نشریه بین‌المللی علوم مهندسی، شماره ۴، جلد۱۷، پاییز ۱۳۸۵، صفحه ۳۱- ۲۳
دانشگاه علم و صنعت ایران

توسعه مدل MADM دوبعدی با استفاده از شاخص درجۀ اطمینان فازی

مجید نوجوان و مهدی غضنفری

چکیده: مدلهای تصمیم‌گیری چند شاخصه (MADM) برای حل مسائلی با معیارهای غالباً ناسازگار بکار می‌روند. عدم اطمینان موجود در این مدلها را می‌توان به دو دستۀ عدم اطمینان موجود در مقادیر قضاوتها و عدم اطمینان موجود در بیان قضاوتها تقسیم نمود. در مدلهای MADM فازی، عدم اطمینان در مقادیر قضاوتها و عدم اطمینان موجود در بیان قضاوتها با هم ترکیب شده و این عدم اطمینان با استفاده از تئوری فازی بیان می‌شود، اما در مدلهای MADM دو بعدی این دو نوع عدم اطمینان جدا از هم در نظر گرفته شده و برای نشان دادن میزان اطمینان در بیان قضاوتهای تصمیم‌گیر از شاخص درجه اطمینان (CF) استفاده می‌گردد. به علت وجود ابهام در تعیین یک مقدار قطعی برای CF، در این مقاله برای نشان دادن مقادیر CF از متغیرهای زبانی و یا اعداد فازی استفاده و این مدل جدید، مدل MADM دو بعدی فازی نامیده شده است. همچنین برای حل مدل پیشنهادی نیز یک رویکرد جدید با در نظر گرفتن دیدگاه تصمیم‌گیر در مورد عدم اطمینان توسعه داده شده است. مثالهای عددی حل شده نشان می‌دهد که در نظر گرفتن درجه اطمینان قضاوتها با استفاده از شاخص CF فازی می‌تواند دقت و صحت تصمیم‌گیری را افزایش دهد.

واژه‌های کلیدی: تصمیم‌گیری چند شاخصه (MADM)، MADM دو بعدی، شاخص درجه اطمینان (CF)، شاخص درجه اطمینان فازی

۱. مقدمه

یکی از روشهای متداول در حوزه تصمیم‌گیری، استفاده از روشهای تصمیم‌گیری چند شاخصه (MADM)[1] است. هدف در این رویکردها انتخاب یک گزینه از میان گزینه‌های موجود و یا رتبه‌بندی گزینه‌های موجود با توجه به چندین شاخص معمولاً ناسازگار می‌باشد. در مدلهای MADM، قضاوت انسانی در امتیازدهی به گزینه‌ها و یا انجام مقایسات زوجی وجود داشته و از اینرو ممکن است این قضاوتها دارای عدم اطمینان باشند. این عدم اطمینان معمولاً ناشی از وجود اطلاعات کیفی، اطلاعات ناکامل، اطلاعات نادقیق یا شواهد جزئی[2] می‌باشد [1]. عدم اطمینان در قضاوتها را می‌توان به دو دسته کلی، عدم اطمینان در مقدار قضاوتها و عدم اطمینان نسبت به صحت قضاوتهای انجام شده، تقسیم نمود. در مدلهای MADM برای در نظر گرفتن عدم اطمینان در قضاوتها از دو رویکرد تئوری احتمال و تئوری فازی استفاده شده است. از میان این دو رویکرد، تئوری فازی به علت شباهت بیشتر با نحوه درک و بیان انسان و نیز راحتی محاسباتی در عمل کاربرد گسترده‌تری یافته است [۳ و ۲].

در مدل‌های MADM فازی، عدم اطمینان در مقادیر قضاوت‌ها و نیز عدم اطمینان به صحت قضاوت‌ها با هم ترکیب شده و برای نشان دادن آن از اعداد فازی یا متغیرهای زبانی استفاده می‌شود. بلمن و زاده[3] [4] اولین نویسندگانی بودند که مفاهیم فازی را در مدل‌های MADM به‌کار گرفته و مدل‌های MADM فازی را معرفی نمودند. پس از این معرفی فعالیت‌های گسترده‌ای در زمینه توسعه مدل‌های MADM فازی صورت پذیرفت که در این میان کیکرت[4] [5]، دیوباس و پرید[5] [6] و زیمرمن[6] [7,8] مقالات انجام شده در این زمینه را جمع‌آوری و تشریح نموده‌اند.

نسخه اصلی مقاله در تاریخ ۱۳۸۲/۱۰/۱۵ واصل و پس از بازنگریهای لازم، در تاریخ ۱۳۸۵/۲/۶ به تصویب نهایی رسیده است.

مجید نوجوان، استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب، mnojavan@azad.ac.ir .
دکتر مهدی غضنفری، دانشیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، mehdi@iust.ac.ir.

[1] Multi-Attributes Decision Making (MADM)
[2] Partial Ignorance
[3] Belman and Zadeh
[4] Kickert
[5] Dubais and Prade
[6] Zimmermann

چون در مدل‌های MADM فازی، هر دو نوع عدم اطمینان با هم ترکیب شده‌اند، فرض بر این است که تصمیم‌گیر می‌تواند عدم اطمینان نسبت به صحت قضاوت را در خود قضاوت نشان دهد و یا در صورتی‌که نتواند این کار را انجام دهد، در مورد همهٔ قضاوت‌ها دانش و اطمینان یکسان دارد. با توجه به این فرض، در هنگام استفاده از مدل‌های MADM فازی معمولاً با طرح پرسش‌هایی از تصمیم‌گیر می‌خواهند تا نظر خود را در مورد امتیاز گزینه‌ها یا مقایسات زوجی در قالب کلمات یا اعدادی در یک بازهٔ معین و از پیش تعیین شده بیان کند، و در مورد میزان اطمینان به صحت قضاوت‌ها به‌صورت جداگانه پرسشی صورت نمی‌گیرد.

