مجله بین المللی علوم مهندسی، شماره ۴، جلد۱۶، زمستان ۱۳۸۴، صفحه ۱۹-۱۱
دانشگاه علم وصنعت ایران

مروری بر روشهای نقاط محدود و حل معادله دیفرانسیل جابجائی- پخش

حامد ارزانی، محمد هادی افشار و محمد نجمائی

چکیده: در این مقاله ابتدا مرور کوتاهی به روش‌های مختلف عددی می‌شود. روش بدون شبکه بعنوان یکی از روش‌های جدید عددی معرفی و سپس یکی از روش‌ها در مجموعه روش‌های بدون شبکه بمنظور تحلیل معادله دیفرانسیل معمولی جابجائی - پخش یک‌بعدی در حالت دائمی و معادله برگر غیرویسکوز در حالت گذرا بکار گرفته می‌شود. تقریب مورد استفاده روش گالرکین بدون جزء بوده که براساس درونیابی حداقل مربعات وزنی داده‌ها بمنظور دستیابی به انتگرال‌ها فرمولبندی شده است. صحت‌سنجی روش در حالت دائمی با جواب دقیق معادله دیفرانسیل مربوطه، به ازای مقادیر مختلفی از عدد پکلت یا (ضریب مربوط به ترم جابجائی) و همچنین نتایج حل معادله غیرخطی و گذرای برگر در محیط نرم‌افزاری MATLAB، V6.5 برنامه‌نویسی و سپس نتایج مقایسه شده است .

واژه های کلیدی: روش بدون شبکه، گالرگین مستقل از جزء، معادله برگر، حداقل مربعات، توابع وزنی

۱. مقدمه

با پیشرفت سریع وگسترده در فناوری رایانه و خصوصا تحولاتی که درسالهای اخیر در زمینه روش‌های عددی به‌وجود آمده است، نمی‌توان طرح موفقی را بدون استفاده از آنالیزهای عددی قوی انجام داد. اگرچه آنالیزهای عددی هنوز بطور کامل جایگزین اندازه‌گیری - های عملی مهندسی نشده اند اما جایگاه ویژه‌ای در مسائل تحقیقاتی و همچنین مهندسی دارند.

روشهای عددی شامل روش‌هائی همچون تفاضلهای محدود، اجزاء محدود، اجزاء مرزی، احجام محدود و غیره می‌باشد. روش نقاط محدود[1] (بدون شبکه[2]) نیز اخیرا به مجموعه روش‌های عددی اضافه شده است. اگرچه سابقه روش‌های بدون شبکه بیش از یک دهه نیست ولی بستر مناسب و وسیعی برای زمینه‌های علمی- تحقیقاتی و مهندسی طی سال‌های اخیر گردیده است. تفاضل‌های محدود ساده‌ترین و قدیمی‌ترین روش تقریبی است که بکارگیری آن در مسائل با شبکه‌بندی غیر یکنواخت و همچنین اعمال شرایط مرزی پیچیده دارای مشکلاتی است. امروزه اجزاء محدود ابزار کارآمدی در مسائل مکانیک و حوزه‌های وابسته به آن بوده و به خوبی توسعه یافته، ضمن اینکه به‌عنوان ابزاری قدرتمند جهت حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر پدیده‌های پیچیده فیزیکی و خصوصا تحلیل جریان سیالات مطرح بوده و بخش عمده‌ای از مشکلات روش‌های اختلاف محدود را حل نموده است. اساس این روش بر تقسیم‌بندی کل حوزه مسئله به زیرحوزه‌هائی بنام جزء استوار است که مجموع این اجزاء کل حوزه فیزیکی را تشکیل می‌دهند.

آنالیز عددی بسیاری از مسائل در حوزه علوم و مهندسی بر پایه و اساس شبکه‌بندی حوزه می‌باشد که درآن تولید شبکه، معضل اساسی و وقت‌گیر و همراه با بروز خطا می‌باشد. علاوه بر این رفتار بسیاری از پدیده‌هائی که در مهندسی و فیزیک با آن مواجه هستیم را می توان ازطریق معادلات دیفرانسیلی مناسب بیان کرد. حل این معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش‌های تحلیلی تنها به موارد بسیار ساده و با کاربردهای عموما آموزشی محدود است که ازنظر علمی کاربرد چندانی ندارد و صرفا جهت مقایسه و بررسی نتایج عددی به‌منظور صحت سنجی روش و کنترل بکار گرفته می شود.

بمنظور رفع مشکلات مربوط به روش‌های متکی به شبکه تحقیقات وسیعی انجام گردیده است و جهت‌گیری این تحقیقات اولا در راستای اصلاح روش‌های متکی به شبکه و دوم در جهت ارائه روشی نوین بدون نیاز به شبکه‌بندی بوده است که می‌توان بصورت زیر آنها را دسته بندی نمود.

مقاله در تاریخ ۱۳۸۲/۲/۲۱ دریافت شده و در تاریخ ۱۳۸۳/۴/۲۰ به تصویب نهایی رسیده است.

دکتر حامد ارزانی استادیار دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه *شهید رجائی* تهران،Arzani@iust.ac.ir
دکتر محمد هادی افشار دانشیار دانشکده *مهندسی عمران* دانشگاه *علم و صنعت ایران*، mhafshar@iust.ac.ir
دکتر محمد نجمائی دانشکده *مهندسی عمران*، دانشگاه *علم و صنعت ایران*، Najmaei @iust.ac.ir

[1] Finite Points Method
[2] Meshless Method

۱- تولید شبکه بصورت خودکار[۱]

۲- استفاده ازروش نقاط محدود یا (بدون شبکه)

