|M_j>1,\, k=1,...,M_j$$
$$(15)\quad y_{iukj}\le x_{i\ell kj}$$
$$(16)\quad y_{iukj}\le x_{u,\ell+1,kj}$$
$$(17)\quad y_{iukj}\ge 1-M\left(2-x_{i\ell kj}-x_{u,\ell+1,kj}\right);\ j|M_j>1, k=1,....,M_j, i,u\in p(j), u\ne i, \ell<n$$
$$(18)\quad \sum_{k=1}^{M_j}\ \sum_{\substack{u\ne i,\\ u\in p(j)}} y_{iukj}\le 1;\quad j|M_j>1,\, i\in p(j)$$
$$(19)\quad w_{iukj}\le x_{i1kj}$$
$$(20)\quad w_{iukj}\le \sum_{v\ne u} y_{vukj}$$
$$(21)\quad w_{iukj}\le 1-\sum_{v\ne u} y_{uvkj}$$
$$(22)\quad w_{iukj}\ge 1-M\left(2+\sum_{v\ne u} y_{uvkj}-x_{i1kj}-\sum_{v\ne u} y_{vukj}\right);$$
$$j|M_j>1, k=1,....,M_j, i,u,v\in p(j), u\ne i, v\ne u$$
$$(23)\quad T\ge 0, d_{ij}\ge 0;\ \forall i,j, z_{i\ell j}, x_{i\ell kj}, y_{uvkj}, w_{iukj}\in\{0,1\};\ \forall i, u\ne i, v\ne u, \ell, k, j$$

۳.روش حل مدل ریاضی

مسئله P_1 یک مدل غیرخطی مختلط صفر و یک با ابعاد بالا است که حل مستقیم آن جهت تعیین جواب بهینه بسیار مشکل است. ولی نظر به اینکه این مدل دارای تابع هدف غیرخطی (تنها بر حسب متغیر T) و محدودیت‌های خطی است، لذا به منظور کاهش پیچیدگی محاسباتی در حل آن، یک روش ابتکاری با فرآیند تکراری جهت یافتن یک جواب نزدیک به بهینه توسعه یافته است.

۳-۱. روش ابتکاری حل مسئله P_1

مدل ریاضی مسئله P_1 از لحاظ ساختار غیرخطی آن نسبت به متغیر T، مشابه با مدل‌های ریاضی ارائه شده در مراجع [6,7,11] می‌باشد. لذا می‌توان روش حل مشابهی با روش‌های توسعه یافته در این مراجع برای آن طراحی نمود (اثبات های موردنیاز و توضیحات بیشتر را می‌توان در مراجع [6,11] یافت).

ایده اصلی در این روش، حذف متغیر غیرخطی کننده مدل (یعنی T) با معلوم فرض کردن آن در مراحل مختلف از یک فرآیند تکراری و حل متوالی مدل‌های خطی مختلط حاصله تا رسیدن به یک جواب نزدیک به بهینه است.

برای انجام این کار ابتدا می‌توان ثابت نمود که تابع هدف مسئله P_1 به ازای متغیر T در بازه $[T_{lb}, +\infty]$ یک تابع اکیداً محدب[1] است [6]. حال نظر به اینکه برای هر مقدار مشخص T، مسئله P_1 به یک مسئله خطی مختلط صفر و یک تبدیل می‌شود، لذا می‌توان یک جواب ابتکاری نزدیک به بهینه برای این مسئله را از طریق یافتن حداقل مقدار تابع هدف در فضای متغیر T تعیین نمود. برای این منظور ابتدا یک بازه اولیه برای متغیر T به شکل $[T_{lb},T_{ub}]$ تعیین می‌شود که T_{lb} و T_{ub} به ترتیب بیانگر حد پائین و بالا برای متغیر T هستند. سپس توسط یک روش جستجوی تک بُعدی[2] در فضای متغیر T، بهترین زمان سیکل تولید (T^*) و متعاقب آن برنامه زمانی تولید نزدیک به بهینه با حل مدل خطی مختلط صفر و یک مربوطه بدست می‌آید. لذا می‌توان قدمهای اصلی روش ابتکاری حل مسئله P_1 را بشرح ذیل بیان نمود:

قدم اول: محاسبه حد پائین متغیر T (یعنی T_{lb}) با حل مدل خطی مختلط صفر و یک زیر (مسئله P_2):