با توجه به این که نشان دادن درجهٔ اطمینان قضاوت در خود قضاوت معمولاً به سادگی مقدور نبوده و ممکن است به اشتباه در قضاوت بیانجامد و از طرفی فرض یکسان بودن درجهٔ اطمینان تصمیم‌گیر نسبت به کلیه قضاوت‌ها نیز در بسیاری از موارد صادق نیست، مدل‌های MADM دو بعدی توسط غضنفری و نوجوان [9] و [۱۰] توسعه داده شده‌اند. در مدل MADM دو بعدی، در کنار هر قضاوت یک شاخص درجهٔ اطمینان (CF) نیز وجود دارد که میزان اطمینان تصمیم‌گیر نسبت به آن قضاوت را نشان می‌دهد. پارامتر CF[1] یک اندازهٔ رسمی از درجهٔ درستی اطلاعات را نشان می‌دهد که به‌صورت گسترده در سیستم‌های خبره به‌کار گرفته شده است. CF می‌تواند در هر بازه‌ای تعریف شود اما معمولاً نرمالایز شده و در بازهٔ [۱-۰] بیان می‌شود که در این حالت صفر نشان‌دهندهٔ عدم اطمینان کامل و یک نشان‌دهندهٔ اطمینان کامل به قضاوت می‌باشد [11].

در استفاده از مدل MADM دو بعدی پیشنهاد شده توسط غضنفری و نوجوان دو مشکل وجود دارد:

الف) به علت وجود ابهام در تعیین CF ، استفاده از یک مقدار قطعی برای نشان دادن درجه اطمینان به سادگی مقدور نیست.

ب) در روش پیشنهادی برای حل مدل MADM دو بعدی، درجه اطمینان به صورت یک شاخص مثبت در نظر گرفته شده است که هر چقدر مقدار آن بیشتر باشد بهتر است. این وضعیت فقط برای تصمیم‌گیر ریسک‌گریز صادق است، زیرا تصمیم‌گیر ریسک‌گریز اثر عدم اطمینان بر روی رتبه‌بندی را به صورت منفی در نظر گرفته و فرض می‌کند که در صورت وجود عدم اطمینان در یک رتبه، وضعیت آن رتبه بدتر شده و رتبه از مقدار محاسباتی آن کمتر می‌گردد.

در این مقاله برای رفع مشکلات فوق، ابتدا شاخص CF به صورت یک متغیر زبانی یا عدد فازی در نظر گرفته شده و این مدل جدید، مدل MADM دو بعدی فازی نامیده شده است. سپس رویکرد حل مدل MADM دو بعدی فازی با توجه به دیدگاههای مختلف تصمیم‌گیر توسعه داده شده است.

[1] Certainty Factor (CF)

ساختار مقاله به این صورت است که ابتدا در بخش ۲، مدل MADM دو بعدی با CF قطعی و روش دو مرحله‌ای حل آن تشریح شده است. سپس در بخش ۳، مدل MADM دو بعدی با استفاده از CF فازی توسعه داده شده و رویکردی برای حل آن پیشنهاد شده است. همچنین برای مقایسه مدلها و روشهای حل آنها، یک مثال در بخش ۴ آورده شده است. نهایتاً در بخش آخر نتیجه‌گیری آمده است.

۲. تشریح مدل MADM دو بعدی

مدل‌های MADM دو بعدی توسط غضنفری و نوجوان [9] و [۱۰] توسعه داده شده‌اند. در این مدل‌ها از تصمیم‌گیر خواسته می‌شود که علاوه بر بیان مقدار قضاوت، درجهٔ اطمینان نسبت به هر قضاوت را نیز به‌صورت مجزا و توسط شاخص CF در بازهٔ [۱-۰] مشخص کند. نمونه‌ای از ماتریس تصمیم‌گیری مدل‌های MADM دو بعدی در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول ۱. ماتریس تصمیم‌گیری مدل MADM دو بعدی

شاخص / گزینه	C_1	…	C_n
A_1	(r_{11}, CFr_{11})	…	(r_{1n}, CFr_{1n})
⋮	⋮		⋮
A_m	(r_{m1}, CFr_{m1})	…	(r_{mn}, CFr_{mn})

که در آن A_i گزینه i $(i=1,..,m)$، C_j شاخص j $(j=1,..,n)$، r_{ij} امتیاز گزینه i در شاخص j و CFr_{ij} مقدار CF برای قضاوت r_{ij} را نشان می‌دهد. همچنین وزن شاخص‌ها نیز به‌صورت بردار دو بعدی زیر نشان داده می‌شود:

$$W^T = \{(w_1, CFw_1), \dots, (w_n, CFw_n)\} \quad (۱)$$

که در آن w_j وزن شاخص j ام و CFw_j مقدار CF برای w_j می‌باشد.

برای رتبه‌بندی گزینه‌ها در مدل MADM دو بعدی، غضنفری و نوجوان دو روش ساده توسعه داده‌اند که روش یک مرحله‌ای و روش دو مرحله‌ای نامیده شده‌اند.

در روش یک مرحله‌ای، ابتدا یک شاخص CF به شاخص‌های مسئله اضافه شده و سپس با ادغام همهٔ درجات اطمینان مربوط به یک گزینه، امتیاز آن گزینه در شاخص CF به‌دست می‌آید. سپس مدل MADM به‌دست آمده که یک مدل MADM یک بعدی معمولی است با استفاده از روش‌های متداول حل می‌شود.

در روش دو مرحله‌ای، عملیات بر روی درجات اطمینان قضاوتها به موازات عملیات بر روی قضاوتها انجام شده و نهایتاً به همراه رتبه هر گزینه، درجه اطمینان هر رتبه نیز مشخص می‌شود. سپس رتبه و درجه اطمینان رتبه به صورت دو شاخص یک مدل MADM معمولی در نظر گرفته شده و وزن این دو شاخص توسط

تصمیم‌گیر تعیین می‌گردند. نهایتاً با استفاده از یکی از روشهای متداول حل مسایل MADM، رتبه نهایی هر گزینه محاسبه می‌گردد.

از میان دو روش فوق، روش دو مرحله‌ای در عمل کاربرد گسترده‌تری دارد، زیرا در این روش درجه اطمینان تاثیر بیشتری در تعیین رتبه نهایی گزینه‌ها دارد [۱۰].

قدمهای حل مدل MADM دوبعدی با استفاده از روش دو مرحله‌ای در زیر مشخص شده است:

قدم ۱: انتخاب روش رتبه‌بندی و نحوه ترکیب درجات اطمینان

برای محاسبه رتبه گزینه‌ها و نیز ترکیب درجۀ اطمینان قضاوت‌ها و تعیین درجه اطمینان هر رتبه، عمل‌گرهای مناسب را انتخاب کنید.

قدم ۲: محاسبه رتبه و درجه اطمینان رتبه در هر گزینه

با استفاده از عمل‌گرهای انتخاب شده در قدم ۱ و با انجام عملیات همزمان بر روی قضاوت‌ها و نیز ترکیب درجۀ اطمینان قضاوت‌ها، رتبه هرگزینه را همراه با درجۀ اطمینان هر رتبه مشخص نمایید.

