

پیش‌بینی موقعیت و طول ناحیه انتقال جریان از حالت لایه‌ای به درهم به کمک مدل پتانسیل توربولانسی

رضا تقوی زنوز و محمود سالاری

چکیده: در این کار تحقیقاتی از یک مدل جدید توربولانسی تحت عنوان مدل پتانسیل توربولانسی، برای پیش‌بینی شروع ناحیه انتقال جریان از حالت لایه‌ای به درهم و همچنین تخمین طول این ناحیه برای جریان روی صفحه تخت استفاده شده است. تحلیل برای دو حالت گرادین‌های فشار صفر و غیر صفر و به ازای مقادیر مختلفی از شدت توربولانسی جریان ورودی انجام گردیده است. برخلاف عمده مدل‌های توربولانسی موجود، در این مدل از هیچ‌گونه مفروضات اولیه‌ای برای ایجاد ارتباط ساختاری بین متغیرهای متوسط جریان و کمیت‌های توربولانسی حاکم استفاده نشده است. مقایسه نتایج حاصله با نتایج تجربی نشان می‌دهد که این مدل قابلیت بسیار مناسبی در تحلیل جریان‌های غیر تعادلی، نظیر فرایند انتقال جریان از لایه‌ای به درهم، دارد.

واژه‌های کلیدی: مدل پتانسیل توربولانسی، انتقال از لایه‌ای به درهم، شدت توربولانسی، صفحه تخت

۱. مقدمه

وجود تفاوت‌های عمده در مشخصه‌های جریان‌های لایه‌ای و درهم موجب می‌شود که برای موضوعاتی همچون تعیین نیروی درگ اجسام، میزان انتقال حرارت از سطوح داغ و افزایش بازدهی سیستم‌های مرتبط، لزوماً موقعیت صحیح شروع ناحیه درهم شدن جریان شناسایی شود. از آنجا که معمولاً رابطه صریحی بین شروع ناپایداری جریان و درهم شدن کامل آن وجود ندارد، لذا پیش‌بینی موقعیت انتقال در لایه‌های مرزی کار پیچیده‌ای است. البته در زمینه تحلیل پایداری لایه‌های مرزی کارهای تحقیقاتی وسیعی انجام گردیده و روابط حاکم بر رفتار اغتشاشات کوچک جریان و نحوه رشد آن‌ها تا حدود نسبتاً زیادی معلوم شده است [1].

برای تبدیل جریان از حالت لایه‌ای به درهم، درحالتی که شدت توربولانسی اولیه جریان آزاد کم باشد، اغتشاشات بسیار کوچک جریان ابتدا به صورت خطی و سپس به صورت غیرخطی در داخل لایه مرزی رشد می‌نمایند تا اینکه اثرات سه بعدی اغتشاشات در جریان ظاهر گردیده و جریان از حالت لایه‌ای به درهم تبدیل می‌گردد. فرایند انتقالی که دارای این مراحل می‌باشد اصطلاحاً انتقال طبیعی (Natural Transition) نامیده می‌شود. چنانچه شدت

توربولانسی اولیه جریان آزاد زیاد باشد، در فرایند انتقال مرحله رشد خطی اغتشاشات حذف شده و رشد اغتشاشات از ابتدا به صورت غیر خطی انجام می‌گیرد. این نوع انتقال جریان اصطلاحاً انتقال برگشتی (Bypass Transition) نامیده می‌شود. در این نوع فرایند انتقال تحلیل‌های پایداری خطی هیچ کاربردی ندارند [1,2].

در روش‌های معمول که برای پیش‌بینی موقعیت انتقال در لایه‌های مرزی به کار می‌روند از روابطی که بر مبنای داده‌های تجربی بدست آمده، استفاده می‌شود. به عنوان مثال Van Driest رابطه ضمنی (۱) را برای تخمین موقعیت شروع ناحیه انتقال جریان ارائه کرده است [3]:

$$1690Re_{x,tr}^{-1/2} = 0.312(m+1)^{-0.528} + 4.8\delta_{99}^2 Re_{x,tr}^{1/2} Tu^2 \quad (1)$$

در رابطه (۱) $Re_{x,tr}$ عدد رینولدز در شروع ناحیه انتقال، m گرادین بدون بعد فشار، δ ضخامت لایه مرزی و $Tu = (2K/3)^{1/2} / U$ شدت توربولانسی جریان آزاد ورودی هستند. در عین حال که این‌گونه روابط ساده هستند، لیکن اعمال این روابط به کدهای عددی که تحلیل کاملی از جریان را میسر می‌سازند کار مشکلی است. برای اعمال این روابط به کدهای عددی، باید در هر نقطه از مرز کمیت‌های غیرموضعی جریان نظیر سرعت جریان آزاد، فاصله از شروع لایه مرزی و ضخامت لایه مرزی بدست آیند تا بتوان آنها را در رابطه جبری فوق استفاده نمود.

در بسیاری دیگر از کدهای CFD، کاربر باید موقعیت شروع انتقال را به عنوان داده ورودی وارد نماید. در این حالت نیز مشکل بعدی

مقاله در تاریخ ۱۳۸۲/۲/۲۲ دریافت شده و در تاریخ ۱۳۸۴/۱۰/۴ به تصویب نهایی رسیده است.

دکتر رضا تقوی زنوز استادیار دانشکده مکانیک دانشگاه علم و صنعت

ایران، Taghavi@iust.ac.ir

محمود سالاری دانشجوی دکتری مکانیک، m_salari@iust.ac.ir

پتانسیل‌های برداری و اسکالر مربوط به نیروی بدنی توربولانسی از دیورژانس تانسور تنش به صورت زیر بدست آورده می‌شوند:

$$\nabla \phi + \nabla \times \psi = \nabla \cdot R \quad (2)$$

استفاده از این پتانسیل‌های برداری و اسکالر به جای استفاده مستقیم از نیروی بدنی توربولانسی ($\nabla \cdot R$) دارای دو مزیت اصلی است: اول اینکه این نوع فرمولاسیون باعث کنسرواتو ماندن معادله اندازه حرکت می‌شود و دیگر اینکه این پتانسیل‌ها دارای مفاهیم و تفسیرهای فیزیکی مناسبی هستند که در مدلسازی بعضی از ترم‌ها و ثابت‌های این مدل توربولانسی تاثیر فراوانی دارند.