اگرچه تولید خودکار شبکه عموما بسیار موثر و کارآمد در روش‌های متکی به شبکه می‌باشد، اما در بسیاری از مسائل مهندسی تولید شبکه کامل بسیار مشکل است. بهترین راهبرد بمنظور تحلیل مسائل، بخصوص مسائل با ناپیوستگی‌های متحرک[۲] در روش‌های متکی به شبکه، استفاده از شبکه‌بندی مجدد در هر مرحله از تکامل (آنالیز) بگونه‌ای که خطوط شبکه هماهنگ و همراستا با امتداد ناپیوستگی‌ها باشند، است. بنابراین ماهیت اینگونه تحلیل‌ها براساس تشکیل شبکه بندی با توجه به نتایج آنالیز در مرحله قبل می‌باشد. انجام هر مرحله بمنظور دستیابی به دقت مورد نیاز با تغییر در بعد جزء (تظریف[۳]- h) و یا افزایش مرتبه تابع تقریب (تظریف- p) و گاهی نیز با اعمال هر دو (تظریف h-p) به‌صورت تکراری انجام می-گردد. در فرآیند تظریف علی‌رغم وجود پیچیدگی‌ها و همچنین گران بودن آن، بگونه‌ای عمل می‌شود تا دقت محاسبات در تمامی اجزاء بطور یکنواخت و تا حد از پیش تعیین شده‌ای ملحوظ گردد. بکارگیری هر یک از روش‌های تظریف بعد از هر مرحله آنالیز نیازمند به برآورد میزان خطا در هر جزء می‌باشد که توسط برآوردکننده‌های خطا[۴] محاسبه می‌گردد. علاوه بر این مقادیر جواب یا مشتقات آن در روش‌های اجزاء محدود (متکی به شبکه) بمنظور حصول دقت کافی نیازمند هموارسازی[۵] می‌باشد که عموما کارهایی نسبتا سخت به‌لحاظ برنامه‌نویسی و خصوصا اعمال آن در مرزها و بسیار پرهزینه در هر مرحله از اجرا و همچنین در مسائلی مانند اجزاء محدود سه‌بعدی و جریانات با سطح آزاد و غیره می‌باشند. بنابراین علی‌رغم کارآمدی روش‌های متکی به شبکه، به‌دلیل نیاز به فرآیند تظریف در مدلسازی‌های دقیق و همچنین تحلیل ناپیوستگی‌های موجود در بسیاری از مسائل مهندسی و خصوصا ناپیوستگی‌های موجود در امتدادهای غیر واقع در امتداد شبکه‌بندی (مانند پدیده پرش هیدرولیکی در حوزه مسائل مکانیک سیالات و پدیده ناپیوستگی[۶] در حوزه مسائل هوا-فضا و یا پدیده ترک در مکانیک جامدات) به سختی انجام می‌شود.

بمنظور کاستن مشکلاتی از این نوع و همچنین مشکلاتی که درمسایل غیر خطی و مسایل با مرز و لایه متحرک مانند جریان سطح آزاد (جریان روی سرریزها) بخاطر جابجائی و تغییر متوالی شبکه بوجود می‌آید امروزه توجه بسیاری از محققین به روش‌های متکی بر نقطه (بدون شبکه) به‌جای جزء معطوف گردیده است. اگرچه سابقه روش‌های نقاط محدود (بدون شبکه) بیش از یک دهه نیست ولی در طی سال‌های اخیر بستر مناسب و با کاربرد وسیعی برای زمینه‌های علمی-تحقیقاتی و مهندسی گردیده است. البته روش‌های بدون شبکه مانند همه روش‌های عددی روش‌هایی تقریبی در حوزه مسایل عددی می‌باشند و کلیه مفروضات روش‌های تقریبی دراینجا نیز صادق می‌باشد.

مهم‌ترین مزایا و معایب روش‌های بدون شبکه بشرح ذیل می‌باشد:

– توانائی بکارگیری توابع شکل ناپیوسته در معادلات گسسته‌سازی شده

– تولید راحت‌تر و سریع‌تر نقاط بجای اجزاء خصوصا در مسائل با هندسه یا فیزیک پیچیده

– قابلیت انطباق[۷] ساده

– کاهش هزینه محاسبات در مقابل افزایش حجم محاسبات

– استفاده از قابلیت پردازش موازی مشابه سایر روش‌های عددی در تحلیل معادلات پیچیده مانند معادله ناویر- استوکس

روش هیدرودینامیک ذرات هموار[۸] (SPH) [1] بعنوان آغاز بکارگیری نقاط محدود اولین بار بمنظور مدلسازی پدیده‌های نجومی همچون گسترش ستارگان و توده ابرهای غباری بکار گرفته شد. Monaghan و همکاران [2-3] روش برآورد کرنل[۹] را ارائه نمودند، البته این روش فاقد دقت لازم درتحلیل معادلات دیفرانسیل جزئی بود اما در آن از تقریب‌های کرنل بمنظور درون‌یابی مجهولات در روش SPH بکار گرفته شده بود. Johnson و Beissel [4] روشی را بمنظور اصلاح روش SPH و محاسبه کرنش (مشتقات) ارائه نمودند. Liu و همکارانش [5] تابع تصحیح را برای کرنل‌های گسسته و پیوسته ارائه نمودند. Nayroles و همکارانش [6] اولین کسانی بودند که تقریب حداقل مربعات متحرک[۱۰] (MLS) در روش گالرکین را استفاده نموده و آنرا روش جزء پخش[۱۱](DEM) نامیدند. Belytschko و همکاران [7] روش اصلاح شده و دقیق‌تری را بنام گالرکین مستقل از جزء[۱۲] (EFG) ارائه نمودند. کاوه و همکاران [8] بمنظور مقایسه روش بدون شبکه با روش اجزاء محدود، کاربرد تئوری‌گراف و تاثیر توپولوژی حوزه فیزیکی را در روش گالرکین مستقل از جزء بررسی نمودند و بحث جامع و کاملی را درخصوص چیدمان نقاط و نحوه ارتباط آنها و همچنین شرایط لازم برای معکوس‌پذیری ماتریس‌های حاصله ارائه نمودند. Duarte و همکاران [9] در مطالعات خود روش‌های متکی بر حداقل مربعات متحرک را حالت خاصی از روش افراز واحد[۱۳] (Pu) معرفی نمودند. Belytschko و همکاران [10] اولین کسانی بودند که همگرائی این نوع از روش‌ها را اصلاح نمودند. Bonet و همکاران[11] توابع تصحیح را برای پایدار نمودن روش SPH ارائه نمودند. بتدریج روش

[1] Automatic Mesh Generation
[2] Moving Discontinuity
[3] Refinement
[4] Error Estimators
[5] Smoothing
[6] Shock

[7] Adaptivity
[8] Smooth Particle Hydrodynamic
[9] Kernel
[10] Moving Least Square
[11] Diffuse Element
[12] Element Free Galerkin
[13] Partition of Unity

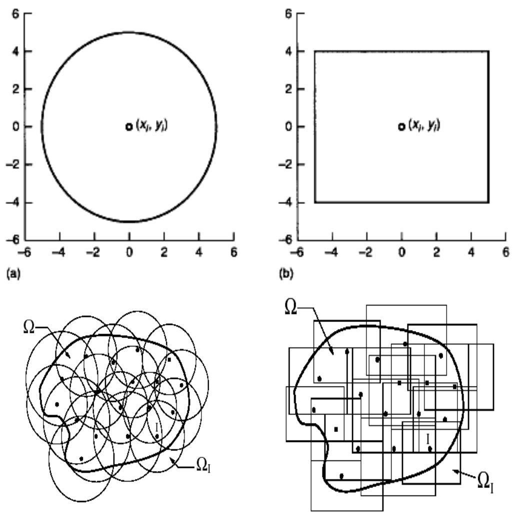
هیدرودینامیک ذرات هموار بعنوان پایه‌ای‌ترین روش و روش‌های دیگر بدون شبکه در حوزه مسائل مکانیک سیالات بکار گرفته شد [12]. استفاده از ذرات در مکانیک سیالات با استفاده از روش‌های نقاط محدود توسط Onate و همکاران [13,14] ارائه شد. در این روش فرمولبندی عمومی‌تری بمنظور دستیابی به مرتبه بالاتری ازتقریب تابع و مشتقات آن ارائه گردیده است.