P_2 مسئله: *Min T*

Subject to: (2) تا (23)

حل مدل خطی مختلط صفر و یک فوق، حداقل مقدار موجه T را برای مسئله P_1 مشخص می‌سازد. لازم به توضیح است که در حل این مدل خطی مختلط صفر و یک و سایر مدل‌های خطی مشابهی که در فرآیند کلی حل مسئله P_1 با آنها مواجه می شویم، می‌توان از نرم افزارهای قوی بهینه سازی در حل مسائل مختلط عدد صحیح با ابعاد بالا نظیر *CPLEX* یا *LINGO* استفاده نمود. در این مقاله از نرم افزار بهینه سازی *LINGO 6* برای این منظور استفاده شده است.

قدم دوم: محاسبه حد بالای متغیر T (یعنی T_{ub}) با حل مدل خطی مختلط صفر و یک زیر (مسئله P_3):

***P_3* مسئله:** *Max T*

Subject to: (2) تا (23) and

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}h_i\,.d_i\left(1-\frac{d_i}{p_{i,\mu(i,m_i)}}\right)+\frac{1}{2}d_i^{\,2}\\ .\sum_{r=2}^{m_i}h_{i,\mu(i,r-1)}\left(\frac{1}{p_{i,\mu(i,r)}}-\frac{1}{p_{i,\mu(i,r-1)}}\right)\end{array}\right].T$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=2}^{m_i}h_{i,\mu(i,r-1)}\,.d_i\left(b_{i,\mu(i,r)}-b_{i,\mu(i,r-1)}\right)\leq Z_{lb}\;(24).$$

عبارت سمت چپ محدودیت (۲۴) بیانگر کل هزینه‌های نگهداری محصولات نیمه‌ساخته و نهایی بوده و Z_{lb} نیز نشانگر مقدار تابع هدف مسئله P_1 به ازای $T=T_{lb}$ است. بدین ترتیب با حل مدل فوق حداکثر مقداری از متغیر T بدست می‌آید که به ازای آن مقدار تابع هدف مسئله P_1 برابر یا کمتر از Z_{lb} است. لازم به توضیح است که Z_{lb} در واقع حد بالا برای هزینه کل سیستم در واحد زمان خواهد بود.

قدم سوم: استفاده از یک روش جستجوی تک بُعدی (نظیر روش جستجوی مقطع طلایی[3] [۱۶]) در فضای متغیر T جهت یافتن زمان سیکل تولید بهینه یا نزدیک به بهینه (T^*) در بازه $[T_{lb},T_{ub}]$.

بدین ترتیب برنامه زمانی تولید بهینه یا نزدیک به بهینه نیز با حل مدل خطی مختلط صفر و یک مربوط به T^* بدست می‌آید. لازم به توضیح است که برای انجام جستجوی تک بُعدی در فضای متغیر T می‌توان از روشهای جستجوی مبتنی بر مشتق‌گیری (نظیر روش دو بخشی[4]) و یا از روش‌های جستجوی خطی بدون نیاز به مشتق‌گیری (نظیر روش مقطع طلایی) استفاده نمود. در این مقاله از روش کاربردی مقطع طلایی به علت سادگی آن و عدم نیاز به مشتق‌گیری از تابع هدف استفاده شده است. در این روش بازه $[T_{lb},T_{ub}]$ در هر تکرار از الگوریتم تنگ تر شده وبا توجه به تلرانس از قبل تعیین شده، نقطه میانی بازه نهایی بعنوان جواب ابتکاری برای T^* و برنامه زمانی حاصله از آن به عنوان برنامه زمانی نزدیک به بهینه انتخاب می‌شوند.

۴. مثال کاربردی

در این قسمت یک مثال از مسئله ELSP-FJS ارائه می‌شود. فرض می‌شود سیستم تولید شامل دو مرکز کاری است. در مرکز کاری اول یک ماشین (M_1=1) و در مرکز کاری دوم نیز دو ماشین یکسان (M_2=2) وجود دارد. جدول ۱ اطلاعات مورد نیاز را برای پنج نوع محصول مختلف نشان می‌دهد.

