

## ارزیابی انتگرال $J$ سه بعدی در حوزه های تنش پسماند جوشکاری

### مجید میرزایی و رحمن سیفی

**چکیده:** انتگرال  $J$  کاربرد گسترده ای در مسائل مکانیک شکست دارد. در صورتی که تنشهای پسماند در جسم وجود داشته باشد، انتگرال  $J$  متعارف و استاندارد مستقل از مسیر نخواهد بود. برای برقراری استقلال از مسیر انتگرال  $J$  در این حالت، تغییراتی در رابطه متعارف آن داده می شود. در این مقاله انتگرال  $J$  برای ترک های موجود در استوانه ای که دارای تنشهای پسماند ناشی از جوشکاری محیطی است، بررسی می شود. بدین منظور ترک های نیم بیضی در موقعیتهای طولی و محیطی مختلف در سطوح داخلی و خارجی استوانه جوشکاری شده در نظر گرفته می شود. برای این ترکها، مقادیر انتگرال تغییر یافته  $J$  با وجود تنش پسماند خالص و نیز بارگذاری ترکیبی تنش پسماند و فشار داخلی بررسی می شود. در همه حالات دیده می شود که انتگرال تغییر یافته، مستقل از مسیر خواهد بود.

### واژه های کلیدی: ترک نیم بیضی، انتگرال $J$ تنش پسماند، جوشکاری محیطی

#### ۱. مقدمه

روش المان محدود (FEM) کاربرد گسترده ای در بررسی پارامترهای مکانیک شکست برای ترک ها و هندسه های غیر استاندارد و مسائل غیر خطی دارد. در مکانیک شکست خطی به راحتی می توان مقدار ضریب شدت تنش را از روی مقدار نرخ آزادی انرژی کرنشی (انتگرال  $J$ ) به دست آورد، ولی در تحلیلهای غیرخطی باید برای بررسی مشخصات ترک از تغییر مکان نوک ترک (CTOD) و یا مقدار نقطه ای انتگرال  $J$  استفاده نمود. در حالت ترک سه بعدی، در نقاط دور از مرز آزاد، می توان شرایط کرنش صفحه ای را غالب دانست ولی در مرزهای آزاد این شرایط به شدت تغییر می کند و از شرایط کرنش صفحه ای دور می شود. البته در تمام نقاط جسم می توان از مقدار نقطه ای انتگرال  $J$  به عنوان پارامتر اصلی و تعیین کننده تغییرات تنش و کرنش در اطراف پیشانی ترک

استفاده نمود [1]. زمانی که در قطعه تنش پسماند وجود ندارد انتگرال  $J$  در حالت های دو بعدی و سه بعدی مستقل از مسیر است ولی اگر تنش پسماند در جسم وجود داشته باشد، انتگرال  $J$  مستقل از مسیر نخواهد بود [2-4]. از طرف دیگر از روش جمع آثار هم نمی توان برای تاثیر تنش پسماند بر خواص ترک استفاده نمود، زیرا ترکیب اثرات بارهای مکانیکی و تنش های پسماند به صورت خطی نخواهد بود [5]. در حالت کلی اگر اثرات عوامل مختلف نیروهای حجمی و لختی، تغییر فرمهای پلاستیک، تنشهای حرارتی و تنشها یا کرنشهای پسماند و اولیه در نظر گرفته شود انتگرال  $J$  استاندارد مستقل از مسیر نخواهد بود [6].

در این مقاله از گونه ای انتگرال استفاده می شود که با وجود تنشهای پسماند هم مستقل از مسیر باقی بماند. نمونه مورد استفاده برای بررسی، یک استوانه تحت فشار می باشد که تنشهای موجود در آن ناشی از جوشکاری می باشد. ترک های نیم بیضی در دو جهت محیطی و طولی در نظر گرفته می شود و اثرات تنش پسماند بر انتگرال  $J$  در نقاط مختلف پیشانی ترک بررسی می گردد.

مقاله در تاریخ ۱۳۸۲/۲/۳۱ دریافت شده و در تاریخ ۱۳۸۲/۱۲/۱۸ به تصویب نهایی رسیده است.

دکتر مجید میرزایی استادیار بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی دانشگاه تربیت مدرس، [mirzaei@modares.ac.ir](mailto:mirzaei@modares.ac.ir)  
رحمن سیفی دانشجوی دکتری مکانیک، دانشکده فنی مهندسی دانشگاه تربیت مدرس

گرهی و تعیین مقادیر داخل انتگرال بر روی آن دشوار است. به همین علت معمولاً "انتگرال خطی معادله (۱) را به انتگرال سطحی در حالت دوبعدی و انتگرال حجمی در حالت سه بعدی تبدیل می‌کنند [7, 8].  
 با استفاده از روش تابع وزنی می‌توان انتگرال خطی را به انتگرال سطحی یا حجمی تغییر داد که تابع وزنی، تغییر مکان مجازی ترک در نقطه مورد نظر خواهد بود [9]. با استفاده از روش فوق و به کارگیری تابع دلخواه  $q$  به عنوان تابع وزنی رابطه (۱) را در حالت انتگرال خطی می‌توان به صورت زیر تغییر داد:

$$J(s) = \int_{\Gamma} \left( W \delta_{ii} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) n_i q d\Gamma \quad (2)$$

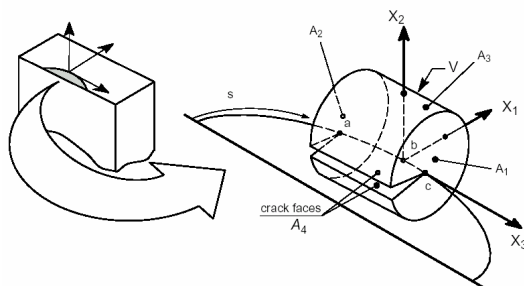
با به کارگیری تئوری دیورژانس و بدون در نظر گرفتن تنشهای پسماند، تنشهای حرارتی، تراکشن سطوح ترک و نیروهای حجمی، انتگرال خطی فوق به انتگرال حجمی تبدیل می‌شود:

$$J(s) = \int_V \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial X_i} - W \delta_{ii} \right) \frac{\partial q}{\partial X_i} dV \quad (3)$$

که در آن  $V$  حجمی است که پیشانی ترک را احاطه کرده است.

## ۲-۲. انتگرال دامنه‌ای $J$ با وجود تنش پسماند

زمانی که در جسم ترکدار تنش پسماند وجود دارد، رابطه (۳) برای محاسبه انتگرال  $J$  مناسب نیست و نتایج آن وابسته به مسیرهای انتگرال گیری خواهد بود، هرچند در این حالت رابطه کلی (معادله (۱)) صادق خواهد بود. برای به دست آوردن رابطه‌ای مستقل از مسیر برای انتگرال  $J$  با وجود تنش پسماند از رابطه کلی معادله (۱) استفاده می‌کنیم و سعی می‌کنیم انتگرال حجمی را در این حالت محاسبه کنیم.