بکارگیری تابع چندجمله‌ای به‌منظور برازش بر اطلاعات نقاطی است که دارای حداقل فاصله (اختلاف) بین تابع درون‌یابی و مقدار مجهولات در آن نقاط هستند، توسط Taylor[15] و همکاران برای حل معادلات دیفرانسیل ارائه گردید. این ایده همچنین توسط Belytschko و همکارانش [16] در مکانیک سازه‌ها و Idelsohn [17] در مسائل مکانیک سیالات و حل معادلات دیفرانسیل جزئی بکارگرفته شد.

در این مقاله چند روش نقاط محدود (بدون شبکه) مرور می‌گردد و یکی از انواع روش‌های بدون شبکه (روش گالرکین بدون جزء (EFG)) بمنظور تحلیل معادله دیفرانسیل معمولی جابجائی- پخش (خطی و یک بعدی) و همچنین معادله برگر غیر خطی و غیرویسکوز در حالت جابجائی بکار گرفته شده است. از روش معروف گالرکین جهت گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل و دستیابی به معادلات انتگرالی و روش حداقل مربعات متحرک برای تعیین مقادیر تابع شکل در نقاط هر زیرحوزه استفاده می‌شود و توابع وزنی مورد استفاده در تقریب از نوع اسپلاین مرتبه ۳ است.

۲. توابع تقریبی در روش نقاط محدود

درصورتی‌که بررسی تقریب تابع u(x) در حوزه Ω موردنظر باشد. Ω به روش‌های هندسه تحلیلی قابل توصیف با تعدادی مختصات x_k, y_k, z_k : $k = 1,2,...$ در دو یا سه بعد می‌باشد که می‌توان بشکل برداری $X_k = [x_k, y_k, z_k]$ نشان داد و مقادیر مجهول را در این نقاط یافت. نقطه مشترک در تمامی روش‌های نقاط محدود توابع وزنی یا بعبارتی توابع پنجره‌ای می‌باشند و خصوصیت اصلی آن دارا بودن مقدار غیر صفر در داخل زیرحوزه و صفر در خارج از زیرحوزه می‌باشد. هر زیرحوزه Ω_I همبسته به نقطه I بوده و محدوده آن بنام حوزه اثر نقطه موردنظر نامیده می‌شود. مطابق شکل۱ زیرحوزه‌ها عموما بصورت دایره یا کره و مستطیل درنظر گرفته می‌شوند. در شکل۱ کل حوزه پر رنگ (تیره‌تر) و حوزه اثر I با خطوط روشن‌تر نشان داده شده است. براحتی می توان نقطه I و حوزه Ω_I را در کل حوزه تفکیک نمود. همچنین مشاهده می‌شود که درحوزه اثر تعدادی از این دوایر با یکدیگر مشترک بوده و ممکن است چندین دایره یک نقطه را شامل شوند. البته می‌توان ترکیبی از مستطیل و دایره را نیز در یک حوزه بکارگرفت که در اینجا نشان داده نشده است.



شکل۱. حوزه اثر دوبعدی دایره‌ای و مستطیلی

۱-۲. روش هیدرودینامیک ذرات هموار(SPH)

این روش یکی از قدیمی‌ترین روش‌های نقاط محدود روش هیدرودینامیک ذرات هموار می‌باشد این روش با اعمال تقریب‌های کرنل تابع $u(x)$ درحوزه Ω بصورت زیر ارائه می‌شود:

$$u^h(x) = \int_{\Omega} w(x-y,h)u(y)d\Omega \tag{۱}$$

در اینجا $u^h(x)$ تقریب مورد نظر، $w(x-y,h)$ یک کرنل یا تابع وزنی، h اندازه حوزه اثر و x و y مختصات کلی دو نقطه در داخل حوزه می‌باشند. تقریبهای وزنی، توابع هموارساز در روش SPH نیز نامیده می‌شوند.

اساسا توابع وزنی یا کرنلها شرایط زیر را دارند:

در زیرحوزه‌ها (۱) $w(x-y,h) > 0$

در خارج از زیر حوزه‌ها (۲) $w(x-y,h) =$

خاصیت نرمال (۳) $\int_{\Omega} w(x-y,h)d\Omega = 1$

میزان تفاضل ها (۴) $s = \|x-y\|$

با نزدیک شدن h (۵) $w(s,h) \to \delta(s)$

به سمت صفر، تابع وزنی به تابع دلتای دیراک میل می‌کند.

عموما سه تابع وزنی مطرح شامل توابع نمائی، اسپلاین درجه ۳ واسپلاین درجه ۴ بصورت زیر می‌باشند. ما در این بخش، از حوزه اثر دایره‌ای مانند آنچه درشکل۱ نشان داده شده است، استفاده می‌کنیم. لذا پارامتر s دربالا معرف شعاع تاثیر (r) هرحوزه ، w(r) تابع وزنی، $s_{\max}$ متناظر با مقدار h و $r = s/s_{max}$ در فرمول- بندی کلی می‌باشد.

۱) تابع وزنی نمائی

$$w(r) = \begin{cases} e^{-(r/\alpha)^2} & \text{اگر} \quad r \le 1 \\ 0 & \text{اگر} \quad r > 1 \end{cases}$$

۲) تابع وزنی اسپلاین مکعبی

$$w(r)=\begin{cases}\frac{2}{3}-4r^2+4r^3 & \text{اگر} \quad r\le\frac{1}{2}\\ \frac{4}{3}-4r+4r^2-\frac{4}{3}r^3 & \text{اگر} \quad \frac{1}{2}<r\le 1\\ 0 & \text{اگر} \quad r\ge 1\end{cases}$$

۳) تابع وزنی اسپلاین مرتبه۴

$$w(r)=\begin{cases}1-6r^2+8r^3-3r^4 & \text{اگر} \quad r\le 1\\ 0 & \text{اگر} \quad r>1\end{cases}$$

البته Monaghan [2] تابع وزنی دیگری بصورت زیر برای روش هیدرودینامیک ذرات هموار بکارگرفت وآنرا اسپلاین هیدرودینامیک ذرات هموارنامگذاری نمود .

$$w(s,h)=\frac{2}{3h}\begin{cases}1-\frac{3}{2}q^2+\frac{3}{4}q^3 & \text{اگر} \quad q\le 1\\ \frac{1}{4}(2-q)^3 & \text{اگر} \quad 1\le q\le 2\\ 0 & \text{اگر} \quad q>2\end{cases}$$

در اینجا $q=s/h$ است.