---

[1] Strictly convex
[2] One-dimensional search
[3] Golden section method
[4] Bi-section method

جدول ۱. اطلاعات مربوط به مثال

i	$\mu(i,r)$	d_i	$p_{i,\mu(i,r)}$	$s_{i,\mu(i,r)}$	A_i	$h_{i,\mu(i,r)}$
1	1	550	4500	0.002	1200	1
	2		2000	0.003		3
2	2	400	1200	0.002	3700	2
	1		3000	0.008		5
3	1	750	5000	0.001	350	1
	2		2600	0.008		3
4	2	500	2000	0.005	1000	1
	1		3000	0.006		2
5	1	650	4500	0.004	4000	3
	2		2500	0.006		7

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} 1.36 & 1.058 & 0.001 & 0.676 & 0.344 \\ 1.64 & 0.002 & 0.975 & 0.11 & 0.975 \end{pmatrix}.$$

مدل ریاضی مربوط به این مثال با روش ابتکاری حل شده است. در قدم اول T_{lb}=1.14 و در قدم دوم T_{ub}=4.76 محاسبه شده‌اند. لذا بازه اولیه به شکل [1.14 ,4.76] خواهد بود. سپس طی۱۴ بار تکرار الگوریتم، بازه نهایی به شکل [2.25,2.27] تعیین شده و لذا T^* =2.26 تقریب زده می‌شود. همچنین با حل مدل خطی مختلط صفر و یک مربوطه، مقدار نزدیک به بهینه تابع هدف TC^*= 15424.35 محاسبه شده است. همچنین بردار مقادیر نزدیک به بهینه متغیر های برنامه زمان‌بندی در ذیل آورده شده است.

۵. دو حالت دیگر مسئله *ELSP-FJS*

در این قسمت حالت هزینه‌های راه‌اندازی صفر و نیز حالت مجاز بودن انتقال زیر انباشته‌ها مورد بررسی قرار گرفته و تغییرات حاصله در ساختار و روش حل مدل ریاضی مسئله ELSP-FJS تشریح می‌گردد.

۵-۱. حالت اول: هزینه‌های راه‌اندازی صفر

در این حالت هزینه‌های راه‌اندازی $(A_i=0,\ i=1,..,n)$ صفر فرض شده و در واقع حالت خاصی از مسئله P_1 اتفاق می‌افتد. این حالت در عمل به دو شکل زیر رخ می‌دهد [5]:

- در مواردی که هزینه‌های راه‌اندازی ماشین‌ها ناچیز باشند. این مورد به خصوص در مواقعی که راه‌اندازی‌ها توسط اپراتور در بخشی از زمان نرمال کاری انجام می‌شوند، رخ می‌دهد.
- در مواردی که تأکید اصلی بر کاهش حجم موجودی‌ها و حداقل نمودن هزینه‌های نگهداری محصولات نیمه‌ساخته (که بخش عمده هزینه کل سیستم هستند) باشد.

همچنین در نظر گرفتن هزینه‌های راه‌اندازی سبب افزایش زمان سیکل تولید شده و بیکاری بیشتری در برنامه زمان‌بندی پدید می‌آید. لذا صفر فرض نمودن آنها از بروز این مسئله نیز جلوگیری می‌نماید.

در این حالت جمله غیرخطی تابع هدف مسئله P_1 از بین رفته و لذا مدل ریاضی این مسئله به یک مدل خطی مختلط صفر و یک تبدیل می‌شود که می‌توان جواب بهینه را به طور مستقیم با حل مدل مربوطه بدست آورد.

۵-۲. حالت دوم: تجزیه زیر انباشته‌ها

دراین حالت که در واقع تعمیم مسئله P_1 است، فرض می‌شود که امکان تجزیه انباشته‌ها و انتقال زیر انباشته‌های هر محصول در هر مرحله نظیر $\mu(i,r)$ $(r=1,..,m_i-1)$ به مرحله بعدی وجود دارد. بدین ترتیب امکان کاهش سطوح موجودی محصولات در جریان ساخت *(WIP)* فراهم می‌شود. نظر به اینکه بخش عمده هزینه‌های سیستم تولید را هزینه نگهداری این نوع موجودی‌ها تشکیل می دهد، این امر سبب کاهش قابل توجهی در هزینه کل سیستم می‌گردد. تغییرات حاصله در ساختار و روش حل مدل ریاضی مسئله P_1 در این حالت در دو مورد ذیل قابل بررسی است:

- $p_{i,\mu(i,r-1)} \geq p_{i,\mu(i,r)}$

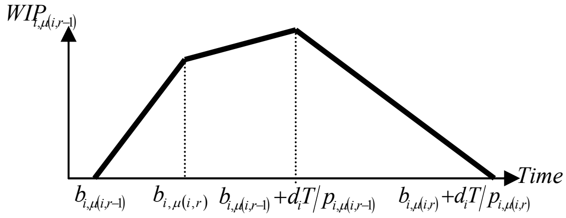
در این مورد سرعت تولید محصول i در مرحله $\mu(i,r-1)$ بیش از سرعت تولید آن در مرحله $\mu(i,r)$ است. بنابراین شروع عملیات آن در مرحله $\mu(i,r)$ باید پس از رسیدن اولین زیر انباشته این محصول از مرحله $\mu(i,r-1)$ باشد. لذا به جای محدودیت (۲) در مدل ریاضی مسئله P_1 محدودیت‌های زیر را خواهیم داشت:

$$b_{i,\mu(i,r)} \geq b_{i,\mu(i,r-1)} + \frac{a_{i,\mu(i,r-1)}}{p_{i,\mu(i,r-1)}} + \tau_{i,\mu(i,r-1)};$$
$$\forall i=1,\dots,n,\ r=2,\dots,m_i \quad (25).$$

$a_{i,\mu(i,r-1)}$= اندازه زیر انباشته انتقالی محصول i از مرحله $\mu(i,r-1)$ به مرحله $\mu(i,r)$

$\tau_{i,\mu(i,r-1)}$= زمان حمل یک زیر انباشته از محصول i از مرحله $\mu(i,r-1)$ به مرحله $\mu(i,r)$

شکل ۳ گراف تغییرات سطح موجودی محصول i در انبار مرحله $\mu(i,r-1)$ را در این حالت نشان می‌دهد.



شکل ۳. گراف تغییرات سطح موجودی محصول نیمه‌ساخته i در مرحله $\mu(i,r-1)$ در حالت $p_{i,\mu(i,r-1)} \geq p_{i,\mu(i,r)}$

بدین ترتیب میانگین سطح موجودی محصولات نیمه ساخته i در بافر مرحله $\mu(i,r-1)$ در واحد زمان برابر خواهد بود با:

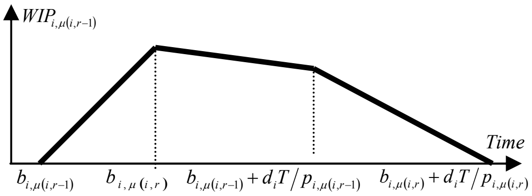
$$I_{i,\mu(i,r-1)} = d_i\left(b_{i,\mu(i,r)} - b_{i,\mu(i,r-1)}\right)\left(2 - \frac{p_{i,\mu(i,r)}}{p_{i,\mu(i,r-1)}}\right) + \frac{1}{2}d_i^2\left(\frac{1}{p_{i,\mu(i,r)}} - \frac{1}{p_{i,\mu(i,r-1)}}\right).T \quad (26).$$

- $p_{i,\mu(i,r)} \geq p_{i,\mu(i,r-1)}$

در این مورد سرعت تولید محصول i در مرحله $\mu(i,r)$ بیش از سرعت تولید آن در مرحله $\mu(i,r-1)$ است. بنابراین شروع عملیات روی آخرین زیر انباشته از این محصول در مرحله $\mu(i,r)$ باید پس از اتمام عملیات آخرین زیر انباشته از این محصول در مرحله $\mu(i,r-1)$ و انتقال آن به مرحله $\mu(i,r)$ باشد. لذا به جای محدودیت‌های (۲) در مدل ریاضی مسئله P_1 محدودیت‌های زیر را خواهیم داشت:

$$b_{i,\mu(i,r)} + \frac{d_i.T}{p_{i,\mu(i,r)}} - \frac{a_{i,\mu(i,r-1)}}{p_{i,\mu(i,r)}} \geq b_{i,\mu(i,r-1)} + \frac{d_i.T}{p_{i,\mu(i,r-1)}} + \tau_{i,\mu(i,r-1)}; \forall i, r = 2,\ldots,m_i \quad (27).$$

در این حالت گراف تغییرات موجودی محصول i در بافر مرحله $\mu(i,r-1)$ تقریباً مشابه حالت قبل بوده و تنها اختلاف در این است که در فاصله زمانی $b_{i,\mu(i,r)}$ تا $b_{i,\mu(i,r-1)}+ t_{i,\mu(i,r-1)}$، سطح موجودی با نرخ $p_{i,\mu(i,r)}- p_{i,\mu(i,r-1)}$ در واحد زمان کاهش می‌یابد. این گراف در شکل ۴ آورده شده است.