شکل ۲. حجم محدود برای محاسبه انتگرال  $J$

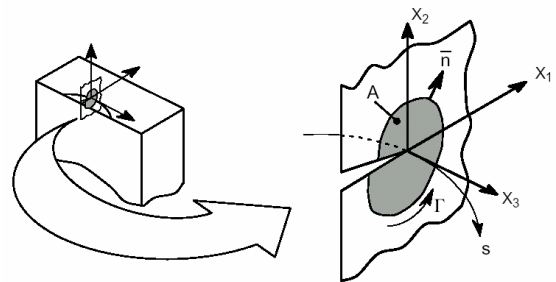
## ۲. تعریف استاندارد انتگرال $J$

مقدار موضعی نرخ آزاد شدن انرژی مکانیکی در هر نقطه مانند  $s$  از پیشانی یا نوک ترک با رابطه زیر داده می‌شود:

$$J(s) = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left( W n_i - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial X_i} n_i \right) d\Gamma \quad (1)$$

که در آن  $\Gamma$  یک منحنی خطی حول نقطه  $s$  در صفحه عمود بر ترک در آن نقطه خواهد بود و بردار  $\vec{n}$  بردار عمود بر  $\Gamma$  در هر نقطه از آن می‌باشد.  $W$  دانسیته انرژی تنش بر واحد حجم،  $\sigma_{ij}$  تانسور تنش و  $\epsilon_{ij}$  تانسور کرنش در نقاط مختلف منحنی خطی  $\Gamma$  خواهد بود.  $\frac{\partial u_j}{\partial X_i}$  گرادیان تغییر مکان‌ها نسبت به جهت  $X_i$  است. شکل (۱) را ببینید.

لازم به ذکر است که در رابطه فوق محور  $X_1$  در امتداد ترک، محور  $X_2$  عمود بر آن در صفحه شامل  $\Gamma$ ، و محور  $X_3$  مماس بر پیشانی ترک و عمود بر صفحه شامل  $\Gamma$  خواهد بود. این به آن معنی است که در رابطه فوق باید به جای مختصات عمومی از مختصات موضعی برای هر نقطه از پیشانی ترک استفاده نمود.



شکل ۱. مشخصات انتگرال  $J$  نقطه‌ای در حالت سه بعدی

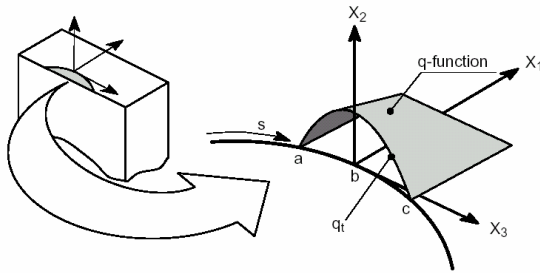
در معادله (۱) از نیروی حجمی و تنش‌های اعمالی به سطوح ترک صرف نظر شده است. علاوه بر آن تنشهای حرارتی و تنشهای پسماند نیز منظور نشده است. برای آن که انتگرال  $J$  مستقل از مسیر بوده و در حالت حدی مقدار غیر صفر و محدودی داشته باشد لازم است که مقدار داخل انتگرال (integrand) معادله از درجه  $\frac{1}{r}$  باشد که در آن  $r$  فاصله از نوک ترک (نقطه  $s$ ) خواهد بود.

## ۲-۱. انتگرال دامنه‌ای $J$ (Domain Integral)

محاسبه مستقیم انتگرال  $J$  بر روی منحنی  $\Gamma$  با روشهای عددی مشکل است زیرا تعریف این منحنی برای عبور از نقاط

در رابطه فوق  $A_q$  مقدار انتگرال خطی مقادیر  $q$  روی پیشانی ترک در محدوده  $s_a < s < s_c$  خواهد بود مقدار  $q$  با توجه به روابط فوق باید دارای مشتق غیر صفر در داخل حجم باشد. با توجه به این که از مقادیر  $q_k$  فقط مقدار  $q_1$  (مقدار  $q$ ) مخالف صفر است لذا مقدار  $\bar{J}_1$  به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$\bar{J}_1 = \int_V \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial X_i} - W \delta_{ii} \right) \frac{\partial q}{\partial X_i} dV \quad (7)$$



شکل ۳. تغییرات تابع وزنی  $q$  در حجم محدود

از مقایسه این رابطه و رابطه (۳) دیده می‌شود که  $\bar{J}_1$  همان مقدار  $J(s)$  در حالت عدم وجود تنش پسماند است. ترم اول رابطه  $\bar{J}_2$  را می‌توان به صورت زیر تغییر داد:

$$\sigma_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial X_j \partial X_i} = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial X_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial X_i} \quad (8)$$

رابطه بین انرژی کرنشی، کرنش و تنش به صورت زیر خواهد بود:

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}^m} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^m \Rightarrow \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^m} \quad (9)$$

با استفاده از این رابطه و قاعده مشتق زنجیره‌ای ترم دوم رابطه  $\bar{J}_2$  به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\frac{\partial W}{\partial X_i} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^m} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^m}{\partial X_i} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^m}{\partial X_i} \quad (10)$$

از مقایسه این رابطه با رابطه (۸) نتیجه می‌شود که برای ماده الاستیک خطی بدون تنش یا کرنش غیر مکانیکی مقدار  $\bar{J}_2$  صفر می‌شود در کل رابطه (۳) به دست می‌آید. زمانی که در جسم تنش پسماند وجود دارد، روابط (۸) و (۱۰) برابر نخواهند بود و لذا  $\bar{J}_2$  برابر صفر نخواهد شد. اگر کرنش غیر الاستیک ناشی از تنش پسماند با  $\varepsilon_{ij}^o$  و کرنش مکانیکی با

حجمی که پیشانی ترک را احاطه کرده است، به صورت یک استوانه خمیده در نظر گرفته می‌شود که محور آن بر پیشانی ترک منطبق باشد. با توجه به شکل (۲) و برای محدوده  $s_a$  تا  $s_c$  انتگرال  $J$  را می‌توان از رابطه زیر محاسبه نمود [10, 11]:

$$\bar{J}_{a-c} = \int_{s_a}^{s_c} J(s) q_t(s) ds = \bar{J}_1 + \bar{J}_2 \quad (4)$$

در این معادله  $q_t$  مقدار  $q$  در هر نقطه از پیشانی ترک خواهد بود. با قرار دادن معادله (۲) در این معادله مقادیر  $\bar{J}_1$  و  $\bar{J}_2$  را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\bar{J}_1 = \int_V \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial X_k} \frac{\partial q_k}{\partial X_i} - W \frac{\partial q_k}{\partial X_k} \right) dV \quad (5)$$

$$\bar{J}_2 = \int_V \left( \sigma_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial X_i \partial X_k} - \frac{\partial W}{\partial X_k} \right) q_k dV$$

در رابطه فوق  $q_k$  عبارت است از مولفه تغییر مکان مجازی ترک در جهت محور  $k$ . ( $k=1,2,3$ ).