پیوستگی C^{-1} با توابع وزنی مکعبی ، مرتبه ۴ و اسپلاین SPH ارضاء می‌شود. حوزه اثر توابع وزنی با مشخصات مذکور بصورت صفحه دایره‌ای یا کره می‌باشند. تابع وزنی را در حالت تانسوری می‌توان بصورت زیر نشان داد:

$$w(x-x_I)=w(x-x_I)w(y-y_I) \tag{۲}$$

که در این‌صورت حوزه اثر بصورت مستطیلی مطابق شکل۱-b می‌باشد. چنین توابع وزنی برای نقاط با چیدمان منظم مفید می‌باشند. گسسته‌سازی به‌روش کوادریچر عددی برای مقدار سمت راست معادله (۱) و در واقع تعیین فرمولی برای $u^h(x)$ به منظور تعیین مقادیر مجهول در نقاط $I=1,....,n$ به رابطه زیر منجر می شود.

و لذا درحالت یک بعدی و با استفاده از قاعده ذوزنقه داریم:

$$u^h(x)=\sum_I w(x-x_I)\,u_I\Delta x_I \tag{۳}$$

Δx_I برای نقاط داخلی و با شماره‌گذاری متوالی بصورت زیر است:

$$\Delta x_I=(x_{I+1}-x_{I-1})/2 \tag{۴}$$

و برای نقطه انتهائی سمت چپ

$$\Delta x_n=(x_{I+1}-x_b)/2 \tag{۵}$$

x_b مختصات مرز سمت چپ است و براحتی می‌توان از این رابطه برای مرز سمت راست استفاده نمود. در این نحوه ارائه از آنجائیکه در داخل حوزه اثر $w(x-x_I)>0$ است جمع‌بندی معادله بالا صرفا روی نقاط x_I انجام می‌شود. بسط معادله درچند بعد نسبتا پیچیده بوده و از فرمول در شکل کلی آن بصورت زیر استفاده می‌شود:

$$u^h(x)=\sum_I w(x-x_I)u_I\Delta V_I \tag{۶}$$

ΔV_I اندازه‌هائی از حوزه در همسایگی نقطه I می‌باشند. یکی از مشکلات کاربرد این رابطه تعیین روش توانمندی برای تعیین ΔV_I در هر یک از نقاط می‌باشد. با توجه به مفهوم درون‌یابی مقادیر گرهی با استفاده از توابع شکل داریم:

$$u^h(x)=\sum_I \phi_I(x)u_I \tag{۷}$$

که در این‌صورت

$$\phi_I(x)=w(x-x_I)\Delta V_I \tag{۸}$$

$\phi_I(x)$ توابع شکل SPH برای تقریب می‌باشند.

در اغلب موارد $u_I\ne u^h(x_I)$، بنابراین پارامترهای u_I دقیقا معرف مقادیر گرهی نمی‌باشند و توابع شکل، درون‌یابی را صریحا انجام نمی‌دهند زیرا برازش دقیقا از مقادیر گرهی انجام نمی‌شود، لذا توابع شکل شرط دلتای کرونکر را ارضاء نمی‌کنند.

$$\phi_A(x_B)\ne\delta_{AB}=\begin{cases}1 & \text{اگر} \quad A=B\\ 0 & \text{غیرآن}\end{cases} \tag{۹}$$

$\phi_A(x_B)$ مقدار تابع شکل نقطه A وقتی که درنقطه B بررسی می‌شود و δ_{AB} دلتای کرونکر است.

۲-۲. روش گالرکین مستقل از جزء (EFG)

در این روش بمنظور استخراج مقادیر توابع شکل از روش حداقل مربعات متحرک وزنی و برای گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل و تشکیل معادلات جبری از روش گالرکین استاندارد همانند روال معمول در اجزاء محدود استفاده می‌شود. این قسمت به تشریح هر یک از موارد فوق اختصاص دارد.

۲-۲-۱. حداقل مربعات متحرک وزنی[1] (MLS)

این روش در حدود سال ۱۹۶۰ میلادی توسط Shepard [2] بمنظور درون‌یابی هموار سطحی[2] برای نقاط با مقادیر متغیر بکار رفته است و اساس کاربرد آن دستیابی به تقریب‌های کاملا پیوسته می‌باشد. تقریب حداقل مربعات وزنی برای کلیه نقاط حوزه مسئله که تعیین مقدار مجهول در آن‌ها با درون‌یابی مد نظر است، بکار گرفته می‌شود. البته بکارگیری توابع وزنی علاوه بر تعیین مقادیر مجهول، توانائی هموارسازی مشتقات را نیز داراست و نکته قابل توجه آن‌که چنین مشتقاتی صرفا به تابع چندجمله‌ای موضعی مرتبط می‌باشند. تابع تقریب بصورت زیر فرض می‌شود:

$$u^h(x)=\sum_{i=1}^{n}P_i^T(x)\,a_i(x)\equiv P^T(x)\,a(x) \tag{۱۰}$$

$a_i(x)$ بردار ضرائب تابع چندجمله‌ای

$P^T(x)$ بردار متغیرهای چند جمله‌ای که درحالت خطی یک و دو بعدی بصورت زیر می‌باشند:

$$P=(1,x) \quad , \quad P=(1,x,y) \tag{۱۱}$$

[1] Moving Least Square
[2] Surface Smoothing Interpolation

همچنین در حالت غیرخطی (مرتبه دوم) یک و دوبعدی بصورت زیر

$$\mathrm{P}=\left(1,x,x^2\right) \text{ ، } \mathrm{P}=\left(1,x,y,x^2,xy,y^2\right) \tag{۱۲}$$

هدف در روش حداقل مربعات وزنی، حداقل سازی تابع زیر است.

$$J(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} W_x\left(x_k-x\right)\left[u_k-P^T(x)\,a(x)\right]^2 \tag{۱۳}$$