قدم ۳: تشکیل ماتریس تصمیم‌گیری ثانویه

رتبه‌ها و درجه اطمینان رتبه‌ها را که در قدم ۲ به‌دست آمده است، به‌صورت شاخص‌های یک مدل MADM معمولی ثانویه در نظر گرفته و ماتریس تصمیم‌گیری این مدل را مانند جدول ۲ تشکیل دهید:

جدول ۲. ماتریس تصمیم‌گیری ثانویه

شاخص / گزینه	رتبه	درجه اطمینان رتبه
A_1	R_1	CFR_1
⋮	⋮	⋮
A_m	R_m	CFR_m

که در آن R_i رتبه گزینه i و CFR_i درجۀ اطمینان به رتبه گزینه i می‌باشد.

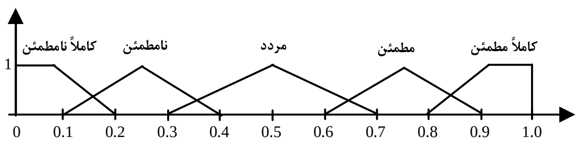
قدم ۴: حل مدل MADM ثانویه

در ماتریس تصمیم‌گیری ثانویه، وزن دو شاخص رتبه و درجۀ اطمینان رتبه را توسط تصمیم‌گیر به صورت قطعی مشخص کرده و با استفاده از یکی از روشهای متداول حل مدلهای MADM، رتبه نهایی گزینه‌ها را مشخص کنید.

لازم به ذکر است که در روش دو مرحله‌ای، شاخص درجۀ اطمینان به عنوان یک شاخص مثبت در نظر گرفته شده است و در نتیجه هر چقدر مقدار درجه اطمینان بیشتر باشد از نظر تصمیم‌گیر بهتر می‌باشد.

۳. توسعه مدل MADM دو بعدی با CF فازی

به علت وجود ابهام در مشخص کردن درجه اطمینان، تعیین یک مقدار قطعی برای CF به سادگی مقدور نیست. ما در این مقاله برای در نظر گرفتن این ابهام، CF را به صورت یک متغیر زبانی یا یک عدد فازی نشان داده و مدل بدست آمده را مدل MADM دو بعدی فازی نامیده‌ایم. تصمیم‌گیر می‌تواند برای نشان دادن مقادیر CF از انواع اعداد فازی مانند، اعداد فازی ذوزنقه‌ای، مثلثی، فاصله‌ای و یا متغیرهای زبانی استفاده نماید. به عنوان مثال تصمیم‌گیر می‌تواند برای نشان دادن میزان اطمینان به قضاوتهای خود از واژه‌های فازی شکل ۱ استفاده کند.



شکل ۱. واژه‌های مرتبط با متغیر زبانی درجۀ اطمینان

برای رتبه‌بندی گزینه‌ها در مدل MADM دو بعدی فازی، ما روش دو مرحله‌ای را که در بخش ۲ تشریح گردید، با در نظر گرفتن CF فازی توسعه داده و این روش را ***روش دو مرحله‌ای فازی*** نامیده‌ایم. در روش دو مرحله‌ای فازی، عملیات بر روی درجه اطمینان قضاوتها به صورت فازی ادامه می‌یابد تا برای هر رتبه یک شاخص درجه اطمینان فازی محاسبه شود. سپس این درجات اطمینان فازی به مقادیر قطعی تبدیل شده و یک ماتریس تصمیم‌گیری ثانویه قطعی بدست می‌آید. نهایتاً این ماتریس تصمیم‌گیری ثانویه با استفاده از رویکردهای متداول حل می‌گردد. روش دو مرحله‌ای فازی دارای قدمهای زیر می‌باشد:

قدم ۱: انتخاب روش رتبه‌بندی و نحوه ترکیب درجات اطمینان

برای محاسبه رتبه گزینه‌ها و نیز ترکیب درجۀ اطمینان قضاوت‌ها و به دست آوردن درجه اطمینان هر رتبه، عمل‌گرهای مناسب را انتخاب کنید.

قدم ۲: تبدیل متغیرهای زبانی به اعداد فازی

در صورتیکه برای نشان دادن CF از متغیرهای زبانی استفاده شده است، ابتدا با استفاده از مقیاسهای استاندارد، این متغیرهای زبانی را به اعداد فازی تبدیل نمائید[1].

به عنوان نمونه متغیرهای زبانی نشان داده در شکل ۱ را می‌توان با استفاده از این روش به اعداد فازی ذوزنقه‌ای زیر تبدیل نمود:

کاملاً نامطمئن = (۰ ، ۰ ، ۰/۱ ، ۰/۲)
نامطمئن = (۰/۱ ، ۰/۲۵ ، ۰/۲۵ ، ۰/۴)
مردد = (۰/۳ ، ۰/۵ ، ۰/۵ ، ۰/۷)
مطمئن = (۰/۶ ، ۰/۷۵ ، ۰/۷۵ ، ۰/۹)
کاملاً مطمئن = (۰/۸ ، ۰/۹ ، ۱ ، ۱)

قدم ۳: محاسبه رتبه و درجه اطمینان رتبه برای هر گزینه

با انجام عملیات بر روی قضاوت‌ها و به صورت هم‌زمان، ترکیب درجات اطمینان با استفاده از عمل‌گرهای انتخاب شده در قدم ۱، رتبه هر گزینه را همراه با درجهٔ اطمینان رتبه به‌صورت فازی مشخص نمایید.

فرض کنید که درجات اطمینان به صورت اعداد فازی ذوزنقه‌ای زیر نشان داده شوند:

$$CFr_{ij} = (m_{ij}^r, l_{ij}^r, u_{ij}^r, d_{ij}^r) \qquad j=1,\dots,n \qquad i=1,\dots,m$$
$$CFw_j = (m_j^w, l_j^w, u_j^w, d_j^w) \qquad j=1,\dots,n \tag{۲}$$

که در آن CFr_{ij} و CFw_j به ترتیب درجه اطمینان فازی برای r_{ij} و w_j می‌باشند.