مزیت اصلی این مدل بر مدل‌های توربولانسی که از فرمولاسیون ویسکوزیته گردابی بهره می‌برند عدم نیازمندی به استفاده از هر نوع معادله ساختاری بین تانسور تنش رینولدز و گرادیان‌های سرعت متوسط جریان است. همچنین مزیت این مدل نسبت به مدل‌های انتقال تنش رینولدز در سادگی فرمولاسیون و کم بودن هزینه محاسباتی آن می‌باشد.

پتانسیل‌های توربولانسی این مدل (ϕ و ψ) به صورت ریاضی به کمک معادله (۲) و قید سازگاری $\nabla \cdot \psi = 0$ تعریف می‌شوند. همچنین این پتانسیل‌ها به صورت صریح با تانسور تنش مرتبط می‌شوند:

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\nabla \cdot R) \quad (3-الف)$$

$$-\nabla^2 \psi = \nabla \times (\nabla \cdot R) \quad (3-ب)$$

از آنجا که این معادلات دارای ماهیت بیضوی هستند لذا شرایط مرزی آنها نیز باید دارای همین ویژگی باشند. مقادیر ϕ و ψ روی دیواره‌ها، سطوح آزاد و فواصل بسیار دور جریان معادل صفر در نظر گرفته می‌شوند [8].

از معادلات (۳) به همراه ماهیت فیزیکی توربولانس نتیجه می‌شود که پتانسیل اسکالر ϕ بیانگر آن قسمتی از کمیت‌های توربولانسی است که در تعیین فشار متوسط جریان (به عنوان یک کمیت اسکالر) نقش مهمی دارند. لذا این پتانسیل تاثیر کمتری روی ورتیسیتی متوسط جریان‌ها خواهد داشت.

همچنین می‌توان دریافت که فقط پتانسیل برداری ψ است که توانایی محاسبه و لحاظ نمودن اثرات ورتیسیتی متوسط جریان‌ها را دارد. توجه شود که این پتانسیل‌ها فقط باعث جابجایی ورتیسیتی شده و نقشی در تولید و یا مصرف ورتیسیتی ندارند [7,8].

۳. ملاحظات مدل جهت پیش بینی فرایند انتقال

هر چند که استفاده از مدل‌های تنش رینولدز متوسط‌گیری شده ناویر-استوکس RANS برای پیش‌بینی انتقال جریان از حالت لایه-ای به درهم دارای سابقه زیادی است، لیکن در این مقاله از فرمولاسیون دیگری برای تحلیل معادله انتقال تنش‌های رینولدز RST استفاده شده است. بدون هیچ‌گونه فرضیات محدودکننده، فرم کلی معادله انتقال رینولدز به صورت روابط (۴) و (۵) قابل استخراج می‌باشند.

نحوه فعال نمودن مدل توربولانسی تعبیه شده در کد عددی، بعد از موقعیت انتقال جریان می‌باشد.

روش دیگر پیش‌بینی موقعیت شروع انتقال جریان، استفاده از ماهیت مدل‌های توربولانسی است. این روش بیشتر برای جریان‌هایی که در آنها انتقال برگشتی رخ می‌دهد، همانند جریان روی پره توربین‌ها، به کار می‌رود. در این زمینه نیز تحقیقات گسترده‌ای جهت پیش‌بینی موقعیت انتقال با استفاده از مدل‌های توربولانسی رینولدز پایین $k-\epsilon$ انجام شده است. در مقالاتی که توسط Savill ارائه شده، مرور مناسبی بر عملکرد انواع مدل‌های توربولانسی $k-\epsilon$ صورت گرفته است [4,5]. نتیجه‌گیری کلی ارزیابی مقالات این بود که مدل‌های توربولانسی جواب‌های مناسبی را برای تمام جریان‌ها ندارند و فقط هر کدام از مدل‌های ارائه شده برای جریان‌های خاصی جواب‌های قابل قبولی ارائه می‌نمایند. کارهای اخیر انجام شده با مدل توربولانسی $k-\epsilon$ intermittency توسط Suzen & Huang موفقیت‌های بیشتری را در این زمینه نشان می‌دهد [6]. البته توجه شود که هیچ یک از این مدل‌ها سعی در پیش‌بینی موقعیت انتقال طبیعی، یعنی انتقال مربوط به جریان‌ها با اغتشاشات ورودی بسیار کم، ننموده‌اند.

در کار تحقیقاتی حاضر با استفاده از اصول مدل‌های تنش رینولدز به همراه معادلات متوسط‌گیری شده ناویر-استوکس^۱ RANS و استفاده از مدل نسبتاً جدید پتانسیل توربولانسی سعی در حل معادلات حاکم جریان شده است. این مدل برای اولین بار توسط Perot ارائه شد [7]. از آن جهت که این مدل فرمولاسیون دیگری از معادلات RST^۲ است و در آن حالت فیزیکی توزیع انرژی و حالت غیر تعادلی جریان حفظ می‌شود، انتظار می‌رود که قابلیت مناسبی برای تحلیل فرایندهای غیر تعادلی نظیر فرایند انتقال از لایه‌ای به درهم داشته باشد. در این مقاله تحلیل‌هایی عددی به منظور بررسی قابلیت این مدل در پیش‌بینی دو نوع اصلی فرایند انتقال در لایه-های مرزی، یعنی انتقال برگشتی و انتقال طبیعی، همچنین تاثیر گرادیان فشار بر موقعیت انتقال جریان انجام شده است.

۲. معرفی اجمالی مدل پتانسیل توربولانسی

این مدل، نوعی مدل توربولانسی جدید و از خانواده مدل‌های توربولانسی RANS است. ایده اصلی این مدل بر این مبنا است که برخلاف عمده مدل‌های توربولانسی موجود، به جای مدلسازی تانسور تنش رینولدز و یا ارائه یک ویسکوزیته گردابی، به مدلسازی پتانسیل‌های مربوط به نیروی بدنی توربولانسی^۳ می‌پردازد. این پتانسیل‌ها به دو قسمت برداری ψ و اسکالر ϕ تفکیک می‌شوند. ایده این نوع مدلسازی در سال ۱۹۹۷ توسط Perot مطرح شد [8].