در این روش تابع وزنی برای هر نقطه در حوزه مسئله تعیین و مانند آنچه که درشکل۲ نشان داده شده است، بصورت متحرک یا انتقالی بررسی می‌شود لذا توانائی درون‌یابی پیوسته، درحوزه مسئله مورد نظر همانند آنچه در شکل۳ نشان داده شده است را داراست. مشکل اصلی در این روش تولید تابع وزنی متحرکی است که بتواند تغییر در اندازه را بطور پیوسته برای هر نقطه‌ای مانند x_k و با تعدادی از نقاط مشخص در هر مرتبه از محاسبه هماهنگ نماید. بدین منظور می‌توان تصور نمود تابع وزنی دارای خاصیت تقارن بصورت زیر می‌باشد:

$$W_x\left(x_k-x\right)=W_x\left(x-x_k\right) \tag{۱۴}$$

و با بکارگیری تابع وزنی متناظر با هر نقطه مانند x_k داریم:

$$W_x\left(x_k-x\right)=W_k\left(x-x_k\right) \tag{۱۵}$$

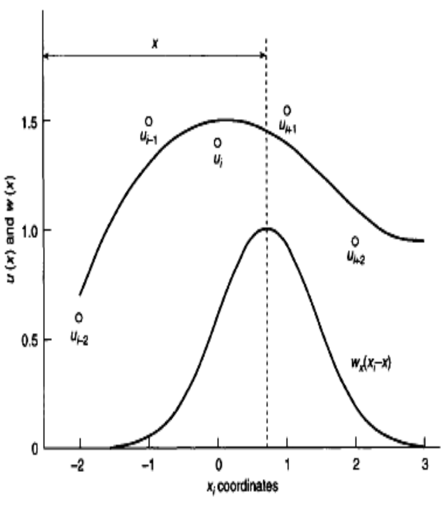
بنابراین هدفی که باید کمینه شود بصورت زیر است.

$$J(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} W_k\left(x-x_k\right)\left[u_k-P^T(x)a(x)\right]^2 \tag{۱۶}$$

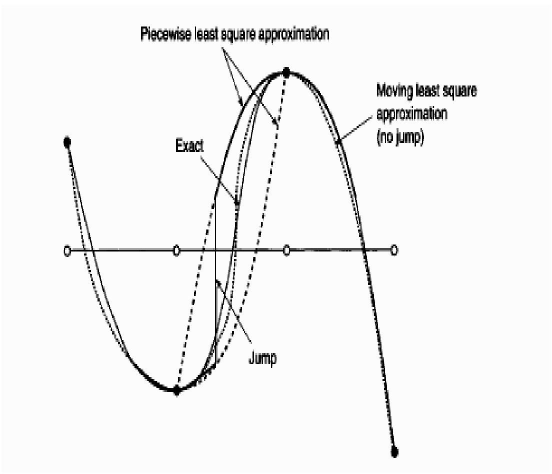
n تعداد نقاط موجود در همسایگی x و در داخل زیرحوزه به‌گونه‌ای‌که اندازه تابع وزنی در آن نقاط مخالف صفراست.

$$w\left(x_k-x\right)\neq 0$$

u_k پارامتر گرهی u در $x=x_k$ است. در این حالت تابع وزنی درنقطه x_k استوار می‌شود و در نقاط دیگر مانند آنچه در شکل۴ نشان داده شده است، ارزیابی می‌شود.



شکل۲. تقریب تابع وزنی متحرک در روش حداقل مربعات



شکل۳. درون‌یابی حداقل مربعات متحرک

با مشتق‌گیری از تابع $J(x)$ درمعادله (۱۳) نسبت به $a(x)$ بمنظور کمینه‌سازی آن و با مرتب سازی داریم:

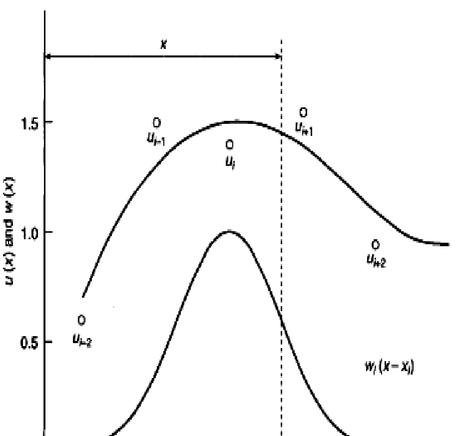
$$a(x)=A^{-1}(x)\sum_{j=1}^{n} B_j(x)u_j \tag{۱۷}$$

یا

$$a(x)=A^{-1}(x)\mathrm{B}(x)u_j \tag{۱۸}$$

$$A(x)=\sum W_k\left(x-x_k\right)P\left(x_k\right)P^T\left(x_k\right) \tag{۱۹}$$

$$B(x)=W_j\left(x-x_j\right)P\left(x_j\right) \tag{۲۰}$$



شکل۴. تابع وزنی روش حداقل مربعات متحرک برای یک نقطه ثابت

در شکل ماتریسی معادلات

$$A(x)=PW(\Delta x)P^T \tag{۲۱}$$

$$B(x)=W(\Delta x)P \tag{۲۲}$$

$$Pa=u=\sum_{k=1}^{n}\ \phi_k u_k \tag{۲۳}$$

$$P\left(A^{-1}B\,u_k\right)=\phi_k u_k \tag{۲۴}$$

حال می‌توان تابع شکل را بصورت زیر نشان داد:

$$\phi_k(x) = PA^{-1}B_k \qquad (۲۵)$$

همچنین عموما تعیین مشتقات توابع شکل ضروری است؛ لذا

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = \frac{dp}{dx}A^{-1}B + P\frac{d(A^{-1})}{dx}B + PA^{-1}\frac{dB}{dx} \qquad (۲۶)$$

$$\frac{d\left(A^{-1}\right)}{dx} = -A^{-1}\frac{dA}{dx}A^{-1} \qquad (۲۷)$$

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dx} &= \sum \frac{dw(x-x_k)}{dx}P^T(x_k)P(x_k), \\ \frac{dB}{dx} &= \frac{dw(x-x_k)}{dx}P(x_k)\end{aligned} \qquad (۲۸)$$

۲-۲-۲. گالرکین استاندارد

معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی مربوطه را در شکل کلی زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&A(\phi) + P = 0 \\ &B(\phi)\text{-}B(\bar{\phi}) = 0\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

در صورتی‌که عملگرهای دیفرانسیلی A و B به‌ترتیب دارای باقیمانده‌های R_Ω و R_Γ تابع تقریبی ϕ روی حوزه و مرزها باشد. باقیمانده‌های حوزه‌ای و مرزی برای تابع تقریبی این معادلات بصورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned}&R_\Omega = A(\phi) + P \neq 0 \\ &R_\Gamma = B(\phi)\text{-}B(\phi) \neq 0\end{aligned} \qquad (۳۰)$$