در این حالت برای ترکیب درجات اطمینان می‌توان از دو عمل‌گر ضرب و میانگین به صورت زیر استفاده نمود:

$$CF_i = \frac{\sum_{j=1}^{n}(CFr_{ij} . CFw_j)}{n} \qquad i=1,\dots,m \tag{۳}$$

که در آن CF_i درجه اطمینان فازی برای رتبه گزینه i می‌باشد. در فرمول فوق CF_i به‌صورت چهارتایی مرتب زیر نشان داده می‌شود:

$$CF_i = (m_i , l_i , u_i , d_i) \qquad i = 1,\dots,m \tag{۴}$$

که در آن داریم:

$$m_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(m_{ij}^r . m_j^w\right) \qquad i = 1,\dots,m$$
$$l_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(l_{ij}^r . l_j^w\right) \qquad i = 1,\dots,m$$
$$u_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(u_{ij}^r . u_j^w\right) \qquad i = 1,\dots,m \tag{۵}$$
$$d_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(d_{ij}^r . d_j^w\right) \qquad i = 1,\dots,m$$

قدم ۴: تشکیل ماتریس تصمیم‌گیری ثانویه فازی

رتبه‌ها و درجه اطمینان رتبه‌ها را که در قدم ۳ به‌دست آمده است، به‌صورت شاخص‌های یک مدل MADM ثانویه فازی در نظر گرفته و این ماتریس را مانند جدول ۳ تشکیل دهید:

جدول ۳. ماتریس تصمیم‌گیری ثانویه

شاخص / گزینه	رتبه	درجه اطمینان رتبه
A_1	R_1	CFR_1
⋮	⋮	⋮
A_m	R_m	CFR_m

که در آن R_i رتبه گزینه i و CFR_i درجهٔ اطمینان فازی به رتبه گزینه i می‌باشد.

قدم ۵: نرمالایز کردن درجات اطمینان رتبه‌ها با توجه دیدگاه تصمیم‌گیر

برای ترکیب رتبه و درجه اطمینان رتبه برای هر گزینه ابتدا دیدگاه تصمیم‌گیر در مورد اثر عدم اطمینان در رتبه‌بندی را مشخص کنید. اگر تصمیم‌گیر ریسک گریز باشد، اثر عدم اطمینان بر روی رتبه‌بندی به صورت منفی در نظر گرفته شده و فرض می‌شود که در صورت وجود عدم اطمینان در یک رتبه، وضعیت آن رتبه بدتر شده و رتبه از مقدار محاسباتی آن کمتر می‌گردد. بنابراین در این دیدگاه، درجه اطمینان یک شاخص مثبت بوده و هر چقدر مقدار CF بیشتر باشد بهتر است. به صورت عکس، اگر تصمیم‌گیر ریسک پذیر باشد، فرض می‌شود که در صورت وجود عدم اطمینان در یک رتبه، وضعیت آن رتبه بهتر از مقدار محاسباتی آن می‌شود و بنابراین در این دیدگاه درجه اطمینان یک شاخص منفی بوده و هر چقدر مقدار CF کمتر باشد بهتر است.

برای در نظر گرفتن دیدگاه یک تصمیم‌گیر معمولی (نرمال) می‌توان بردارهای رتبه‌بندی گزینه‌ها در دو دیدگاه ریسک گریز و ریسک پذیر را به صورت زیر با هم ترکیب نمود:

$$R_n = t . R_p + (1-t) . R_o \tag{۶}$$

که در آن R_p، R_o و R_n به ترتیب بردارهای رتبه‌بندی در دیدگاه‌های ریسک گریز، ریسک پذیر و معمولی بوده و t ضریب تبدیل دیدگاه می‌باشد. ضریب تبدیل در فاصله [۰-۱] قرار داشته و مقدار آن با توجه به نظر تصمیم‌گیر در ترکیب بردارهای رتبه‌بندی در دیدگاههای ریسک گریزی و ریسک پذیری مشخص می‌شود.

پس از محاسبه مقادیر CF_i فازی در قدم ۳، آن‌ها را با توجه به دیدگاه تصمیم‌گیر نرمالایز نمایید.

اگر در دیدگاه تصمیم‌گیر، درجه اطمینان به‌صورت یک شاخص مثبت در نظر گرفته می‌شود، برای نرمالایز کردن این مقادیر از رابطه زیر استفاده کنید:

$$CF_i^{\,n} = \frac{CF_i}{\sum_{i=1}^{m} CF_i} \qquad i=1,\dots,m \tag{۷}$$

که در آن CF_i^n درجه اطمینان فازی نرمالایز شده برای رتبه گزینه i می‌باشد.
در این حالت CF_i^n به‌صورت چهارتایی مرتب زیر نشان داده می‌شود:

$$CF_i^n = (\frac{m_i}{d}, \frac{l_i}{u}, \frac{u_i}{l}, \frac{d_i}{m}) \qquad i = 1,...,m \qquad (۸)$$

که در آن داریم:

$$m = \sum_{i=1}^{m} m_i \ , \ l = \sum_{i=1}^{m} l_i \ , \ u = \sum_{i=1}^{m} u_i \ , \ d = \sum_{i=1}^{m} d_i \qquad (۹)$$

همچنین در صورتی‌که درجه اطمینان به‌صورت یک شاخص منفی در نظر گرفته شود، باید ابتدا مشخصات معکوس CF_i را به‌صورت زیر تعیین نمود:

$$CF_i' = \frac{1}{CF_i} = (m_i', l_i', u_i', d_i') \qquad i = 1,..., m \qquad (۱۰)$$

که در آن داریم:

$$m_i' = \frac{1}{d_i} \ , \ l_i' = \frac{1}{u_i} \ , \ u_i' = \frac{1}{l_i} \ , \ d_i' = \frac{1}{m_i} \qquad (۱۱)$$

سپس برای نرمالایز کردن این مقادیر از رابطه زیر استفاده می‌گردد:

$$CF_i^n = \frac{CF_i'}{\sum_{i=1}^{m} CF_i'} \qquad i = 1,..., m \qquad (۱۲)$$

در این حالت CF_i^n به‌صورت چهارتایی مرتب زیر نشان داده می‌شود:

$$CF_i^n = (\frac{m_i'}{d'}, \frac{l_i'}{u'}, \frac{u_i'}{l'}, \frac{d_i'}{m'}) \qquad i = 1,...,m \qquad (۱۳)$$

که در آن داریم:

$$m' = \sum_{i=1}^{m} m_i' \ , \ l' = \sum_{i=1}^{m} l_i' \ , \ u' = \sum_{i=1}^{m} u_i' \ , \ d' = \sum_{i=1}^{m} d_i' \qquad (۱۴)$$