¹ Reynolds Averaged Navier Stokes

² Reynolds Stress Transport

³ Turbulent body force

مدل نمودن ترم استهلاک انتظار آن است که این مدل اثر قابل ملاحظه‌ای بر طبیعت رشد سریع پارامترها، نظیر ضریب اصطکاک سطحی و شدت توربولانسی جریان که در انتهای فرایند انتقال جریان و قبل از درهم شدن کامل جریان رخ می‌دهد، داشته باشد ولی نباید تاثیر زیادی بر موقعیت شروع انتقال جریان بگذارد.

آخرین عبارت از معادله (۵) که نیاز به مدلسازی دارد عبارت فشار- کرنش است، که نمی‌توان از اثرات آن در فرآیند انتقال جریان صرفنظر نمود. معادله فشار نوسانی به صورت زیر می‌باشد:

$$p'_{,ij} = -2u_{j,i}u'_{i,j} + R_{ij,ij} - (u'_i u'_j)_{,ij} \quad (۶)$$

معادله فوق نشان می‌دهد که این فشار دارای دو مولفه است. قسمتی از این فشار به مولفه برشی جریان متوسط بستگی دارد و به صورت خطی با تغییرات سرعت نوسانی تغییر می‌کند. این قسمت از عبارت کرنش- فشار، با ترم تولید در جریان هم‌مرتبه است و سعی در کاهش قسمتی از ترم تولید را دارد، لذا در فرایند انتقال جریان نیز نقشی اساسی خواهد داشت.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت آن دسته از مدل‌های توربولانسی که بتوانند با دقت مناسب ترم‌های تولید و تغییرات سریع ترم کرنش- فشار جریان را محاسبه کنند قادر به پیش‌بینی فرایند انتقال جریان از حالت لایه‌ای به درهم خواهند بود. مدل‌های به کار رفته برای هر یک از ترم‌های انتقال و استهلاک انرژی فقط باید در مراحل نهایی فرایند انتقال جریان تاثیر داشته و اثر کمتری بر موقعیت مکانی انتقال جریان بگذارند.

به علت پیچیدگی حل مستقیم معادلات RST، معمولاً استفاده از مدل‌های دو معادله‌ای نظیر $k - \epsilon$ بسیار مرسوم‌تر است. از معادله (۴) می‌توان رابطه‌ای برای K به صورت زیر استخراج نمود:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + u \cdot \nabla K = -\frac{1}{2} u'_j u'_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ u'_j \left(\frac{1}{2} u'_i u'_i + \frac{p'}{\rho} \right) \right\} - \nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 + \nu \nabla^2 K \quad (۷)$$

چنانچه فقط معادله K حل شود اثر ترم کرنش فشاری به کلی حذف می‌شود. زیرا این ترم فقط انرژی را بین اجزای مختلف تنش‌های رینولدز توزیع کرده و تاثیری در مقدار انرژی جریان ندارد. برخلاف ترم‌های توزیع‌کننده مکانی انرژی (همانند ترم‌های انتقال)، این نوع توزیع انرژی بین مولفه‌های مختلف جریان، خصوصاً در جریان‌های لایه مرزی، بسیار مهم است. این ترم، انرژی را از نوسانات تقویت شده هم جهت با جریان اخذ نموده و آنرا به نوسانات عرضی و عمودی منتقل می‌کند. به عبارت دیگر باعث استهلاک رشد نوسانات طولی و تغذیه انرژی به نوسانات سرعت در جهت عمود بر راستای طولی جریان می‌شود.

اساساً مدل‌های دو معادله‌ای، نظیر $k - \epsilon$ ، قادر به تحلیل فرایندهای فیزیکی که در آنها توزیع انرژی بین مولفه‌های مختلف تنش‌های رینولدز صورت می‌گیرد، نیستند. همچنین مقدار ترم

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}\bar{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \nabla \bar{u} - \nabla \cdot \bar{R} \quad (۴)$$

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + u \cdot \nabla R = \nu \nabla^2 R - (u'_i u'_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + u'_j u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}) + \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - 2\nu \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i u'_j u'_k + \frac{p' u'_i}{\rho} \delta_{jk} + \frac{p' u'_j}{\rho} \delta_{ik}) \quad (۵)$$

در روابط فوق u سرعت متوسط و R عبارت وابستگی (Correlation) مرتبه دوم نوسانات سرعت در هر نقطه از جریان می‌باشد و اولین ترم داخل پرانتز از معادله (۵)، مربوط به عبارت تولید (Production) است. چنانچه معادله (۵) حل گردد این عبارت نیاز به مدلسازی ندارد. ترم‌های بعدی در معادله (۵) به ترتیب مربوط به کرنش فشاری (Pressure-Strain)، استهلاک انرژی (Dissipation)، انتقال (Transport) توربولانسی و فشاری بوده که همگی باید مدلسازی شوند.

این نوع دسته‌بندی معادلات، به منظور تفکیک نمودن کمیت‌های قابل محاسبه میدان جریان متوسط، از نوسانات سرعت توربولانسی، که باید مدل شوند، صورت گرفته است. تمام مدل‌های ارائه شده برای ترم‌های مختلف معادله (۵) باید بتوانند اثرات نوسانات توربولانسی را روی میدان جریان متوسط اعمال نمایند. البته هر یک از این مدل‌ها ممکن است قادر به در نظر گرفتن اثرات غیرخطی پدیده انتقال از جریان لایه‌ای به درهم نباشند.