با تقریب هم‌زمان معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی، در صورتی تابع تقریبی ϕ جواب معادله دیفرانسیل خواهد بود که رابطه باقیمانده وزنی بر روی حوزه و مرزها شرایط زیر را ارضاء کند. البته می‌توان شرایط مرزی مسئله را بگونه‌ای مستقل از روش باقیمانده وزنی، بعنوان مثال بصورت ضرائب لاگرانژ[1] و یا سایر روش‌ها نیز در معادلات مربوطه اعمال نمود.

$$\int_\Omega W_l R_\Omega d\Omega + \int_\Gamma \bar{W}_l R_\Gamma d\Gamma = 0 \qquad (۳۱)$$

در روش گالرکین با معادل قرار دادن تابع شکل N_l بجای W_l و همچنین استفاده از مشتق جزء به جزء برای حذف مشتق مرتبه دوم از معادلات گسسته‌سازی شده، معادلات جبری بصورت $k\phi = f$ حاصل می‌شود. لازم بذکر است، کلیه روش‌های بدون شبکه که از حداقل مربعات برای استخراج تابع شکل استفاده می‌کنند، صرفا مقادیر تابع شکل را در نقاط مربوطه ارائه می‌نمایند و بر خلاف روش اجزاءمحدود تابع شکل بطور صریح وجود ندارد.

[1] Lagrange Multiplayer

۲-۳. روش افراز واحد[2] (Pu)

روش‌های نقاط محدود براساس روش افراز واحد نیز می‌توانند فرمول‌بندی شوند. یک افراز واحد نمونه‌ای از حالتی است که در آن یک حوزه اثر از وصله‌ها یا زیرحوزه‌هائی (Ω_I) که با یکدیگر همپوشانی دارند پوشیده می‌شود؛ بگونه‌ای‌که هر کدام از توابع شکل $\Phi_I(x)$ دارای مقدار غیرصفر در داخل زیرحوزه Ω_I بوده و علاوه بر این در کل حوزه دارای این خاصیت هستند.

$$\sum_I \Phi_I(x) = 1 \qquad \text{در کل حوزه } \Omega \qquad (۳۲)$$

کاربرد عمومی روش افراز واحد بطور گسترده در ریاضیات بمنظور انجام اصلاح بر روی مسائل غیرخطی و خصوصا برای توابع شکل با درجه پیوستگی زیاد می‌باشد. البته در تقریب‌های نقاط محدود شرایط سازگاری بالاتر از مرتبه صفر ضروری نیست. تحت شرایط خاصی توابع شکل در روش حداقل مربعات متحرک (MLS) معادل توابع shepard و همچنین معادل $\phi^k_{(x)}$ به‌ازای مقادیر مختلف از k در روش افراز واحد می‌باشند.

$$\phi^0(x) = w(x-x_I)\Big/\sum_I w(x-x_I) \qquad (۳۳)$$

$$\sum_I \phi_I^k(x)x_I^k = x^k \ \text{ for } \quad 0 \le I \le k \qquad (۳۴)$$

در صورتیکه $k = 0$ باشد:

$$\sum_I \phi_I^k(x).1 = \sum_I \phi_I^k(x) = 1 \qquad (۳۵)$$

در روش نقاط محدود این نقطه نظر چند تقریب جدید را پایه‌ریـزی می‌نماید:

الف) Babuska و Melenk [3] برای معادله یک بعدی هلمهولتز تقریب‌های زیر را ارائه نمودند:

$$\begin{aligned}u^h(x) &= \sum_I \phi_I^0(\mathrm{x})(a_{0I} + a_{1I}x + \ldots. \\ &+ a_{KI}x^k + b_{1I}Sinhnx + b_{2I}Coshnx) \\ u^h(x) &= \sum_I \phi_I^0(\mathrm{x})\sum \beta_{jI}P_j(\mathrm{x})\end{aligned} \qquad (۳۶)$$

که در آن

$$\begin{aligned}\beta_{iI} &= [\,a_{0I}, a_{1I}, \ldots\ldots.., a_{KI}, b_{1I}, b_{2I}\,] \\ P^T &= [1, x, \ldots.., x^k, Sinhnx, Conhnx]\end{aligned} \qquad (۳۷)$$

دراین حالت $\phi^0(x)$ ، تابع شپارد یا تقریب مرتبه صفر MLS همانند آنچه در افراز واحد گفته شد، است که در این حالت بطور کامل و فشرده ارائه شده است. *coshnx* و *sinhnx* توابع تکمیلی پایه برای اصلاح دقت محاسبات می‌باشند. این معادله ویژه با بکارگیری دو تابع پایه خارجی نهایتا به دو مجهول در هر نقطه منجر می‌شوند. لازم به ذکر است این روش حداقل به دو مقدار مجهول در هر نقطه (بدون نیاز به توابع تکمیلی) نیاز دارد. برای

[2] Partition of Unity

دستیابی به سازگاری خطی، درحالی‌که برای یک تقریب MLS مرتبه ۲ صرفا به یک مجهول در هر نقطه برای تامین سازگاری خطی نیاز است.
تقریب درحالت کلی به شکل زیر است:

$$u^h(x) = \sum_J \phi_I^0(x) \sum_I b_I L_{JI}(x) = \sum_I \sum_{J: x_I \in \Omega_J} \phi_J^0(x) L_{JI}(x) b_I \qquad (۳۸)$$

$L_{JI}(x)^I$ درون‌یاب‌های لاگرانژی می‌باشند و برای J های مختلف $L_{JI}(x_k) = \delta_{IK}$ و a_I مقدار تقریب موردنظر نقطه I است.

ب) Duarte و Oden [9] مفاهیم افراز واحد را در موضوعات مختلفی بکارگرفتند که تابع شکل آن مشابه تابع شکل MLS و از مرتبه k است. تقریب پیشنهادی آن‌ها بصورت زیراست:

$$u^h(x) = \sum_I \phi_I^k(x) \left(u_I + \sum_{I=1}^{m} b_{iI} q_i(x) \right) \qquad (۳۹)$$

$q_i(x)$ توابع تکمیلی با مرتبه بالا در غالب چند جمله‌ای‌های لژندر می‌باشند که توابع ضمیمه نیز نامیده شدند.
مزیت اصلی این فرمول‌بندی توانائی آن در اختصاص مقدار متغیر توابع ضمیمه[1] از هرنقطه به نقطه دیگراست، لذا همانند انطباق[2] *hp* آنها نامش را ابرهای[3] *hp* نامیدند. شکل توسعه یافته این تقریب برای انواع مختلفی از روش‌های افراز واحد بمنظور ارتقاء کارکرد آن‌ها بکارگرفته شده است.