شکل ۴. گراف تغییرات سطح موجودی محصول نیمه‌ساخته i در مرحله $\mu(i,r-1)$ در حالت $p_{i,\mu(i,r)} \geq p_{i,\mu(i,r-1)}$

در این حالت نیز $I_{i,\mu(i,r-1)}$ به شکل رابطه (۲۶) در می‌آید. البته چون در این حالت $p_{i,\mu(i,r)} \geq p_{i,\mu(i,r-1)}$ است لذا جمله $p_{i,\mu(i,r)}/p_{i,\mu(i,r-1)}$ بزرگ تر از یک شده و بنابراین متوسط سطح موجودی محصول i در مرحله $\mu(i,r-1)$ در این حالت کمتر از حالت قبلی محاسبه می‌شود که از روی شکل ۴ نیز این مطلب تأیید می‌شود.

بدین ترتیب کل هزینه‌های نگهداری موجودی محصولات نیمه‌ساخته در واحد زمان در حالت امکان انتقال زیر انباشته‌ها در هر مرحله به مرحله بعدی به صورت زیر خواهد بود:

$$TC_{WIP} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=2}^{m_i} h_{i,\mu(i,r-1)}.d_i.\left[\begin{aligned}&\left(b_{i,\mu(i,r)} - b_{i,\mu(i,r-1)}\right)\left(2 - \frac{p_{i,\mu(i,r)}}{p_{i,\mu(i,r-1)}}\right)\\ &+\frac{1}{2}d_i\left(\frac{1}{p_{i,\mu(i,r)}} - \frac{1}{p_{i,\mu(i,r-1)}}\right).T\end{aligned}\right] \quad (28).$$

و عبارت تابع هدف در این حالت به شکل زیر در می‌آید:

$$TC = \sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{T} + \sum_{i=1}^{n}\left[\begin{aligned}&h_i.\frac{d_i}{2}\left(1 - \frac{d_i}{p_{i,\mu(i,m_i)}}\right) +\\ &\frac{d_i^2}{2}\sum_{r=2}^{m_i} h_{i,\mu(i,r-1)}\left(\frac{1}{p_{i,\mu(i,r)}} - \frac{1}{p_{i,\mu(i,r-1)}}\right)\end{aligned}\right].T + \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=2}^{m_i} h_{i,\mu(i,r-1)}.d_i\left(b_{i,\mu(i,r)} - b_{i,\mu(i,r-1)}\right)\left(2 - \frac{p_{i,\mu(i,r)}}{p_{i,\mu(i,r-1)}}\right) \quad (29).$$

به هرحال در این حالت نیز با یک مدل ریاضی غیرخطی مختلط صفر و یک مواجه خواهیم بود که برای حل آن می‌توان از همان روش ابتکاری ارائه شده در بخش سوم استفاده نمود.

۵. نتیجه گیری

در این مقاله یک مدل ریاضی غیرخطی مختلط صفر و یک جدید برای تعیین بهترین برنامه زمان‌بندی تولید در سیستم‌های تولیدی از نوع کارگاهی انعطاف‌پذیر قطعی ارائه شده است. تقاضای محصولات طی یک افق زمانی نامحدود، پیوسته و ثابت فرض شده و از رویکرد سیکل مشترک در زمان‌بندی بهره گرفته شده است. همچنین تغییرات موردنیاز در مدل ریاضی به منظور بکارگیری آن در دو حالت کاربردی دیگری از مسئله (هزینه‌های راه‌اندازی صفر و تجزیه انباشته‌ها) ارائه شده است.