لازم به ذکر است که اگر چه درجه اطمینان قضاوت‌ها به‌صورت اعداد فازی ذوزنقه‌ای در نظر گرفته شده‌اند، اما مقادیر درجه اطمینان فازی ادغامی محاسبه شده برای هر رتبه، به‌صورت اعداد فازی ذوزنقه‌ای نمی‌باشد. در این حالت تابع درجه عضویت برای چهارتایی‌های مرتب CF_i^n به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 0 & x \le \frac{m_i}{d} \\ 0 & x \ge \frac{d_i}{m} \\ 1 & \frac{l_i}{u} \le x \le \frac{u_i}{l} \\ \alpha & \frac{m_i}{d} \le x \le \frac{l_i}{u} \\ \alpha & \frac{u_i}{l} \le x \le \frac{d_i}{m} \end{cases} \qquad (۱۵)$$

که در آن $\mu_i(x)$ تابع درجه عضویت CF_i^n بوده و داریم:

$$\begin{aligned} f_i(\alpha) &= \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left[\left(l_{ij}^r - m_{ij}^r\right)\alpha + m_{ij}^r\right]\left[\left(l_j^w - m_j^w\right)\alpha + m_j^w\right]\right) & \frac{m_i}{d} \le x \le \frac{l_i}{u} \\ g_i(\alpha) &= \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left[\left(u_{ij}^r - d_{ij}^r\right)\alpha + d_{ij}^r\right]\left[\left(u_j^w - d_j^w\right)\alpha + d_j^w\right]\right) & \frac{u_i}{l} \le x \le \frac{d_i}{m} \\ f(\alpha) &= \sum_{i=1}^{m} f_i(\alpha) \ , \ g(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} g_i(\alpha) & i = 1,...,m \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

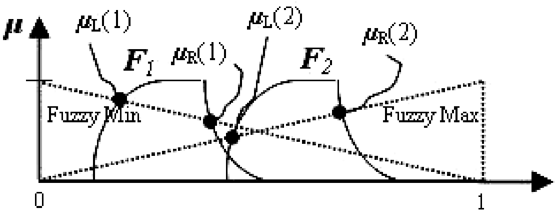
رابطه بین درجه عضویت CF_i^n و مقدار متغیر x نیز از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} x_L(i) &= \frac{f_i(\alpha)}{g(\alpha)} & \frac{m_i}{d} \le x \le \frac{l_i}{u} & \qquad i = 1,...,m \\ x_U(i) &= \frac{g_i(\alpha)}{f(\alpha)} & \frac{u_i}{u} \le x \le \frac{d_i}{m} & \qquad i = 1,...,m \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

که در آن $x_L(i)$ و $x_U(i)$ به‌ترتیب رابطه x و درجه عضویت CF_i^n را در سمت چپ و راست عدد فازی درجه اطمینان رتبه i نشان می‌دهند.
لازم به ذکر است که فرمولهای مورد استفاده در انجام عملیات بر روی اعداد فازی ذوزنقه‌ای از مرجع [1] اقتباس شده‌اند.

قدم ۶: تشکیل ماتریس تصمیم‌گیری ثانویه قطعی

برای غیر فازی کردن درجات اطمینان رتبه‌ها، از روش رتبه‌بندی چن و هوانگ [1] استفاده نمائید.
در روش چن و هوانگ برای تبدیل اعداد فازی به مقادیر قطعی، دو مجموعه فازی حداکثر و حداقل [1] بکار رفته و با استفاده از آنها دو مقدار مطلوب و نامطلوب برای هر عدد فازی محاسبه می‌شود. سپس با ترکیب این دو مقدار، اعداد فازی به مقادیر قطعی تبدیل می‌شوند. شکل ۲، دو مجموعه فازی حداکثر و حداقل و نیز مقادیر مطلوب و نامطلوب را برای دو عدد فازی F_1 و F_2 نشان می‌دهد.



شکل ۲. قطعی کردن اعداد فازی در روش چن و هوانگ

در روش چن و هوانگ تابع درجه عضویت برای دو مجموعه فازی حداکثر و حداقل به‌صورت زیر نشان داده می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mu_{Fuzzy\ max}(x) &= \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \mu_{Fuzzy\ min}(x) &= \begin{cases} 1 - x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

[1] Fuzzy Max & Fuzzy Min Sets

پس از تعیین مقادیر مطلوب و نامطلوب برای هر عدد فازی، این مقادیر با استفاده از رابطه زیر با هم ترکیب می‌شوند تا مقدار قطعی هر عدد فازی مشخص گردد.

$$w_i = \lambda.\mu_R(i) + (1-\lambda).(1-\mu_L(i)) \qquad i = 1,...,m \qquad (۱۹)$$

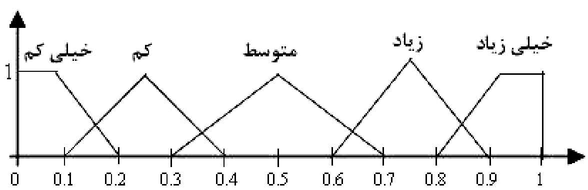
که در آن $\mu_R(i)$ و $\mu_L(i)$ به‌ترتیب مقادیر مطلوب و نامطلوب عدد فازی CF_i^n و w_i مقدار قطعی CF_i^n می‌باشد. λ ضریب ریسک‌پذیری تصمیم‌گیر را نشان داده و عددی بین [۱-۰] می‌باشد که در آن مقادیر صفر، نیم و یک به‌ترتیب، ضرایب تصمیم‌گیر ریسک‌گریز، معمولی و ریسک‌پذیر را نشان می‌دهند.

قدم ۷: حل مدل MADM ثانویه قطعی

وزن دو شاخص رتبه و درجهٔ اطمینان رتبه در ماتریس ثانویه را با توجه به دیدگاه تصمیم‌گیر به‌صورت قطعی مشخص کرده و با استفاده از یکی از روشهای متداول حل مدلهای MADM، رتبه نهایی گزینه‌ها را محاسبه کنید.

۴. مثال عددی

فرض کنید که می‌خواهیم از بین سه نوع اتومبیل $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ یکی را انتخاب کنیم. برای اینکار پنج شاخص مثبت $C_۱$ تا $C_۵$ را در نظر گرفته‌ایم که در آن $C_۲$، $C_۳$ و $C_۵$ شاخص‌های کیفی بوده و مقادیر آن‌ها با استفاده از واژه‌های شکل ۳ انتخاب می‌شوند [۱۰].



شکل ۳. واژه‌های مرتبط با متغیر زبانی شاخص‌های کیفی

هم‌چنین فرض کنید که امتیاز گزینه‌ها و درجهٔ اطمینان آن‌ها توسط تصمیم‌گیر مشخص شده و در ماتریس تصمیم‌گیری زیر نشان داده شده است.