ج) Belytschko و همکاران [16] نوع اجزاء محدود افراز واحد[4] (PUFEM) را بگونه‌ای اصلاح نمودند که تابع شکل چندجمله‌ای لاگرانژ شرایط دلتای کرونکر را ارضاء نماید.

$$\phi_I(x_J) = \delta_{IJ} \qquad (۴۰)$$

اندیس J اشاره به شماره وصله یا زیرحوزه (Ω_J) دارد و هر وصله دارای *p+1* نقطه درون‌یاب لاگرانژی در نقطه x_I است که این از بهترین مزایای آن، خصوصا در دو و سه بعد بدون المان می‌باشد. L_{JI} چندجمله‌ای لاگرانژ درجه p در وصله J که دارای مقدار واحد درنقطه x_I می‌باشد.

$$\phi_I(x) = \sum_{J: x_I \in \Omega_J} \phi_J^0(x) L_{JI}(x)$$

$$\phi_I(x_k) = \sum_{J: x_I \in \Omega_J} \phi_J^0(x) L_{JI}(x_k) = \sum_{J: x_I \in \Omega_J} \phi_J^0(x) \delta_{IK} = \delta_{IK} \qquad (۴۱)$$

$$\sum \phi_I^0(x) = 1$$
$$L_{JI}(x_k) = \delta_{IK}$$

[1] Extrinsic Basis
[2] Adaptivity
[3] hp Clouds
[4] Partition of Unity Finite Element

اما گسترش یک روش نقاط محدود (بدون شبکه) در چند بعد ساده نمی‌باشد؛ زیرا درخصوص درون‌یاب‌های لاگرانژی، رتبه‌بندی از مرتبه k درتمام جهت‌ها و برای کلیه نقاط مورد نیاز است.

۳. مثالهای عددی

در این قسمت بمنظور صحت‌یابی فرمول‌بندی گالرکین مستقل از جزء دو مثال مورد بررسی قرار می‌گیرد. انتگرال‌گیری از معادلات گسسته‌سازی چه در حالت دائمی و چه در حالت گذرا به روش انتگرال‌گیری عددی با یک نقطه گوس به همراه وزن مربوطه و همچنین تابع وزنی بکارگرفته شده از نوع اسپلاین مرتبه۳ است.

مثال۱) در این مثال معادله برگر خطی (یک بعدی با مقدار متغیر سمت راست و شرایط مرزی دیریچله) در حالت پایدار بررسی می‌شود. علت انتخاب این مسئله خاص به‌خاطر وجود جواب دقیق برای این معادله دیفرانسیل به‌ازای مقادیر مختلفی از ضریب جابجائی (A) یا عدد پکلت ($Pe = Ah/2k$) با مقادیر ثابت $k = 1$ و فاصله بین نقاط $h = 0.1$ است.

$$-k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 \qquad 0 < x < 1$$

تحت شرایط مرزی

u=0 x=0
u=1 x=1

جواب تحلیلی به‌ازای مقادیر مختلف عدد پکلت مطابق مباحث مربوط به حل معادلات دیفرانسیل معمولی به‌صورت زیر است.

$$u = \left(\frac{1 - 1/3A - 1/A^2 - 2/A^3}{1 - e^A} \right) + \left(\frac{1 - 1/3A - 1/A^2 - 2/A^3}{e^A - 1} \right) e^{Ax} + \frac{2}{A^3}x + \frac{1}{A^2}x^2 + \frac{1}{3A}x^3$$

در شکل (۵) نتایج تحلیلی و حل عددی در حالتی که حوزه مسئله با ۱۱ نقطه گسسته شده است، آورده شده است. مقایسه نتایج حل عددی و تحلیلی نزدیک نشان‌دهنده دقت مناسب در روش عددی است.

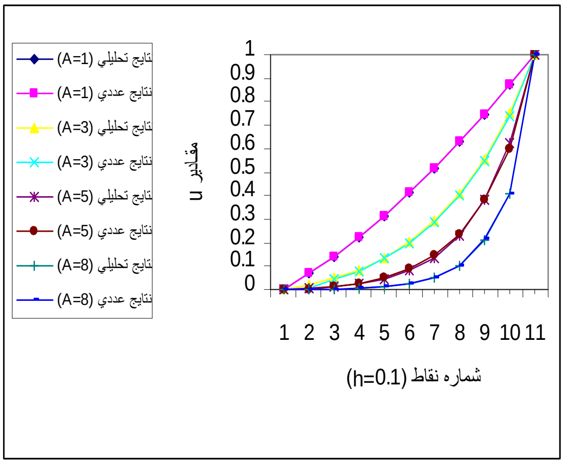
مثال۲) در این مثال معادله غیرخطی برگر (زمان وابسته و غیرویسکوز) تا ایجاد ناپیوستگی[5] بررسی می‌شود.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad 0 \le x \le 1$$

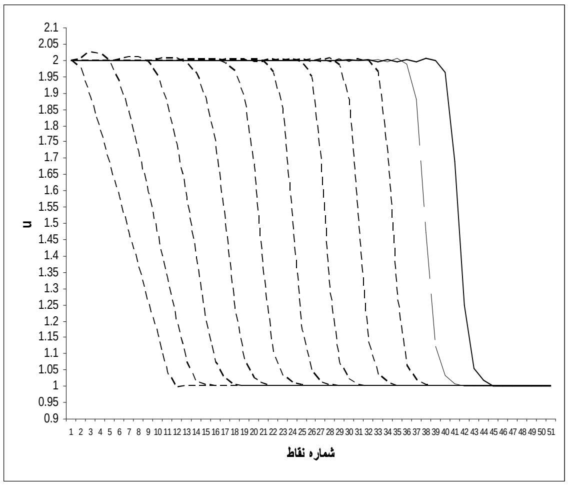
تحت شرایط مرزی و آغازین زیر

[5] Shock Propagation

$$u(0) = 2. - 5x \qquad 0 \le x \le 0.2$$
$$u(0) = 1. \qquad 0.2 \le x \le 1$$
$$u(t) = 2. \qquad x = 0.0$$



شکل۵. مقایسه نتایج جواب دقیق و روش بدون شبکه گالرکین مستقل از جزء یا (EFG)



شکل۶. پدیده انتشار موج در بازه‌های زمانی متوالی ۰/۰۵ ثانیه از زمان ۰/۰ تا ۰/۵ ثانیه

گسسته‌سازی بخش زمان وابسته معادله دیفرانسیل بصورت پسرو و با تغییرات زمانی dt = 0.01 ثانیه است. ۵۱ نقطه با فواصل یکنواخت h=0.02 گسسته‌سازی مکانی حوزه مسئله را تشکیل می‌دهد. ضمن اینکه برای خطی‌سازی معادلات از مقادیر سرعت(u) در گام زمانی قبل استفاده شده است. شکل۶ نتایج حل عددی را در زمان تا شکل‌گیری شاک و انتقال آن بصورت جابجائی خالص را در زمان‌های پس از شکل‌گیری نشان می‌دهد.