تابع هدف مدل ریاضی مسئله نسبت به متغیر T غیرخطی است. لذا به منظور اجتناب از بکارگیری الگوریتم های پیچیده غیرخطی در حل آن، یک روش ابتکاری جهت یافتن زمان سیکل تولید و برنامه زمانی نزدیک به بهینه توسعه یافته است. این الگوریتم دارای یک فرآیند تکراری بوده و در هر تکرار آن باید یک مدل خطی مختلط صفر و یک حل گردد. بهرحال این روش نیز تنها برای مسائل با ابعاد کوچک و نسبتاً متوسط مناسب بوده و برای مسائل با ابعاد متوسط و بزرگ (یعنی مسائلی که n و m آنها بالا بوده و مراحل زیادی با بیش از یک ماشین وجود دارند)، بدلیل افزایش ابعاد مدل‌های خطی مختلط حاصله و به تبع آن افزایش نمائی زمان حل مسئله، مناسب نیست. لذا توسعه یک روش فوق‌ابتکاری قوی و کارا در حل مسئله P_1 با ابعاد متوسط و بزرگ در یک زمان معقول، یک زمینه تحقیقاتی مناسب خواهد بود. همچنین برای تحقیقات آتی زمینه‌های دیگری وجود دارد که به عنوان مثال می‌توان به موارد ذیل اشاره نمود:

- مدل‌سازی مسئله P_1 تحت رویکرد پریود پایه (که معمولاً جواب بهتری نسبت به رویکرد سیکل مشترک تولید می‌کند) و ارائه روش‌های ابتکاری مناسب برای مسئله
- غیر یکسان فرض نمودن ماشین‌ها در مراحل با بیش از یک ماشین
- مجاز بودن حالت کمبود موجودی

مراجع

[1] Adams, J., Balas, E., Zawack, D., "*The shifting bottleneck procedure for job shop scheduling*" Management Science, Vol. 34, 1988, pp. 391-401.

[2] Baker, K. R., "*Sequencing rules and due-date assignment in a job shop*", Management Science, Vol. 30, No. 9, 1984, pp. 1093-1104.

[3] Bollapragada, R., Rao, U., "*Single-stage resource allocation and economic lot scheduling on multiple, nonidentical production lines*", Management Science, Vol. 45, No. 6, 1999, pp. 889-904.

[4] Carreno, J. J., "*Economic lot scheduling for multiple products on parallel identical processors*", Management Science, Vol. 36, No. 3, 1990, pp. 778-784.

[5] Dobson, G., Yano, C. A., "*Cyclic scheduling to minimize inventory in a batch flow line*", European Journal of Operational Research, Vol. 75, 1994, pp. 441-461.

[6] El-Najdawi, M., Kleindorfer, P. R., "*Common cycle lot-size scheduling for multi-product, multi-stage production*", Management Science, Vol. 39, 1993, pp. 872-885.

[7] Fatemi Ghomi, S. M. T., Torabi, S. A., "*Extension of common cycle lot size scheduling for multi-product, multi-stage arborescent flow-shop environment*", Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B, 26(B1), 2002, pp. 55- 68.

[8] Hsu, J. I. S., El-Najdawi, M., "*Common cycle scheduling in a multi stage production process*", Engineering Costs and Production Economics, Vol. 20, 1990, pp. 73-80.

[9] Hsu, W., *On the general feasibility test of scheduling lot sizes for several products on one machine*, Management Science, Vol. 29, No. 1, 1983, pp. 93-105.

[10] Ouenniche, J. and Boctor, F. F., "*Sequencing, lot sizing and scheduling of several products in job shops: the common cycle approach*", International Journal of Production Research, Vol. 36, No. 4, 1998, pp. 1125-1140.

[11] Ouenniche, J., Boctor, F. F., Martel, A., "*The impact of sequencing decisions on multi-item lot sizing and scheduling in flow shops*", International Journal of Production Research, Vol. 37, No. 10, 1999, pp. 2253-2270.

[12] Ouenniche, J. and Bertrand, J. W. M., "*The finite horizon economic lot scheduling problem in job shops: the multiple cycle approach*", International Journal of Production Economics, Vol. 74, 2001, pp. 49-61.

[13] Pesenti, R., Ukovich, W., "*Economic lot scheduling on multiple production lines with resource constraints*", International Journal of Production Economics, Issue 81-82, 2003, pp. 469-481.

[14] Van Laarhoven, P. J. M., Aarts, E. H. L., Lenstra, J. K., "*Job shop scheduling by simulated annealing, Operations Research*", Vol. 40, No. 1, 1992, pp. 113-125.

[15] Baker, K. R., *Introduction to sequencing and scheduling*, Wiley, New York, 1974.

[16] Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., Shetty, C. M., *Nonlinear programming, Theory and Algorithms, Second Edition*, John Wiley& Sons, Inc, 1993.