بردار تغییر مکان مجازی ترک در جهت رشد واقعی ترک در نظر گرفته می‌شود. مختصات موضعی به نقطه  $s$  منتقل می‌شود و جهت  $X_1$  در جهت رشد ترک منظور می‌شود. اگر مقادیر برداری و تانسوری بر حسب مختصات جدید بیان شوند، مقادیر  $q_1$  و  $q_2$  در معادلات (۵) صفر و مقدار  $q_1$  مخالف صفر می‌شود. مقدار  $q_1$  در نقطه مورد نظر مقدار واحد و در مرزهای حجم مقدار صفر را خواهد داشت. برای نقاط داخلی حجم، تابع  $q_1$  یک تابع دلخواه غیر صفر خواهد بود. پس مقدار  $q_1$  در نقطه  $s$  برابر یک و در سطوح  $A_1$ ،  $A_2$  و  $A_3$  برابر صفر خواهد بود. از این پس به جای نماد  $q_1$  از نماد  $q$  استفاده می‌شود. تغییرات مقدار  $q$  در داخل حجم و مرزهای آن به صورت شماتیک در شکل (۳) آورده شده است. با توجه به شکل دیده می‌شود که تابع  $q_t$  در نقطه  $b$  مقدار واحد و در نقاط  $a$  و  $c$  مقدار صفر را خواهد داشت. با استفاده از مطالب گفته شده، مقدار تقریبی انتگرال  $J$  در نقطه  $b$  ( $J(s_b)$ ) را می‌توان با اعمال قضیه مقدار میانگین از رابطه (۴) به صورت زیر به دست آورد:

$$J(s_b) = \frac{\int_{s_a}^{s_b} J(s) q_t(s) ds}{\int_{s_a}^{s_b} q_t(s) ds} = \frac{1}{A_q} \int_{s_a}^{s_b} J(s) q_t(s) ds \quad (6)$$

که در آن  $nE$  تعداد المانهای داخل حجم و  $nG$  تعداد نقاط گوسی برای هر المان است. مقدار وزنی هر یک از نقاط گوسی هر المان می‌باشد. ژاکوبین تبدیل یک المان ایزوپارامتریک به المان واقعی خواهد بود. در این تحقیق از المان آجری هشت گرهی ایزوپارامتریک استفاده شده است. این المان دارای توابع شکل خطی به صورت زیر می‌باشد:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i) \quad (17)$$

که در آن  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  مختصات ایزوپارامتریک نقاط گرهی یک المان خواهد بود.

تغییرات یک پارامتر مانند  $\phi$  در داخل یک المان واقعی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\phi(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \zeta) \phi_i \quad (18)$$

در این رابطه  $\phi_i$  مقادیر گرهی متغیر  $\phi$  در المان حقیقی خواهد بود. به عنوان نمونه مقدار  $q$  در داخل یک المان از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$q(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 N_i q_i \quad (19)$$

برای محاسبه مشتق یک متغیر در داخل یک المان واقعی رابطه زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X_k} = \sum_{i=1}^8 \sum_{m=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \eta_m} \frac{\partial \eta_m}{\partial X_k} \phi_i \quad (20)$$

به عنوان نمونه برای محاسبه مقدار  $\frac{\partial q}{\partial X_1}$  در داخل یک المان از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial q}{\partial X_1} = \sum_{i=1}^8 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X_1} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X_1} + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} \right) \phi_i \quad (21)$$

در انتگرالگیری بر روی المانهای آجری هشت گرهی، تمام مقادیر وزنی نقاط انتگرالگیری برابر واحد است و همه نقاط در موقعیتهای  $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  قرار می‌گیرند. به عنوان نمونه موقعیت و تابع شکل گره (۱) و موقعیت و مقدار وزنی نقطه گوسی (۱) به ترتیب عبارتند از:

$$(22) \text{ موقعیت و تابع شکل گره (۱)}$$

$$\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = -1.0, \quad N_1 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)$$

$\varepsilon_{ij}^m$  نشان داده شود، کرنش کلی برابر مجموع آن دو خواهد بود:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^m + \varepsilon_{ij}^o \quad (11)$$

و لذا رابطه  $\bar{J}_2$  به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$\bar{J}_2 = \int_V \left( \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial X_1} (\varepsilon_{ij}^m + \varepsilon_{ij}^o) - \frac{\partial W}{\partial X_1} \right) q dV \quad (12)$$

با استفاده از رابطه (۹) رابطه فوق تغییر خواهد کرد:

$$\bar{J}_2 = \int_V \left( \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^o}{\partial X_1} \right) q dV \quad (13)$$

لازم به ذکر است که در تمام روابط فوق مقدار  $W$  برابر انرژی کرنش مکانیکی است.

اگر  $W^o$  انرژی پلاستیک (Plastic dissipation) ناشی از تنش پسماند باشد و  $W^t$  انرژی کل باشد، رابطه بین آنها به صورت زیر خواهد بود:

$$W^t = W + W^o \quad (14)$$

با توجه به روابط فوق رابطه کلی برای انتگرال  $J$  با وجود تنش پسماند به صورت زیر خواهد بود:

$$J(s_b) = \frac{1}{A_q} \int_V \left\{ \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial X_1} - W^t \delta_{1i} \right) \frac{\partial q}{\partial X_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^o}{\partial X_1} q + W^o \frac{\partial q}{\partial X_1} \right\} dV \quad (15)$$

### ۳-۲. محاسبه انتگرال $J$ با روشهای عددی

محاسبه عددی انتگرالهای حجمی معمولاً با روش انتگرالگیری عددی به روش گوس انجام می‌گیرد. در این روش ابتدا نوع المانهای به کار رفته مشخص می‌شود و سپس با استفاده از نقاط انتگرالگیری (نقاط گوسی) و مقدار وزنی مربوط به هر نقطه، انتگرال حجمی محاسبه می‌شود. فرم گسسته (discretized) معادله (۱۵) را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