معادله RST، (۵)، رابطه پایه‌ای برای بیشتر مدل‌های توربولانسی (نظیر مدل‌های $k - \epsilon$ ، تنش‌های جبری رینولدز) بوده و نقطه شروعی برای این بحث خواهد بود. در تحلیل جریان‌های کاملاً درهم، تمام ترم‌های فوق در معادله (۵) نیاز به مدلسازی دارند و نمی‌توان از هیچ یک از آنها صرف‌نظر نمود. ولی از آنجا که در جریان‌های در حال انتقال از لایه‌ای به درهم، نوسانات جریان نسبتاً کوچک است انتظار می‌رود ترم انتقال توربولانسی که شامل حاصل ضرب سه‌گانه سرعت است ترم کوچک و ناچیزی باشد. به‌علاوه، این ترم فقط می‌تواند انرژی را به صورت مکانی (Spatial) جابجا کند و نمی‌تواند عاملی برای افزایش مقدار کلی توربولانسی جریان، که بحث اصلی جریان‌های در حال انتقال است، گردد. ترم انتقال فشاری، آخرین ترم معادله (۵)، در جریان‌های لایه مرزی درهم مقدار ناچیزی داشته و فقط عاملی برای توزیع انرژی است لذا فرض می‌شود که این ترم نیز همانند ترم انتقال توربولانسی در جریان‌های در حال انتقال تاثیر ناچیزی داشته باشد. همچنین ترم استهلاک انرژی، که شامل اثرات ویسکوزیته است، در شروع پدیده انتقال جریان دارای مقداری کم ولی غیر قابل اغماض می‌باشد. در جریان کاملاً درهم، گرادین‌های موضعی بسیار قوی بوده و وجود ترم استهلاک منجر به تعادل سایر ترم‌های معادله RST می‌گردد. از آنجا که در مراحل اولیه انتقال جریان، گرادین‌های موضعی سرعت نسبتاً ضعیف هستند و اثرات توربولانسی به صورت خیلی سریع رشد می‌کنند، لذا ترم استهلاک نیز در پدیده انتقال جریان اثر غالبی ندارد. هنگام

$$P = \psi \cdot \omega, \quad v_t = C_\mu \frac{\phi \cdot k}{\bar{\varepsilon}}, \quad \alpha = \frac{1}{1 + 1.5 \frac{\phi}{k}}$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon / [1 + 10\nu |\nabla k|^{1/2}] / k$$

$$C_\mu = 0.21, \quad C_{p1} = 2.0 \frac{v_t}{v_t + 5\nu}$$

$$C_{p2} = \frac{3}{5}, \quad C_{p4} = \frac{6}{7}, \quad C_t = 0.0033$$

$$\sigma_k = 0.33 + 0.67P / \bar{\varepsilon}$$

$$\sigma_\varepsilon = 0.33 + 0.5P / \bar{\varepsilon}$$

$$\sigma_\phi = 0.33$$

$$C_{\varepsilon 1} = 1.45, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.83 - 0.16 \exp\left(-0.25 \frac{k^2}{\nu \varepsilon}\right)$$

مدل‌های ارائه شده برای تغییرات آهسته ترم کرنش- فشار عبارتند از:

$$\prod_{\phi}^{\text{slow}} = -(v + v_t \bar{\sigma}_\phi) \nabla \left(\frac{\phi}{k}\right) \nabla k + C_{p1} \frac{\bar{\varepsilon}}{k} (2\alpha - 1) \phi$$

$$+ (C_{p2} + C_{p4}) \left[\frac{(\psi/k)(\psi/k)}{v_t/k(1 + 25/Re)} - P/k \right] \phi$$

$$\prod_{\psi}^{\text{slow}} = -2(v + v_t) \nabla \left(\frac{\psi}{k}\right) \nabla k - C_{p1} \frac{\bar{\varepsilon}}{k} (1 - \alpha) \psi$$

و مدل‌های سریع برای ترم کرنش- فشار عبارت است از:

$$\prod_{\phi}^{\text{rapid}} = C_{p2} \frac{P}{k} \phi$$

$$\prod_{\psi}^{\text{rapid}} = (1 - C_{p2}) \phi \omega + C_{p2} \psi \frac{P}{k} + C_\mu (2\alpha - 1) \psi \omega - 2\alpha \frac{P}{k} \psi$$

نهایتاً ترم‌های استهلاک انرژی توسط روابط زیر بیان می‌شوند:

$$\varepsilon_\phi = 2(v + v_t \bar{\sigma}_\phi) \nabla \phi^{1/2} \cdot \nabla \phi^{1/2} + 2\alpha \frac{\phi}{k} \varepsilon$$

$$\varepsilon_\psi = \alpha \frac{\psi}{k} \varepsilon$$

اطلاعات دقیق‌تر درباره سایر پارامترها و ثابت‌های معادلات فوق در مراجع [7,8] آورده شده است. در معادلات حاکم فوق ترمی که دربرگیرنده ثابت $C_t = 0.0033$ است عبارتی حساس برای فرایند انتقال از لایه‌ای به درهم می‌باشد. از آنجا که مقدار این ثابت خیلی کوچک است تاثیر زیادی بر رفتار ناحیه کاملاً درهم نمی‌گذارد ولی تاثیری مستقیم بر فرایند انتقال جریان دارد. مقادیر بزرگ‌تر برای C_t باعث می‌شود که فرایند انتقال در جریان زودتر شروع شود.

نکته‌ای که باید به آن توجه شود این است که اگرچه در این مدل معادلات انتقال $k - \varepsilon$ حل می‌شوند لیکن شباهت زیادی بین این مدل و مدل استاندارد $k - \varepsilon$ وجود ندارد. در این مدل پتانسیل-های جریان (ϕ, ψ) به کمک رابطه دقیق $\nabla \cdot R = \nabla \phi + \nabla \times \psi$ تعریف می‌شوند، به طوری که از k, ε فقط برای مدلسازی ترم‌های چشمه در معادلات این مدل استفاده شده و مستقیماً برای محاسبه

تولید انرژی در آنها خیلی دقیق نیست. یکی از مشکلات این مدل‌ها این است که فرض می‌کنند اثر نوسانات کمیت‌های جریان با مقدار کمیت‌های متوسط جریان در حال تعادل هستند. می‌دانیم که فرایند انتقال جریان از حالت لایه‌ای به درهم فرایندی غیرتعادلی است و حین فرایند انتقال، دامنه نوسانات جریان به صورت نمایی بر حسب زمان رشد می‌نمایند. با همه مشکلات فوق، جالب است بدانیم که هنوز هم مدل‌های دو معادله‌ای قادرند رفتاری معادل فرایند انتقال، یعنی افزایش سریع در شدت توربولانسی و تغییرات سریع در ضریب اصطکاک سطحی را از خود بروز دهند. این نشان می‌دهد که با مدلسازی مناسب معادله RST، و استفاده از معادلات دیفرانسیل مدل‌های دو معادله‌ای می‌توان رشد سریع کمیت‌ها را به صورت ریاضی ایجاد نموده و رفتاری مشابه جریان‌های گذرا و در حال انتقال را با آنها شبیه سازی عددی نمود. لذا با افزایش دقت در ترم‌های تولید و کرنش- فشار از معادله RST، انتظار می‌رود که بتوان به کمک این مدل‌ها پیش‌بینی دقیقی از موقعیت انتقال جریان در لایه‌های مرزی را بدست آورد.