۴. نتیجه گیری

نوگرائی و وجود برخی مزیت‌ها در روش‌های متکی به نقاط (بدون شبکه یا نقاط محدود) انگیزه اصلی بکارگیری این روش‌ها در تحلیل عددی معادلات دیفرانسیلی است. اگرچه استفاده از روش‌های بدون شبکه هنوز به گستردگی روش‌های اجزاء محدود در مسائل مهندسی نمی‌باشد، ولی چه بسا فعلا روش‌های بدون شبکه شرایطی مشابه با زمانی که روش اجزاء محدود شروع به گسترش نمود را سپری می‌نمایند. ضمن اینکه تقارب زیادی که بین روش اختلاف محدود و روش نقاط محدود بواسطه گسسته‌سازی حوزه فیزیکی وجود دارد، فصل جدیدی از مطالعات را به‌روی محققین گشوده است؛ بگونه‌ای که بنظر می‌رسد بسیاری از مشکلاتی که در روش اختلاف محدود در گذشته وجود داشته و عامل رویکرد به اجزاء محدود شده است را برطرف می‌نماید. یکی از مشکلات بسیاری از روش‌های بدون شبکه علیرغم نامگذاری‌شان، محاسبه انتگرال‌ها یا ضرائب معادلات جبری با یک شبکه مجازی بمنظور تعریف نقاط گوس به‌همراه وزن یا وزن‌های مربوطه می‌باشد که البته روش گالرکین مستقل از جزء نیز از آن مستثنی نیست.

در این مقاله ضمن ارائه کلیات روش‌های بدون شبکه به معرفی تعدادی از آنها پرداخته و روش گالرکین مستقل ازجزء(EFG) بمنظور حل معادله دیفرانسیل جابجائی- پخش یک بعدی برگر با شرایط مرزی دیریچله و همچنین معادله غیرخطی غیر ویسکوز برگر در حالت گذرا بکار گرفته شده است. تابع وزنی مورد استفاده از نوع اسپلاین مرتبه۳ مطابق شرح ارائه شده در بند ۱-۲ با تابع درون‌یابی از نوع حداقل مربعات متحرک می‌باشد که درمحیط نرم‌افزاری $\text{MATLAB}_{6.5}$ برنامه‌نویسی شده است. حل معادلات انتگرالی حاصله با یک نقطه گوس و به روش عددی همانند روش معمول در اجزاء محدود انجام گردیده است. نتایج جواب‌های دقیق و جواب‌های روش بدون شبکه به‌ازای مقادیر مختلف عدد پکلت برای مسائل یک بعدی جابجائی- پخش در حالت دائمی مقایسه شده است. نتایج تحلیل عددی به ازای مقادیر کوچک عدد پکلت معرف معادله پخش خالص و با افزایش آن مجانبوار به سمت جواب حاصل از معادله جابجائی خالص میل می‌کند. ضمن اینکه در مثال حالت گذرا نتایج تحلیل پدیده تشکیل و پیشروی شوک را بخوبی نشان می‌دهد.

مراجع

[1] Lucy L.B., "*A numerical approach to the testing of the fission hypothesis*", The Astron J. 8(12) (1997) 1013-1024.

[2] Monaghan J.J., "*Why particle methods work*", SIAM J.Sci. Stat. Comput.3 (4) (1982) 422.

[3] Monaghan. J.J. , "*An introduction to SPH*", Comput. Phys. Comm. 48 (1988) 89-96.

[4] Johnson G.R. & Beissel S.R., "*Normalized smoothing functions for SPH impact computations*". Int. J. Numer. Methods. Engrg. (1996).

[5] Liu W.K., Jun S. & Zhang Y.F., "*Reproducing kernel particle methods*", Int. J. Numer. Methods. Engng. 20 (1995) 1081-1106.

[6] Nayroles B., Touzot G. & Villon P., "*Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse element*", Coput. Mech. 10 (1992) 307-318.

[7] Belytschko T., Gu L. and Lu. Y.Y., "*Fracture and crack growth by element free Galerkin methods*", Model. Simul.Mater. Sci. Engrg.2 (1994)519-534.

[8] Kaveh Ali, Yavari Arash, Sarkani Shahram, Rahimi Bondarabady Hosein Ali, "*Topological aspects of meshless methods and nodal ordering for meshless discritization*", Int. J. Numer. Meth. Engng. 52 (2001) 921-938.

[9] Duarte C.A. and Oden J.T., *Hp clouds – a meshless method to solve boundary value problems*, Technical Report 95-05, Texas Institte for Computational and Applied Mathematics, University of texas at Austin,1995.

[10] Belytschko T., Krongauz Y., Ogan D., Fleming M., "*Meshless Methods: An Overview and recent development*", Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 139 (1996) 3-47.

[11] Bonet J., Kulasegaram S., "*A simplified approach to enhance the performance of smooth particle hydrodynamics methods*", Applied Mathematics and Computation. 126(2002) 133-155.

[12] Koshizuka, S., Oka Y., "*Moving particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid*". Nucl. Eng. Sci.123 (1999) 421-434.

[13] Onate E., Idelsohn S.R., Zienkievicz O.C, Taylor R.L., "*A finite point method in computational mechanics, application to convective transport and fluid flow*". Int. J. Numer. Meth. Eng. 39(22) (1996) 3839-3886.

[14] Onate E., Idelsohn S.R., Zienkievicz O.C, Taylor R.L., Sacco C., "*A stablized finite point method for analysis of fluid mechanics problems*". Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 39 (1996) 315-346.

[15] Taylor R.L., Zienkievicz O.C, Onate E., Idelsohn S.R., "*Moving least square approximations for solution of differntial equations*", Internal Report 74, CIMNE, Barcelona, Spain, 1996.

[16] Belytscho T., Liu Y., Gu L., "*Element free Galerkin methods*", Int. J. Numer. Meth. Eng. 37(1994) 229-256.

[17] Idelsohn S.R., Storti M.A., Onate E., "*Lagrangian formulations to solve free surface incompressible inviscid fluid flows*", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191(2001) 583-593.