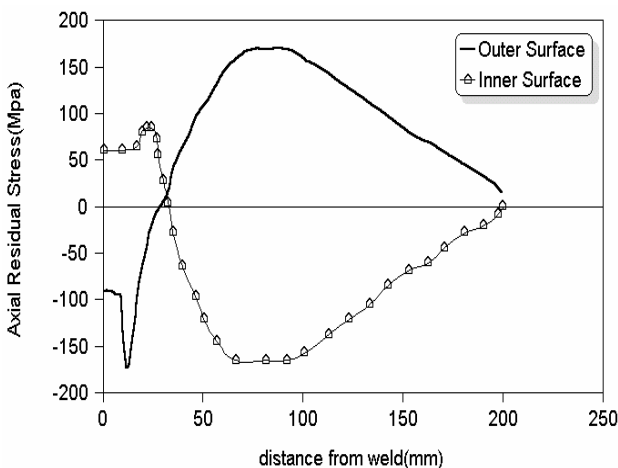
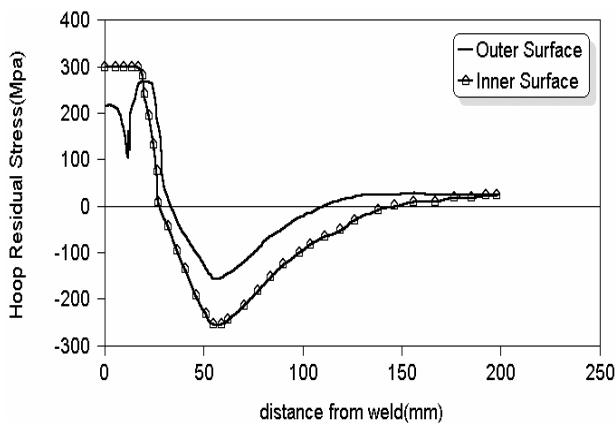
$$J(s_b) = \frac{1}{A_q} \sum_{p=1}^{nE} \sum_{r=1}^{nG} \left\{ \left[ \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial X_1} - W^t \delta_{1i} \right) \frac{\partial q}{\partial X_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^o}{\partial X_1} q + W^o \frac{\partial q}{\partial X_1} \right] \left| \frac{\partial X_m}{\partial \eta_n} \right| \omega_p \right\} \quad (16)$$

طولی در سطح داخلی و خارجی برابر هستند اما علامت آنها مخالف هم می باشد. برای تنش محیطی، تغییرات در جهت ضخامت به صورت خطی فرض شده است. البته تنش محیطی در سطح داخلی و خارجی اختلاف چندانی باهم نخواهند داشت. رابطه بین تنش و کرنش برای جنس استوانه به صورت رابطه Ramberg-Osgood در نظر گرفته شده است:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} \quad \sigma \leq \sigma_0 \quad (26)$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad \sigma > \sigma_0$$

که در آن  $\sigma_0$  تنش تسلیم و  $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$  کرنش حدی و  $n$  و  $\alpha$  نمای کرنش سختی ماده خواهد بود. در این تحقیق مقادیر  $E=195100Mpa$ ،  $\alpha=1.0$ ،  $n=5.0$  و  $\sigma_0 = 250 Mpa$  در نظر گرفته شده است



شکل ۵. تنش پسماند طولی و محیطی در طول استوانه [12]

تحلیل عددی در این تحقیق با استفاده از نرم افزار المان محدود ABAQUS انجام گرفته است [13]. برای اعمال تنش

ارزیابی انتگرال  $J$  سه بعدی در حوزه های تنش پسماند جوشکاری

(۲۳) موقعیت و مقدار وزنی نقطه گوسی (۱)

$$\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad \omega_1 = 1.0$$

همانگونه که ذکر شد باید تمام مقادیر برداری و تانسوری در مختصات موضعی یا محلی محاسبه شوند. انتقال یک متغیر برداری مانند تغییر مکان از رابطه زیر به دست می آید:

$$\{u'_i\} = [L_{ij}] \{u_j\} \quad (24)$$

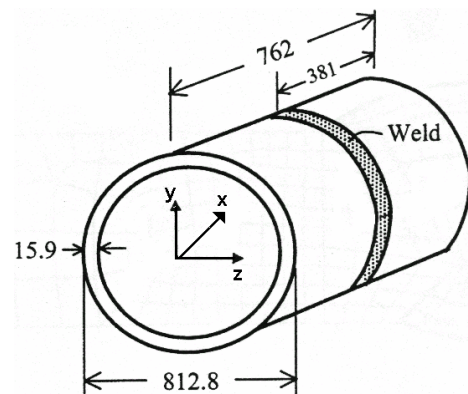
که در آن  $L_{ij}$  کسینوس هادی بین مختصات عمومی و محلی خواهد بود.

انتقال یک پارامتر تانسوری مانند تنش یا کرنش از مختصات عمومی به مختصات محلی با رابطه زیر انجام می گیرد:

$$\{\sigma'_{ij}\} = [L_{im}] \{\sigma_{mn}\} [L_{nj}^T] \quad (25)$$

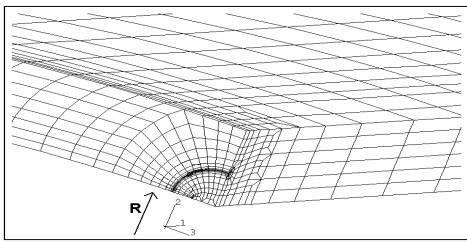
### ۳. تحلیل نمونه عددی

برای بررسی مستقل از مسیر بودن رابطه به دست آمده (رابطه (۱۵)) به تحلیل چند نمونه عددی پرداخته می شود. نمونه مورد استفاده استوانه ای با طول کلی 762 mm، شعاع داخلی 390.5mm و ضخامت 15.9mm است. تنش های پسماند در این نمونه به واسطه جوشکاری محیطی (Girth weld) در وسط طول استوانه به وجود آمده است. هندسه استوانه در شکل (۴) و توزیع تنش های پسماند طولی و محیطی ناشی از جوشکاری در طول استوانه در شکل (۵) آورده شده است [12].