جدول ۴. ماتریس تصمیم‌گیری دو بعدی

شاخص / گزینه	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۳ کاملاً مطمئن	متوسط کاملاً مطمئن	خیلی زیاد کاملاً مطمئن	۲۴۰۰۰ کاملاً مطمئن	خیلی کم کاملاً مطمئن
A_2	۱/۲ کاملاً مطمئن	زیاد کاملاً مطمئن	متوسط مطمئن	۲۵۰۰۰ کاملاً مطمئن	کم مطمئن
A_3	۱/۵ کاملاً مطمئن	خیلی زیاد مطمئن	کم مطمئن	۳۲۰۰۰ کاملاً مطمئن	زیاد مردد

در ماتریس فوق مقادیر موجود در هر خانه به‌ترتیب نشان‌دهنده امتیاز و درجه اطمینان امتیاز داده شده به هر گزینه در هر شاخص می‌باشد. بردار وزن شاخص‌ها نیز توسط تصمیم‌گیر به‌صورت زیر مشخص شده است.

W^T = {(۰/۳ , کاملاً مطمئن), (۰/۲ , کاملاً مطئمن), (۰/۲ , کاملاً مطئمن), (۰/۲ , کاملاً مطئمن), (۰/۱ , کاملاً مطمئن)}

مثال فوق در دو حالت بدون در نظر گرفتن مقادیر CF و با در نظر گرفتن مقادیر CF فازی حل شده و نتایج بدست آمده با هم مقایسه شده‌اند.

۴-۱. حل مثال بدون در نظر گرفتن مقادیر CF

برای نشان دادن نقش درجات اطمینان در رتبه‌بندی صحیح گزینه‌ها، مدل MADM دو بعدی فوق، ابتدا به صورت یک بعدی و بدون در نظر گرفتن درجات اطمینان حل می‌شود. اگر درجات اطمینان قضاوتها در مثال فوق در نظر گرفته نشوند، می‌توان مدل MADM یک بعدی حاصل را با استفاده از روشهای متداول به سادگی حل نمود. فرض کنید برای تبدیل متغیرهای زبانی امتیازات به اعداد فازی، از مقیاس مشخص شده در شکل ۳ استفاده شده و اعداد فازی حاصل نیز با استفاده از روش چن و هوانگ به اعداد قطعی تبدیل گردند. در این حالت ماتریس تصمیم‌گیری مثال فوق به صورت زیر تبدیل می‌شود:

جدول ۵. ماتریس تصمیم‌گیری قطعی

شاخص / گزینه	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۳	۰/۵	۰/۹۰۹	۲۴۰۰۰	۰/۰۹۱
A_2	۱/۲	۰/۷۱۷	۰/۵	۲۵۰۰۰	۰/۲۸۳
A_3	۱/۵	۰/۹۰۹	۰/۲۸۳	۳۲۰۰۰	۰/۷۱۷

اگر از روش جمع وزنی ساده (SAW)[1] [۱۲] برای حل این مدل استفاده شود، ابتدا باید ماتریس تصمیم‌گیری به‌صورت زیر نرمالایز گردد:

جدول ۶. ماتریس تصمیم‌گیری نرمالایز شده

شاخص / گزینه	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۰/۵۲۶	۰/۲۳۵	۰/۵۳۷	۰/۲۹۶	۰/۰۸۴
A_2	۰/۲۱۱	۰/۳۳۷	۰/۲۹۶	۰/۳۰۹	۰/۲۵۹
A_3	۰/۲۶۳	۰/۴۲۸	۰/۱۶۷	۰/۳۹۵	۰/۶۵۷

رتبه هر گزینه در روش SAW به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

[1] Simple Additive Weighting (SAW)

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_{ij} . w_j \qquad i = 1,...,m \qquad (۲۰)$$

که در آن $\overline{r_{ij}}$ امتیاز نرمالایز شده گزینه i در شاخص j و R_i رتبه گزینه i می‌باشد. با استفاده از رابطه فوق بردار رتبه به‌دست آمده برای گزینه‌ها در مثال به‌صورت زیر می‌باشد:

R = (۰/۳۵۹ , ۰/۲۷۳ , ۰/۳۶۸)

بنابراین ترتیب اولویت گزینه‌ها به‌صورت A۲ < A۱ < A۳ خواهد بود.

۲-۴. حل مثال با در نظر گرفتن مقادیر CF فازی

در صورتی‌که مقادیر CF فازی برای قضاوتها در نظر گرفته شوند، برای حل مثال می‌توان از روش دو مرحله‌ای فازی به صورت زیر استفاده نمود:

قدم ۱: انتخاب روش رتبه‌بندی و نحوه ترکیب درجات اطمینان

فرض کنید که می‌خواهیم برای ترکیب درجات اطمینان قضاوتها در هنگام ضرب آن‌ها از عمل‌گر ضرب و در هنگام جمع آن‌ها از عمل‌گر میانگین استفاده کنیم. هم‌چنین برای محاسبه رتبه‌ها نیز از روش SAW استفاده می‌کنیم.

قدم ۲: تبدیل متغیرهای زبانی به اعداد فازی

فرض کنید که متغیرهای زبانی قضاوت‌ها و نیز درجات اطمینان آن‌ها به ترتیب با استفاده از مقیاس‌های نشان داده شده در شکل‌های ۳ و ۱ به اعداد فازی تبدیل شوند.

در این حالت ماتریس تصمیم‌گیری مثال به‌صورت نشان داده شده در جدول ۷ تبدیل می‌شود.

هم‌چنین می‌توان بردار وزن شاخص‌ها را نیز به‌صورت دو بعدی زیر نشان داد:

W^T={ (**۰/۳** ،(۰/۸ ،۰/۹،۱،۱)) ، (**۰/۲** ،(۰/۸ ،۰/۹،۱،۱)) ، (**۰/۲** ،(۰/۸ ،۰/۹،۱،۱))
(**۰/۱** ،(۰/۸ ،۰/۹،۱،۱)) ، (**۰/۲** ،(۰/۸ ،۰/۹،۱،۱)) }

قدم ۳: محاسبه رتبه و درجه اطمینان رتبه برای هر گزینه

با استفاده از نتایج به‌دست آمده برای حل مثال بدون استفاده از درجات اطمینان (که در بخش ۱-۴ آمده است)، بردار رتبه‌بندی گزینه‌ها به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

R = (۰/۳۵۹ , ۰/۲۷۳ , ۰/۳۶۸)