مدل پتانسیل توربولانسی که در این کار تحقیقاتی از آن استفاده شده فرمولاسیون دیگری از معادلات RST بوده که حالت فیزیکی پدیده‌های توزیع‌کننده انرژی و حالت غیرتعادلی در جریان‌ها را حفظ می‌کند [9,10]. در عین حال میزان محاسبات و پیچیدگی برنامه‌نویسی آن نسبت به مدل‌های دو معادله‌ای موجود چندان تغییری نمی‌کند. نحوه فرمولاسیون این مدل و قابلیت‌های آن در حل جریان‌های کاملاً درهم در مقالات Perot ارائه شده است [8,9,10,11]. استفاده از دیدگاه این مدل توربولانسی در مدلسازی کمیت‌های توربولانسی باعث افزایش قابلیت مدل‌های RANS در تحلیل جریان‌های غیر تعادلی، نظیر فرایند انتقال در جریان‌ها می‌شود.

۴. معادلات حاکم

معادلات به کار رفته در این مدل به صورت ذیل می‌باشند [8].

$$\frac{Dk}{Dt} = \nabla \cdot (v + v_t \bar{\sigma}_k) \nabla k + P - \varepsilon \quad (8-الف)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \nabla \cdot (v + v_t \bar{\sigma}_\varepsilon) \nabla \varepsilon + \frac{\bar{\varepsilon}}{k} (C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (8-ب)$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \nabla \cdot (v + v_t \bar{\sigma}_\phi) \nabla \phi + \prod_{\phi}^{\text{slow}} + \prod_{\phi}^{\text{rapid}} - \varepsilon_\phi \quad (8-ج)$$

$$+ C_t (1 - 1.5 \frac{\phi}{k}) P (\frac{v_t}{\nu})^{1/2}$$

$$\frac{D\psi}{Dt} = \nabla \cdot (v + v_t) \nabla \psi + \prod_{\psi}^{\text{slow}} + \prod_{\psi}^{\text{rapid}} - \varepsilon_\psi \quad (8-د)$$

$$+ C_t (\frac{v_t}{\nu})^{1/2} \omega k$$

ثابت‌ها و پارامترهای روابط فوق عبارتند از:

تانسور تنش رینولدز و یا اعمال اثرات توربولانسی جریان به کار نمی‌روند.

۵. روش حل عددی و شرایط مرزی

برای انجام تحلیل‌های عددی این مقاله یک کد عددی لایه مرزی تهیه شده که در آن معادلات دیفرانسیلی حاکم با استفاده از روش حجم محدود در دامنه محاسباتی منفصل شده‌اند. همچنین به جای توزیع سلول‌های محاسباتی در کل دامنه محاسباتی، از طرح پیمایش مکانی استفاده شده است. به طوری که محور x به عنوان متغیر شبه زمانی عمل کرده و فقط از یک مش محاسباتی که در جهت y دامنه محاسباتی را تا ارتفاع بیشتری از ضخامت لایه مرزی تقسیم می‌کند استفاده شده است [۱۲].

در کد عددی تهیه شده، می‌توان از هر دو نوع شرایط مرزی دیرشله و نیومن^۱ استفاده نمود. شرایط مرزی روی دیواره برای همه کمیت‌های انتقالی از نوع دیرشله می‌باشند یعنی:

$$u=0, \quad k=0, \quad \varepsilon=\varepsilon_0$$

$$\varphi=0, \quad \psi=0$$

و در مرز فوقانی و آزاد جریان، تنها $\psi=0$ است و برای سایر کمیت‌ها از شرط گرادپان صفر به صورت زیر استفاده شده است:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial k}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=0$$

۶. ارائه و تحلیل نتایج

با به کارگیری این مدل و کد عددی تهیه شده، چندین جریان گذرا مورد تحلیل قرار گرفته و در هر مورد نتایج با داده‌های تجربی مقایسه شده‌اند. این تحلیل‌ها شامل حالات زیر می‌باشند.

۱- جریان روی صفحه تخت با گرادپان فشار صفر به‌ازای مقادیر مختلف شدت توربولانسی جریان آزاد

۲- جریان روی صفحه تخت با اعمال گرادپان فشار غیر صفر به‌ازای مقادیر مختلف شدت توربولانسی جریان آزاد

به‌منظور ارزیابی عملکرد مدل در پیش‌بینی موقعیت شروع انتقال جریان و تخمین طول این ناحیه، از تغییرات ضریب اصطکاک سطحی در طول صفحه، به‌عنوان معیاری برای تفکیک نواحی لایه‌ای و درهم جریان استفاده شده و نتایج در نمودارهای جداگانه‌ای رسم شده‌اند.

۶-۱ جریان روی صفحه تخت با گرادپان فشار صفر

در این تحلیل برای تمام حالات پروفیل سرعت ورودی به صورت یکنواخت در نظر گرفته شده است. مقادیر اولیه سرعت U_0 ، عدد رینولدز توربولانسی $Re_T = k^2 / (\nu \varepsilon)$ و شدت توربولانسی اولیه جریان آزاد $Tu = (2/3k)^{1/2} / U_\infty$ برای پنج حالت مختلف آزمایشگاهی در جدول ۱ آورده شده‌اند. مقادیر اولیه انرژی جنبشی

توربولانسی k به کمک رابطه $k = 3/2(Tu.U_0)^2$ تعیین می‌شود. برای حالات $Tu = 0.03, 1.25, 1.3\%$ ، مقادیر اولیه نرخ استهلاک جریان (ε) به کمک رابطه $\varepsilon = k^2 / (\nu Re_T)$ بدست آورده شده‌اند و برای حالات $6\%, Tu = 3\%$ ، مقادیر اولیه ε, k از داده‌های تجربی موجود جایگزین شده‌اند. همچنین برای تمام حالات فوق مقادیر اولیه ϕ, ψ به ترتیب برابر صفر و $\varphi = 2/3k$ در نظر گرفته شده و مقدار ویسکوزیته سینماتیکی برای هوا برابر $\nu = 1.55 \times 10^{-5}$ لحاظ شده است [۱۲].