شکل ۴. هندسه استوانه مورد استفاده در محاسبات

این شکلها مقادیر تنش پسماند سطحی را نمایش می دهند. برای تغییرات تنش طولی در ضخامت استوانه از یک تابع کسینوسی استفاده می شود و فرض می شود که مقادیر تنش

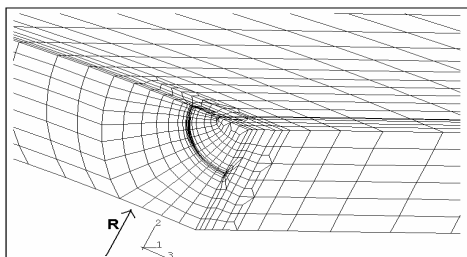


شکل ۶. مدل المان محدود در محل ترک موازی با جوش

پیشانی ترک تقریباً مستقل از مسیر است، در حالی که برای  $J_{std}$  این گونه نیست. در ادامه، مقادیر انتگرال‌های استاندارد و تغییر یافته برای پیشانی ترک با وجود تنش پسماند و فشار داخلی استوانه محاسبه می‌شود. فشار داخلی دارای مقادیر مختلف و حداکثر 2 Mpa خواهد بود. با توجه به این که ترک در سطح داخلی است لذا فشار بر سطوح ترک هم اعمال می‌شود. نیروی محوری حاصل از فشار داخلی با فرض بسته بودن انتهای استوانه، بر سطوح انتهایی اعمال می‌شود. نتایج تحلیل با فشارهای داخلی مختلف در شکل‌های (۸) آورده شده است. نمودارها نشان می‌دهند که مانند حالت قبل انتگرال  $J$  تغییر یافته مستقل از مسیر است ولی انتگرال  $J$  استاندارد مستقل از مسیر نخواهد بود.

### ۳-۲. ترک نیم بیضی موازی با جوش در سطح خارجی استوانه

ابعاد ترک مانند حالت ترک داخلی در نظر گرفته می‌شود. برای حالت وجود تنش پسماند تغییرات انتگرال‌های  $J_{std}$  و  $J_{mdf}$  محاسبه شده است. مدل المان محدود در شکل (۷) و نتایج برای حالت گفته شده در شکل (۹) آورده شده است. در این حالت هم انتگرال تغییر یافته مستقل از مسیر خواهد بود. در این هندسه نیز نیروی محوری ناشی از فشار داخلی با فرض بسته بودن دو انتها در نظر گرفته شده و بر انتهای استوانه به صورت مقدار تنش کششی خارجی اعمال شده است.



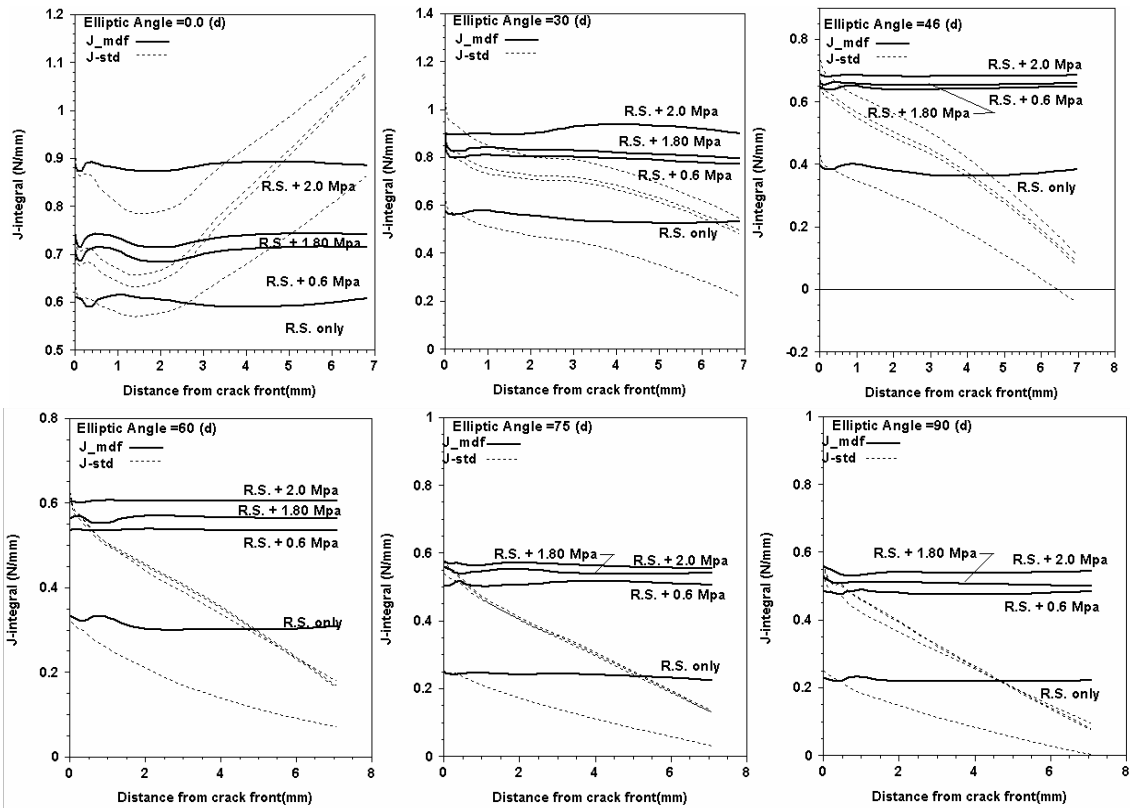
شکل ۷. مدل المان محدود در محل ترک خارجی موازی با جوش (محیطی)

پسماند به جسم از دستوره‌های \*INITIAL CONDITIONS, TYPE=STRESS استفاده شده است. در مرحله قبل از بارگذاری یک مرحله تعادل برای اعمال این تنشها منظور می‌گردد. (یک بار از دستوره‌های \*STEP و \*END STEP بدون اعمال بار خارجی استفاده می‌شود). در این مرحله ترک در جسم وجود ندارد و توزیع تنش با سعی و خطا به گونه‌ای تغییر داده می‌شود که توزیع مورد نظر بعد از مرحله تعادل ایجاد شود. در مرحله بعد ترک در مدل ایجاد می‌شود. برای این کار از روش آزاد کردن گره‌های مرزی مناسب استفاده شده است.