در این حالت می‌توان درجات اطمینان رتبه‌ها را با استفاده از عمل‌گرهای انتخاب شده در قدم ۲ و با استفاده از فرمول‌های (۲) تا (۱۴) به‌صورت بردار فازی زیر محاسبه نمود:

CF = { (۰/۶۴, ۰/۸۱, ۱, ۱) , (۰/۵۷۶, ۰/۷۵۶, ۰/۹, ۰/۹۶) ,
(۰/۴۹۶, ۰/۶۸۴, ۰/۸, ۰/۹) }

قدم ۴: تشکیل ماتریس تصمیم‌گیری ثانویه فازی

پس از محاسبه رتبه‌ها و درجه اطمینان رتبه‌ها می‌توان آن‌ها را به‌صورت ماتریس تصمیم‌گیری ثانویه فازی زیر نشان داد:

جدول ۸. ماتریس تصمیم‌گیری ثانویه فازی

شاخص / گزینه	رتبه	درجه اطمینان رتبه
A_1	۰/۳۵۹	(۰/۶۴, ۰/۸۱, ۱, ۱)
A_2	۰/۲۷۳	(۰/۵۷۶, ۰/۷۵۶, ۰/۹, ۰/۹۶)
A_3	۰/۳۶۸	(۰/۴۹۶, ۰/۶۸۴, ۰/۸, ۰/۹)

قدم ۵: نرمالایز کردن درجات اطمینان رتبه‌ها با توجه دیدگاه تصمیم‌گیر

فرض کنید که می‌خواهیم رتبه‌بندی را با توجه به سه دیدگاه ریسک گریز، ریسک پذیر و معمولی تشریح شده در بخش ۳ انجام دهیم. در صورتیکه تصمیم‌گیر ریسک گریز باشد ماتریس ثانویه فازی نرمالایز شده به صورت زیر مشخص می‌شود:

جدول ۹. ماتریس تصمیم‌گیری ثانویه فازی در دیدگاه ریسک گریز

شاخص / گزینه	رتبه	درجه اطمینان رتبه
A_1	۰/۳۵۹	(۰/۲۲۴, ۰/۳, ۰/۴۴۴, ۰/۵۸۴)
A_2	۰/۲۷۳	(۰/۲۰۱, ۰/۲۸, ۰/۴, ۰/۵۶۱)
A_3	۰/۳۶۸	(۰/۱۷۳, ۰/۲۵۳, ۰/۳۵۶, ۰/۵۲۶)

هم‌چنین اگر تصمیم‌گیر ریسک‌پذیر باشد، ماتریس تصمیم‌گیری ثانویه فازی نرمالایز شده به‌صورت زیر تبدیل می‌گردد:

جدول ۱۰. ماتریس تصمیم‌گیری ثانویه فازی در دیدگاه ریسک پذیر

شاخص / گزینه	رتبه	درجه اطمینان رتبه
A_1	۰/۳۵۹	(۰/۱۸۸, ۰/۲۴۹, ۰/۳۶۷, ۰/۴۹۶)
A_2	۰/۲۷۳	(۰/۱۹۶, ۰/۲۷۶, ۰/۳۹۴, ۰/۵۵۱)
A_3	۰/۳۶۸	(۰/۲۰۹, ۰/۳۱۱, ۰/۴۳۵, ۰/۶۳۹)

قدم ۶: تشکیل ماتریس تصمیم‌گیری ثانویه قطعی

با استفاده از روش رتبه بندی چن و هوانگ، مقادیر مطلوب و نامطلوب درجه اطمینان فازی در دو دیدگاه ریسک‌پذیر و ریسک‌گریز به‌صورت زیر محاسبه می‌گردند.

جدول ۱۱. مقادیر مطلوب و نامطلوب برای درجات اطمینان فازی

مقدار CF / گزینه	درجه اطمینان رتبه (دیدگاه ریسک گریز)		درجه اطمینان رتبه (دیدگاه ریسک‌پذیر)	
	مقدار نامطلوب	مقدار مطلوب	مقدار نامطلوب	مقدار مطلوب
A_1	۰/۲۷۹	۰/۵۱۲	۰/۲۳۵	۰/۴۳۹
A_2	۰/۲۶۰	۰/۴۸۳	۰/۲۵۶	۰/۴۷۶
A_3	۰/۲۳۴	۰/۴۵۰	۰/۲۸۲	۰/۵۳۱

با در نظر گرفتن مقدار λ برابر ۰/۵، مقادیر مطلوب و نامطلوب درجه اطمینان هر رتبه با هم ترکیب شده و مقادیر قطعی درجه اطمینان در دو دیدگاه ریسک‌پذیر و ریسک‌گریز به‌صورت زیر مشخص می‌شوند:

جدول ۱۲. ماتریس تصمیم‌گیری ثانویه قطعی

شاخص / گزینه	رتبه	درجه اطمینان رتبه	
		ریسک‌گریز	ریسک‌پذیر
A_1	۰/۳۵۹	۰/۳۹۶	۰/۳۳۷
A_2	۰/۲۷۳	۰/۳۷۲	۰/۳۶۶
A_3	۰/۳۶۸	۰/۳۰۸	۰/۴۰۷

لازم به ذکر است که برای ساده شدن محاسبات، درجات اطمینان فازی نهایی به صورت اعداد فازی ذوزنقه‌ای تقریب زده شده‌اند.

قدم ۷: حل مدل MADM ثانویه

فرض کنید وزن شاخص‌های رتبه و درجهٔ اطمینان آن توسط تصمیم‌گیر به‌صورت زیر مشخص شده باشد:

$$W_d^T = (۰/۸ ، ۰/۲)$$

با مفروض بودن ماتریس تصمیم‌گیری ثانویه و وزن شاخص‌های آن و بکارگیری روش SAW، بردار رتبه‌بندی حاصل برای گزینه‌ها در دو دیدگاه ریسک‌گریز و ریسک‌پذیر به صورت زیر خواهد بود.

R_p = (۰/۳۵۹ , ۰/۲۸۵ , ۰/۳۵۶)

R_o = (۰/۳۴۸ , ۰/۲۸۴ , ۰/۳۶۸)

با توجه به بردارهای رتبه‌بندی فوق می‌توان اولویت‌بندی گزینه‌ها در دیدگاه ریسک‌گریز را به‌صورت $A_1 > A_3 > A_2$ و این اولویت‌بندی را در دیدگاه ریسک‌پذیر به‌صورت $A_3 > A_1 > A_2$ نشان داد.