در شکل‌های ۱ و ۲ مقدار ضریب اصطکاک سطحی C_f برحسب Re_x برای شرایط مختلف فوق‌الذکر ترسیم شده است. عدد رینولدز بر مبنای فاصله از ابتدای صفحه می‌باشد. در این شکل‌ها به‌منظور مقایسه و بررسی بهتر نتایج، ضریب اصطکاک سطحی مربوط به جریان‌های کاملاً لایه‌ای (رابطه $C_{f,Lam.} = 0.664 Re_x^{-1/2}$) و جریان‌های کاملاً درهم (رابطه $C_{f,turb.} = 0.027 Re_x^{-1/7}$) نیز محاسبه و ترسیم شده‌اند.

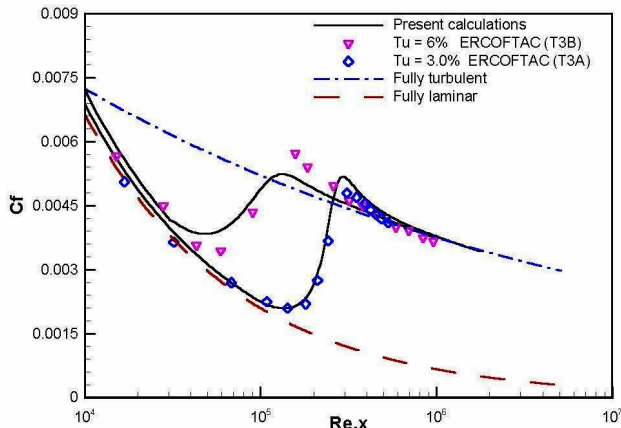
نتایج حاصله نشان می‌دهد که قابلیت این مدل برای پیش‌بینی موقعیت انتقال و تخمین طول ناحیه انتقال برای جریان روی صفحه تخت مناسب می‌باشد. در شکل ۱ به علت کم بودن مقادیر شدت توربولانسی اولیه، انتقال جریان از نوع طبیعی بوده و مشاهده می‌شود که نتایج عددی حالت $Tu = 0.03\%$ تفاوت بیشتری با داده‌های تجربی دارد. علت این تفاوت در شرایط اولیه‌ای است که در هر کدام از روش‌های عددی و تجربی اعمال شده است. حتی نتایج تجربی برای موقعیت انتقال جریان در محیط‌های بسیار کم اغتشاش دارای پراکندگی وسیعی می‌باشند. این محدوده از مقدار تجربی خیلی زیاد $Re_{x,tr} = 5.0 \times 10^6$ [17] تا مقادیر کم بدست آمده از روش‌های تئوری (نظیر روش e^9) $Re_{x,tr} = 2.0 \times 10^6$ [18]، متغیر است. این تفاوت‌ها به علت وجود تغییرات در سطح نوپز و اغتشاشات محلی می‌باشد. البته با تغییر شرایط اولیه به مقدار بسیار ناچیزی می‌توان نتایجی منطبق بر داده‌های تجربی این حالت (جریان بسیار کم اغتشاش) بدست آورد. توجه شود که قابلیت این مدل در پیش‌بینی انتقال در حالت جریان‌های بسیار کم اغتشاش (انتقال طبیعی) نسبت به سایر مدل‌های RANS منحصر به فرد می‌باشد.

خطای قابل ملاحظه دیگر حل عددی با تجربی در انتهای فرایند انتقال جریان و شروع ناحیه درهم است. به نظر می‌رسد که علت این تفاوت استفاده از معادلات لایه مرزی بوده که در این کد عددی استفاده شده است. زیرا در کد لایه مرزی از معادله اندازه حرکت در راستای عمود بر صفحه صرف‌نظر شده است. در حالی که در قسمت‌های انتهایی پدیده انتقال، جایی که جریان سریعاً درهم می‌شود، لایه مرزی به شدت رشد کرده لذا استفاده از این فرض در این منطقه از جریان خیلی صحیح نمی‌باشد. یقیناً با حل کامل معادلات ناویر-استوکس می‌توان نتایج دقیق‌تری را بدست آورد.

¹ Dirichlet and Neumann

جدول ۱. مقادیر اولیه پارامترهای جریان در لبه ورودی لایه مرزی با گرادیان فشار صفر

U_0 (m/s)	Re_T	Tu(%)	مرجع
24.4	100	0.03	[13]
22	250	1.25	[14]
14.42	250	1.3	[15]
5.4	200	3.0	ERCOFTAC, T3A [16]
9.4	200	6.0	ERCOFTAC, T3B [16]



شکل ۲. تغییرات ضریب اصطکاک سطحی بر حسب عدد رینولدز برای انتقال برگشتی جریان روی صفحه تخت

۲-۶. جریان روی صفحه تخت با گرادیان فشار غیر صفر

در این تحلیل نیز برای تمام حالات، پروفیل سرعت ورودی به صورت یکنواخت در نظر گرفته شده است. مقادیر اولیه سرعت U_0 ، عدد رینولدز توربولانسی $Re_T = k^2 / (v\epsilon)$ ، شدت توربولانسی اولیه جریان $Tu = (2/3k)^{1/2} / U_\infty$ برای دو حالت مختلف آزمایشگاهی در جدول ۲ آورده شده‌اند.

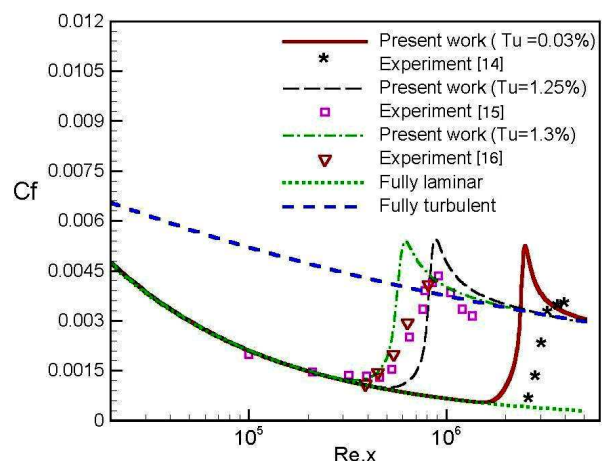
برای هر دو حالت فوق مقادیر اولیه ϵ ، k بر مبنای داده‌های تجربی موجود و مقادیر اولیه ϕ ، ψ به ترتیب برابر صفر و $\phi = 2/3k$ در نظر گرفته شده‌اند [۱۲].