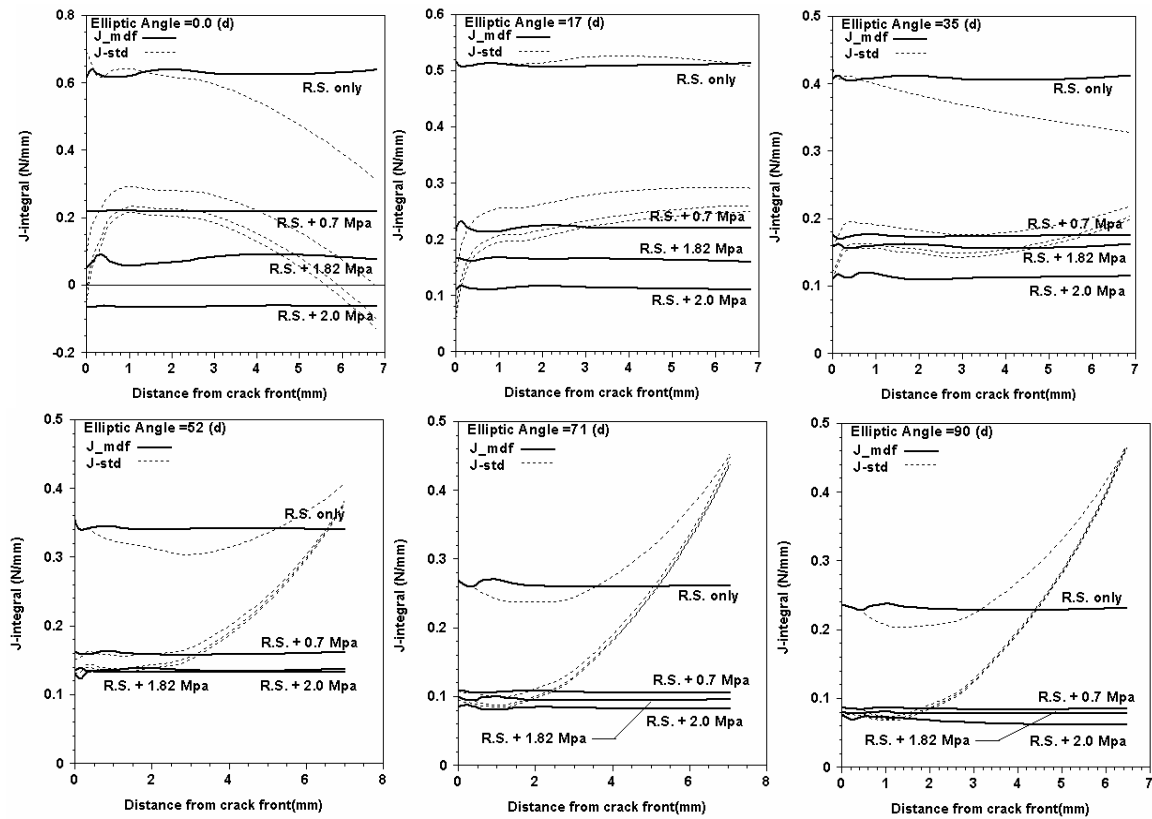
در استوانه ترک‌های نیم بیضی به طول  $2c = 16 \text{ mm}$  و عمق  $a = 7 \text{ mm}$  با روش گفته شده ایجاد می‌گردد. این ترک‌ها هم در سطح داخلی و هم در سطح خارجی به وجود آورده می‌شود. المانهای اطراف پیشانی ترک به گونه‌ای تعریف می‌شوند که بتوان در فواصل مختلف استوانه‌ای با محور خمیده حول پیشانی ترک در نظر گرفت و انتگرال  $J$  را از رابطه (۱۵) محاسبه نمود. تابعی که برای  $q$  در نظر گرفته می‌شود به گونه‌ای است که در جهت موازی پیشانی ترک تغییرات خطی و در جهت عمود بر آن تابع درجه دو خواهد بود. در نقطه مورد نظر مقدار یک و در صفحات مرزی حجم مقدار صفر را خواهد داشت.

### ۳-۱. ترک نیم بیضی موازی با جوش در سطح داخلی استوانه

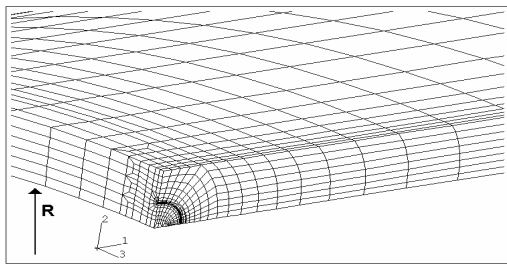
در سطح داخلی استوانه با مشخصات ذکر شده، ترک نیم بیضی با طول  $c = 8 \text{ mm}$  و عمق  $a = 7 \text{ mm}$  در جهت موازی با جوش (جهت محیطی) استوانه ایجاد می‌گردد. به علت تقارنهای موجود در استوانه فقط یک چهارم از آن مدل می‌گردد. ابتدا مدل فقط تحت تاثیر تنش پسماند قرار داده می‌شود و مقادیر انتگرال  $J$  با استفاده از رابطه (۳) با نماد  $J_{std}$  (انتگرال  $J$  استاندارد) و با استفاده از رابطه (۱۵) با نماد  $J_{mdf}$  (انتگرال  $J$  تغییر یافته) برای آن به دست می‌آید. محاسبه انتگرال  $J$  حداکثر دارای شعاعی برابر عمق استوانه هستند. از این نمودارها به دست می‌آید که  $J_{mdf}$  در کلیه مدل المان محدود برای این حالت در شکل (۶) آورده شده است. نتایج تحلیل مدل با تنش پسماند در شکل (۸) نشان داده شده است. استوانه‌های موازی با پیشانی ترک برای نقاط



شکل ۸. مقادیر انتگرال  $J$  استاندارد و تغییر یافته در موقعیتهای مختلف از پیشانی ترک در ترک داخلی موازی با جوش (ترک محیطی)



شکل ۹. مقادیر انتگرال  $J$  استاندارد و تغییر یافته در موقعیتهای مختلف از پیشانی ترک در ترک خارجی موازی با جوش (ترک محیطی)