حال فرض کنید که ضریب تبدیل دیدگاهی (t) برابر ۰/۵ در نظر گرفته شود، در این حالت بردار رتبه‌بندی در دیدگاه معمولی (نرمال) به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

R_n = ۰/۵ (۰/۳۵۹، ۰/۲۸۵، ۰/۳۵۶) +۰/۵ (۰/۳۴۸، ۰/۲۸۴، ۰/۳۶۸)

R_n = (۰/۳۵۴ , ۰/۲۸۵ , ۰/۳۶۱)

با توجه به بردار رتبه‌بندی فوق، اولویت‌بندی گزینه‌ها در دیدگاه معمولی به‌صورت $A_3 > A_1 > A_2$ می‌باشد.

با توجه به مثال فوق مشخص می‌شود که اگر چه در این مثال رتبه‌بندی گزینه‌ها با و بدون در نظر گرفتن درجات اطمینان مشابه است، اما رتبه هر گزینه با توجه به درجه اطمینان مربوط به آن‌ها تغییر کرده و علاوه بر آن رتبه‌بندی در دیدگاه‌های مختلف نیز متفاوت می‌باشد.

۵. نتیجه‌گیری

مسائل واقعی همیشه با عدم اطمینان همراه بوده و مدل‌های تصمیم‌گیری باید بتوانند این عدم اطمینان را به‌خوبی نشان دهند. عدم اطمینان موجود در مسائل تصمیم‌گیری تنها به نادقیق بودن مقادیر قضاوت‌ها محدود نمی‌شود، بلکه افراد خبره‌ای هم که مورد سئوال واقع می‌شوند، ممکن است به سئوالات با اطمینان بالایی پاسخ ندهند. در مدل‌های MADM دو بعدی، عدم اطمینان موجود در قضاوت‌ها و نیز عدم اطمینان در صحت قضاوت‌ها به‌صورت جداگانه در نظر گرفته شده و برای نشان دادن صحت قضاوت‌ها از شاخص قطعی درجه اطمینان استفاده شده است. در این مقاله ما برای نشان دادن درجه اطمینان قضاوت‌ها از متغیرهای زبانی یا اعداد فازی استفاده کرده و این مدل را MADM دو بعدی فازی نامیده‌ایم. هم‌چنین برای حل این مدل نیز با توجه به دیدگاه تصمیم‌گیر یک رویکرد جدید پیشنهاد کرده‌ایم. یک مثال حل شده نشان می‌دهد که استفاده از شاخص فازی درجه اطمینان دقت و صحت تصمیم‌گیری را افزایش می‌دهد.

جدول ۷. ماتریس تصمیم‌گیری مثال در حالت تبدیل متغیرهای زبانی به اعداد فازی

شاخص / گزینه	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۳ (۰/۸، ۰/۹، ۱، ۱)	(۰/۳، ۰/۵، ۰/۵، ۰/۷) (۰/۸، ۰/۹، ۱، ۱)	(۰/۸، ۰/۹، ۱، ۱) (۰/۸، ۰/۹، ۱، ۱)	۲۴۰۰۰ (۰/۸، ۰/۹، ۱، ۱)	(۰، ۰، ۰/۱، ۰/۲) (۰/۸، ۰/۹، ۱، ۱)
A_2	۱/۲ (۰/۸، ۰/۹، ۱، ۱)	(۰/۶، ۰/۷۵، ۰/۷۵، ۰/۹) (۰/۸، ۰/۹، ۱، ۱)	(۰/۳، ۰/۵، ۰/۵، ۰/۷) (۰/۶، ۰/۷۵، ۰/۷۵، ۰/۹)	۲۵۰۰۰ (۰/۸، ۰/۹، ۱، ۱)	(۰/۱، ۰/۲۵، ۰/۲۵، ۰/۴) (۰/۶، ۰/۷۵، ۰/۷۵، ۰/۹)
A_3	۱/۵ (۰/۸، ۰/۹، ۱، ۱)	(۰/۸، ۰/۹، ۱، ۱) (۰/۶، ۰/۷۵، ۰/۷۵، ۰/۹)	(۰/۱، ۰/۲۵، ۰/۲۵، ۰/۴) (۰/۶، ۰/۷۵، ۰/۷۵، ۰/۹)	۳۲۰۰۰ (۰/۸، ۰/۹، ۱، ۱)	(۰/۶، ۰/۷۵، ۰/۷۵، ۰/۹) (۰/۳، ۰/۵، ۰/۵، ۰/۷)

مراجع

[1] Chen S., Hwang C., *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making, Methods and Applications*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.

[۲] یعقوبی م.، ملکی ح.، ماشین چی م.، *"الگوریتمی برای مسئله انتخاب با داده‌های کمی و کیفی"*، مجله علوم دانشگاه تهران، جلد ۲۸، شماره ۲، صفحه ۲۷۴-۲۵۹، ۱۳۸۱.

[۳] یعقوبی م.، ملکی ح.، ماشین چی م.، *"کاربرد تصمیم‌گیری چند معیاره در مسئله انتخاب نرم‌افزار"*، کنفرانس مجموعه‌های فازی و کاربردهای آن، دانشگاه سیستان و بلوچستان، صفحه ۱۸۹-۱۸۰، ۱۳۸۱.

[4] Bellman R., Zadeh L. A., *"Decision Making in a Fuzzy Environment"*, Managemtent Science, Vol. 17, No.4, 1970.

[5] Kichkert W.J.M., *Fuzzy Theory on Decision Making*, A Critical Review, Martinus Nijhoff Social Sciences Devision, Leiden, 1978.

[6] Dubois D., Prade H., *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980.

[7] Zimmermann H. J., *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, Kluwer, Nijhoff Publishing, Boston, 1985.

[8] Zimmermann H. J., *Fuzzy Set, Decision Making, and Expert System*, Kluwer, Boston, 1987.

[9] Ghazanfari M., Nojavan M., *"Development A Two-Dimensional MADM Model By Certainty Factor"*, Proceedings of the 6th Annual International Conference on Industrial Engineering–Theory, Applications, and Practice, San Francisco, CA, USA, 18-20 November, 2001.

[۱۰] غضنفری م.، نوجوان م.، *"توسعه یک مدل MADM دو بعدی با شاخص CF"*،مجله امیرکبیر، سال سیزدهم، شماره ۴۹ ، زمستان ۱۳۸۰.

[11] Schneider M., Kandel A., Langholz G. and Chew G., *Fuzzy Expert System Tools*, John Wiley & Sons, England, 1996.

[۱۲] اصغرپور م.، *تصمیم‌گیری چند معیاره*، انتشارت دانشگاه تهران، چاپ اول ۱۳۷۷.