گرادیان فشار متغیر اعمال شده در تست‌های تجربی T3C3 و T3C1 به گونه‌ای طراحی شده است که بتواند جریان عبوری از بین پره‌های یک توربین را شبیه‌سازی نماید. لذا در هر دو مورد فوق در ابتدا گرادیان فشار منفی (مطلوب) و سپس مثبت (معکوس) می‌شود. پروفیل تغییرات فشار در هر دو حالت فوق تقریباً مشابه شکل ۴ می‌باشد.

در شکل ۵ نتایج عددی محاسبه شده برای جریان روی صفحه تخت با گرادیان فشار متغیر، منطبق با شرایط آزمایش T3C1 نشان داده شده است.

در شکل ۲ نتایج تحلیل برای مقادیر بالای شدت توربولانسی جریان آزاد ارایه شده است. در این حالات انتقال جریان از نوع برگشتی می‌باشد. به دلیل بالا بودن مقیاس شدت توربولانس جریان آزاد نسبت به تغییرات مولفه عمودی سرعت در فرایند انتقال، که در محاسبات کد لایه مرزی فعلی منظور نمی‌شوند، مقدار پرش منحنی در انتهای فرایند انتقال نسبتاً کم می‌باشد.

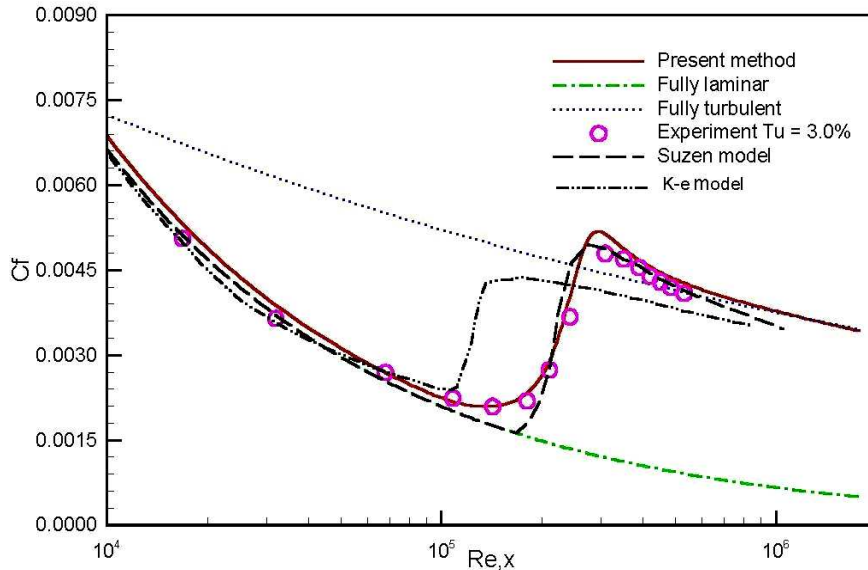
در شکل ۳ نتایج تحلیل عددی حاضر به همراه دو حل عددی دیگر یکی با استفاده از مدل $k-\epsilon$ intermittency و دیگری یک مدل $k-\epsilon$ [Launder&Sharma] که هر دو توسط مرجع [6] معرفی شده‌اند، با نتایج تجربی [16] T3A مقایسه شده‌اند. مشاهده می‌شود که نتایج پیش‌بینی شده توسط مدل $k-\epsilon$ برای این حالت خاص مناسب نبوده ولی نتایج مدل [6] Suzen اندازه کمیت‌ها را در انتهای مرحله انتقال جریان بسیار خوب تحلیل نموده است ولی در پیش‌بینی شروع ناحیه انتقال کمی تاخیر مکانی دارد. همچنین مشاهده می‌شود که مدل فعلی، رفتار فرایند انتقال را به صورت پیوسته و نرم‌تری نشان می‌دهد. به عبارت دیگر این مدل نه تنها توانسته موقعیت شروع ناحیه انتقال را به خوبی پیش‌بینی نماید بلکه طول ناحیه انتقال جریان را نیز با دقت قابل قبولی خوب تخمین زده است.



شکل ۱. تغییرات ضریب اصطکاک سطحی بر حسب عدد رینولدز برای انتقال طبیعی جریان روی صفحه تخت

جدول ۲. مقادیر اولیه پارامترهای جریان در لبه ورودی لایه مرزی برای شرایط گرادیان غیر صفر

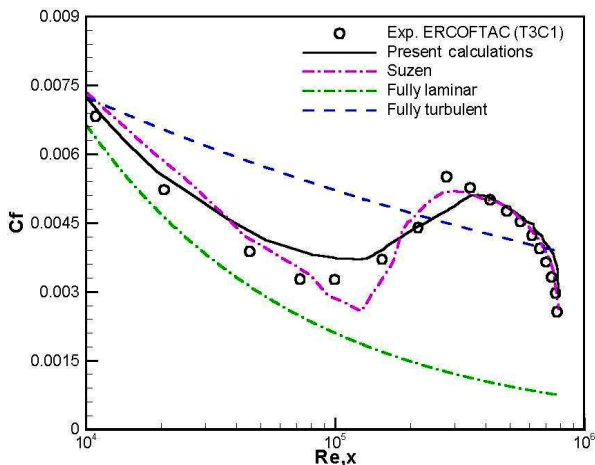
U_0 (m/s)	Re_T	Tu (%)	مرجع
5.9	160	6.6	ERCOFTAC T3C1 [19]
3.0	100	3.0	ERCOFTAC T3C3 [19]



شکل ۳. مقایسه پیش‌بینی‌های انتقال در لایه مرزی با گرادیان فشار صفر برای شرایط تجربی T3A

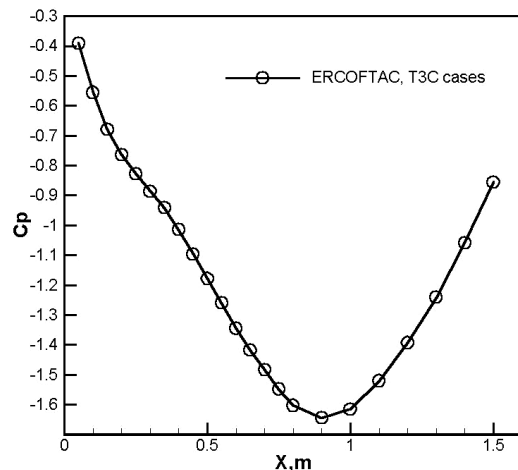
عدم استفاده از رابطه‌ای پیوسته برای تغییرات گرادیان فشار بوده که

همچنین نتایج عددی بدست آمده توسط مدل [6] Suzen نیز برای مقایسه ارائه شده‌اند. همچنین در شکل ۶ نتایج عددی محاسبه شده برای جریان روی صفحه تخت با گرادیان فشار متغیر منطبق با شرایط آزمایش T3C3 نشان داده شده است.