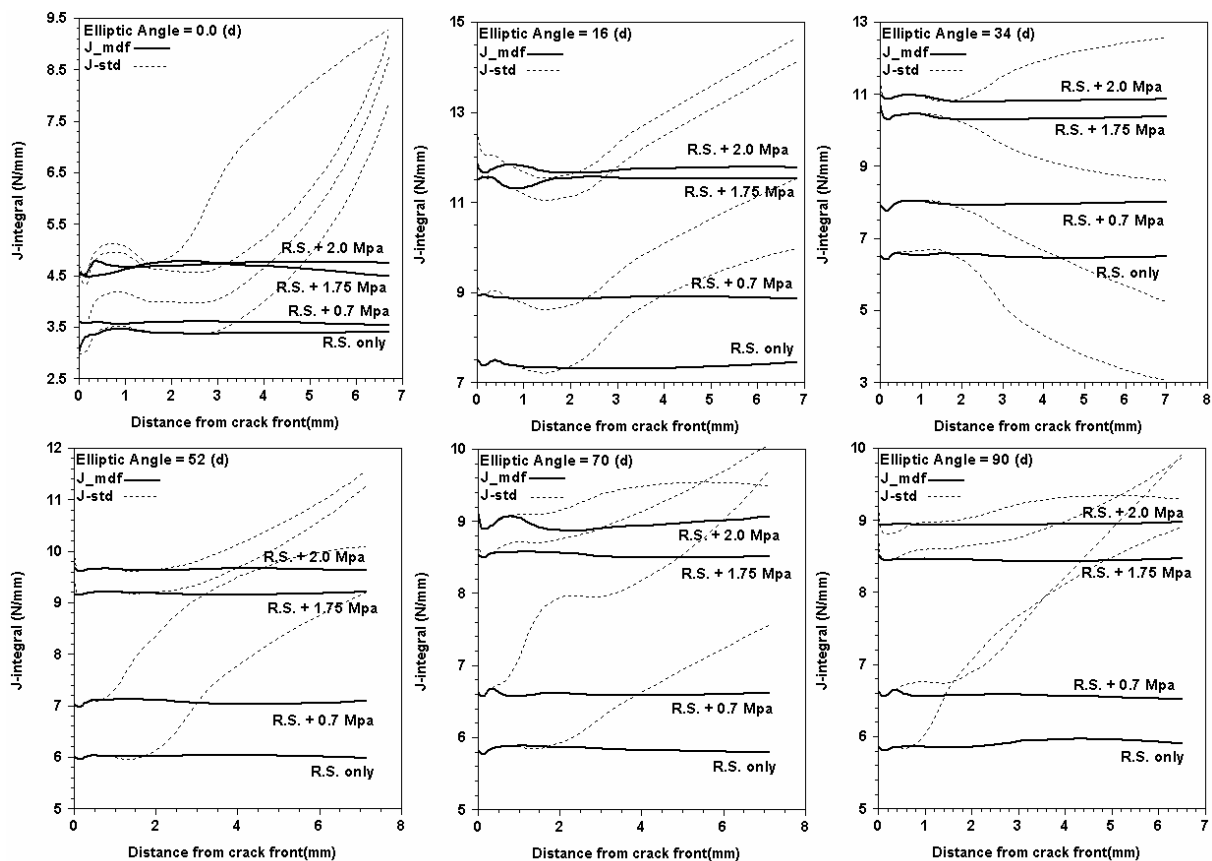
شکل ۱۰. مدل المان محدود در اطراف ترک داخلی عمود بر جوش (ترک طولی)

بر اساس این نمودارها دیده می شود که انتگرال تغییر یافته در کلیه سطوح فشار داخلی تقریباً مستقل از مسیر خواهد بود. مقادیر انتگرال  $J$  در این به نحو قابل ملاحظه‌ای بیشتر مقادیر آن در ترک محیطی خواهد بود و لذا در مقایسه آنها، ترک طولی بحرانی تر خواهد بود

### ۳-۳. ترک نیم بیضی عمود بر جوش در سطح داخلی استوانه

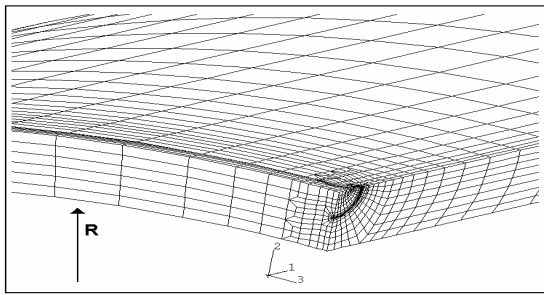
در سطح داخلی استوانه، ترک نیم بیضی با طول  $c = 8 \text{ mm}$  و عمق  $a = 7 \text{ mm}$  در جهت عمود بر جوش (جهت طولی) استوانه ایجاد می‌گردد. به علت تقارنهای موجود در استوانه فقط یک چهارم از آن مدل می‌گردد. مدل المان محدود اطراف ترک در شکل (۱۰) نشان داده شده است.

برای این هندسه هم حداکثر فشار داخلی  $2 \text{ Mpa}$  اعمال می‌شود. مانند دو حالت قبل نیروی محوری ناشی از فشار داخلی به صورت تنش کششی بر انتهای مدل اعمال می‌گردد. مدل در سطوح تنش مختلف و با وجود تنش پسماند تحلیل شده است. در این هندسه هم مقادیر  $J_{std}$  و  $J_{mdf}$  محاسبه شده است. این نتایج در شکل (۱۱) آورده شده است. دیده می‌شود که مقادیر انتگرال  $J$  استاندارد به طور کلی مستقل از مسیر نیست و بر اساس فاصله از پیشانی ترک مقدار آن نیز تغییر خواهد کرد.



شکل ۱۱. مقادیر انتگرال  $J$  استاندارد و تغییر یافته در موقعیتهای مختلف از پیشانی ترک در ترک داخلی عمود بر جوش (ترک طولی)





شکل ۱۲. مدل المان محدود در اطراف ترک خارجی عمود بر جوش (ترک طولی)

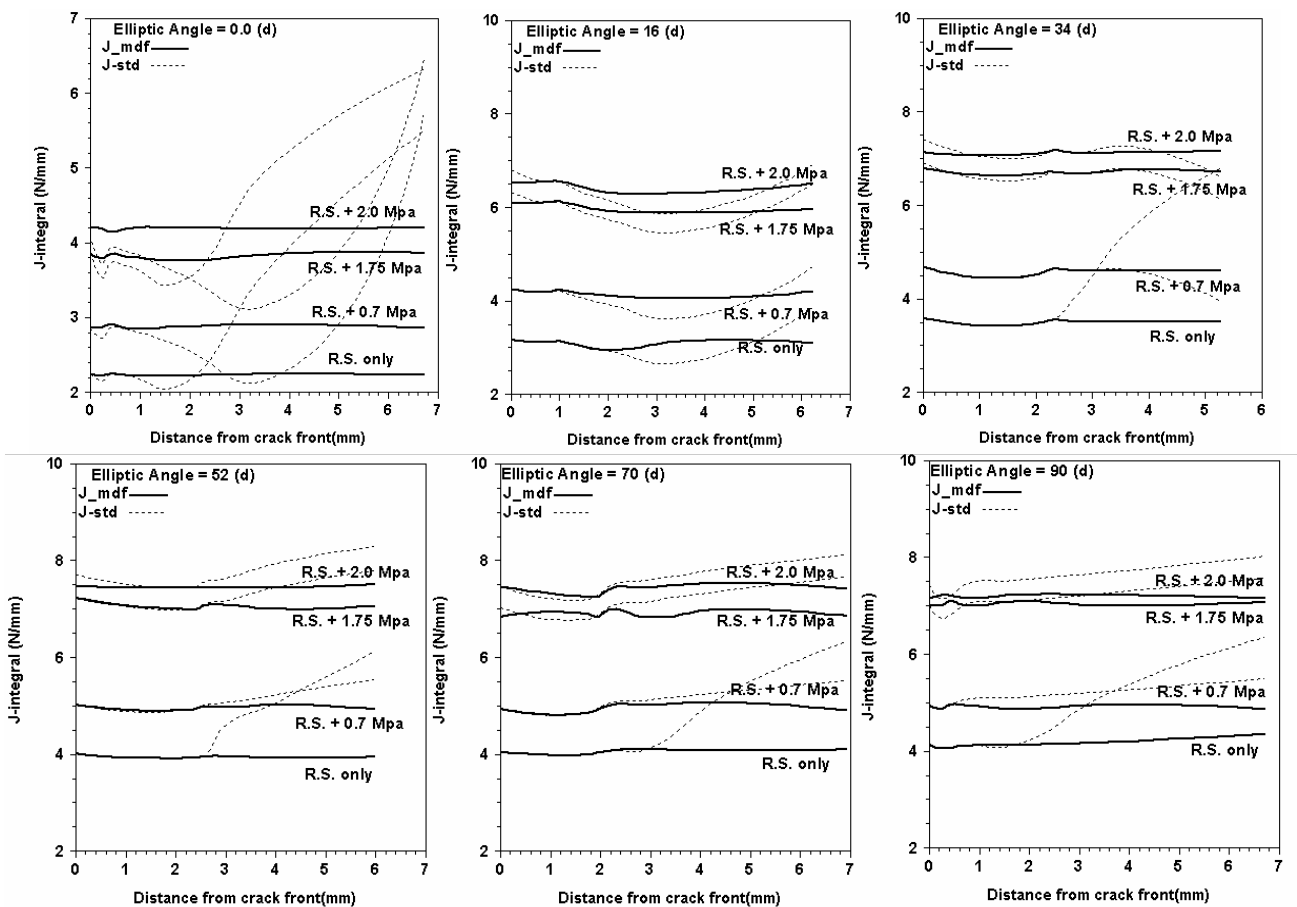
مقایسه انتگرال  $J$  استاندارد و تغییر یافته نشان می‌دهد که دو عامل باعث شده است که این دو انتگرال یکسان نباشند. اول آن که اثر گرادین کرنش اولیه (ناشی از تعادل جسم با وجود تنش پسماند) در انتگرال  $J$  استاندارد در نظر گرفته نشده است. دوم آنکه اثر انرژی پلاستیک ناشی از تنش پسماند در انرژی کرنشی کل در نظر گرفته نمی‌شود.