شکل ۵. انتقال در لایه مرزی با گرادیان فشار متغیر برای شرایط تجربی T3C1

برای کد عددی باید استفاده می‌شد. در این دو تحلیل صرفاً از داده‌های تجربی برای گرادیان فشار موجود استفاده شده و فاصله نسبتاً زیاد مکانی بین این داده‌ها باعث تکه‌ای شدن حل عددی گردیده است. یعنی بین هر دو داده تجربی یک ناحیه با فشار ثابت وجود داشته که همین خود منجر به بروز خطاهای عددی شده است. به



شکل ۴. ضریب فشار بر حسب فاصله از ابتدای صفحه

نتایج عددی ارائه شده در شکل‌های ۵ و ۶ موقعیت و طول ناحیه انتقال را به درستی پیش‌بینی نموده لیکن تفاوت‌هایی در ناحیه لایه‌ای جریان مشاهده می‌شود. وجود این خطاها بیشتر به علت

[8] Perot B. "Turbulence Modeling using Body Force Potentials", Phys. Fluids 11,1999.

[9] Perot J and Taupier J. "Modeling Three-Dimensional Boundary Layers using the Turbulent Potential Model", AIAA 2000-0914, 2000.

[10] Are S., Zhang X. and Perot B., "Accuracy and Conservation Properties of a Three-Dimensional Unstructured Staggered Mesh Scheme for Fluid Dynamics", Int. J. Rotating Machinery, 2001.

[11] Tsuei H-S and Perot B., "Turbomachinery Predictions using the Turbulent Potential Model", AIAA paper 2000 - 0135, 2000.

[۱۲] سالاری محمود، تقوی زنوز رضا، «پیش بینی موقعیت انتقال در لایه های مرزی با استفاده از مدل پتانسیل توربولانسی»، پنجمین کنفرانس سراسری و دومین کنفرانس بین المللی انجمن هوافضای ایران، اصفهان، بهمن ۱۳۸۲.

[13] Schubauer G. and Klebano .P S., "Contribution to the Mechanism of Boundary Layer Transition", NACA T.N.3489, 1955.

[14] Abu-Ghannam J. and Shaw R., "Natural Transition of Boundary Layers the Effects of Turbulence, Pressure Gradient, and Flow History", J. Mech. Eng. Sci. 22 213 -28, 1988.

[15] Dhawan S. and Narasimha R., "Some Properties of Boundary Layer Flow during the Transition from Laminar to Turbulent Motion", J. Fluid Mech. 3 418 - 36., 1958.

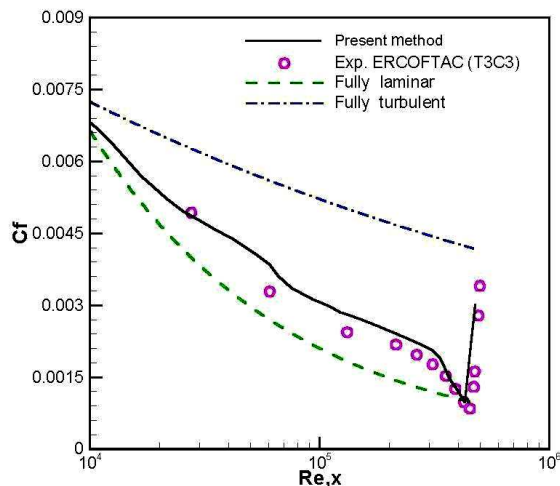
[16] Coupland J., ERCOFTAC Special Interest Group on Laminar to Turbulent Transition and Retransition T3A and T3B Test cases, 1992.

[17] Well C. S., "Effects of Free Stream Turbulence on Boundary Layer Transition", AIAA J.5 172 -4, 1967.

[18] Warsi Z UA., Fluid Dynamics Theoretical and Computational Approaches, Boca Raton, Chemical Rubber Company, 1999.

[19] Coupland J., ERCOFTAC Special Interest Group on Laminar to Turbulent Transition and Retransition T3C Test cases, 1992.

علاوه مشاهده می شود که وجود گرادیان فشار منفی در ابتدای صفحه تخت باعث به تاخیر افتادن موقعیت شروع انتقال نسبت به حالت بدون گرادیان فشار شده که با واقعیت فیزیکی مسئله نیز تناسب دارد.



شکل ۶. انتقال در لایه مرزی با گرادیان فشار متغیر برای شرایط تجربی T3C3

مراجع

[1] Saric W. S., "Boundary Layer Stability and Transition", Fifth Int. Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, pp. 23-33, 1990.

[2] Saric W. S., White E. B., Reed H.L., "Boundary Layer Receptivity to Freestream Disturbances and its Role in Transition", AIAA paper 1999-3788, 1999.

[3] Van Driest E. R. and Blumer C., "Boundary Layer Transition, Free Stream Turbulence, and Pressure Gradient Effects", AIAA Journal 1993-1303, 1993.

[4] Savill A. M., A Synthesis of T3 Test Case Predictions Numerical Simulation of Unsteady Flows and Transition to Turbulence, Cambridge University Press, 1999.

[5] Savill A. M., Turbulence and Transition Modelling, Kluwer Academic Press, 1996.

[6] Suzen Y. and Huang P. G., "Modeling of Flow Transition using an Intermittency Transport Equation", J. Fluids Eng. 122, 1999.

[7] Perot B., "A New Approach to Turbulence Modeling", Proceeding of the Center for Turbulence, Stanford university, 1997.