### ۳-۴. ترک نیم بیضی عمود بر جوش در سطح خارجی استوانه

ابعاد ترک مانند حالت ترک داخلی در نظر گرفته می‌شود. برای حالت وجود تنش پسماند تغییرات انتگرالهای  $J_{std}$  و  $J_{mdf}$  محاسبه شده است. مدل المان محدود در شکل (۱۲) و نتایج برای این هندسه در شکل (۱۳) آورده شده است. حداکثر فشار داخلی برابر ۲ Mpa در نظر گرفته شده است. توجه به نتایج به دست آمده در این شکل (۱۳) دیده می‌شود که انتگرال  $J$  تغییر یافته در حالت وجود تنش پسماند تقریباً مستقل از مسیر است و لذا می‌توان از نتایج آن استفاده نمود.

### ۴. نتیجه گیری

زمانی که تنش پسماند در جسم وجود دارد، انتگرال  $J$  استاندارد مستقل از مسیر نخواهد بود. در این حالت می‌توان از انتگرال  $J$  تغییر یافته استفاده کرد. این انتگرال در حالت وجود تنش پسماند مستقل از مسیر خواهد بود و در حالت بدون تنش پسماند نیز برابر انتگرال  $J$  استاندارد می‌باشد.



شکل ۱۳. مقادیر انتگرال  $J$  استاندارد و تغییر یافته در موقعیتهای مختلف از پیشانی ترک در ترک خارجی عمود بر جوش (ترک طولی)

Mechanics, vol. 29, ASTM STP 1321, West Conshohocken, Pa, ASTM.

[6] Wu Z.M., Zheng B.H., Zhao Z.Y. and Du S.Y., "Finite element analysis of cracked body with residual stress", Joint of International Conference on Fracture of Engineering Materials and Structures, Singapore, 6-8 August 1991, 462-467.

[7] Andesen M.R., "Fatigue crack initiation and growth in ship structures", Ph.D. Thesis, Technical University of Denmark (DTU), January 1998.

[8] Wilson W.K. and Yu I.W., "The use of the  $J$ -integral in thermal stress crack problems", International Journal of Fracture, 1979, 15(4), 377-387.

[9] Rahman S. and Kim J.S., "Probabilistic fracture mechanics for nonlinear structures", International Journal of Pressure Vessels and Piping, 2001, 78, 261-269.

[10] Nikishkov G.P. and Atluri S.N., "Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack, by the 'Equivalent Domain Integral' Method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987, 24, 1801-1827.

[11] Wade A. Meith, Michael R. Hill, "Domain-independent values of the  $J$ -integral for cracks in three-dimensional residual stress bearing bodies", Engineering Fracture Mechanics 69 (2002) 1301-1314

[12] Dong P., "Residual stress analysis of a multi-pass girth weld: 3-D special shell versus axisymmetric models", Journal of Pressure vessel Technology, 2001, 123, 207-213.

[13] ABAQUS, version 5.7, Hibbit, karlsoon and Sorenson Inc. Pawtucket, RI, 1997.

برای بررسی مستقل از مسیر بودن انتگرال  $J$  تغییر یافته، از یک استوانه جوشکاری شده استفاده شده است. در این استوانه یک جوش محیطی در نظر گرفته شده و تنش پسماند ناشی از جوش در محاسبات لحاظ شده است. ترک نیم بیضی در چهار موقعیت مختلف و به صورت ترک داخلی و خارجی موازی با جوش (ترکهای محیطی) و نیز به صورت ترک داخلی و خارجی عمود بر امتداد جوش (ترک طولی) در نظر گرفته شده است. علاوه بر فشار داخلی استوانه اثرات تنش پسماند هم منظور شده است. نتایج محاسبات انتگرال  $J$  استاندارد و تغییر یافته نشان می‌دهد که تقریباً در همه حالات، انتگرال  $J$  تغییر یافته مستقل از مسیر خواهد بود.

### مراجع

[1] Anderson T.L., "Fracture Mechanics: Fundamental and Application", CRC Press, New York, 1995.

[2] Finch D.M. and Burdekin F.M., "Effect of welding residual stress on significance of detects in various type if welded joints", Engineering Fracture Mechanics, 1992, 41(5), 721-735.

[3] Ainworth R.A., Sharples J.K. and Smith S.D., "Effects of residual stress on fracture behavior", Journal of Strain Analysis, 2000, 35(4), 307-316.

[4] Paninton T.L. and Hill M.R., "The effect of residual stress on brittle and ductile fracture initiation predicted by micromechanical models", International Journal of Fracture, 1996, 82, 317-333.

[5] Hill M., Paninton T.L., "Effect of residual stress on brittle fracture testing", Fatigue and Fracture