نشریه بین‌المللی علوم مهندسی، شماره ۵، جلد۱۷، زمستان ۱۳۸۵، صفحه ۵ - ۱
دانشگاه علم و صنعت ایران

واریانس دقیق آماره‌ی EWMA

مسعود نیکوکار زنجانی، سید محمدتقی فاطمی قمی و مهدی کلانتری

چکیده: زمانبندی هنگام استفاده از نمودار کنترل EWMA نیاز به واریانس آمارۀ EWMA داریم. در کتاب‌ها و مقالات مربوط به کنترل کیفیت آماری، از رابطه‌ای برای محاسبۀ این واریانس استفاده می‌شود که دقیق نیست و همان‌طور که نشان خواهیم داد، کمتر از مقدار واقعی است. در این مقاله، ابتدا واریانس دقیق آمارۀ EWMA را برای مشاهدات مستقل به دست آورده و سپس با مقایسۀ این واریانس جدید و واریانس قدیمی، تأثیر واریانس دقیق را بر حدود کنترل نمودار کنترل EWMA بررسی خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: نمودار کنترل EWMA، نمودار X، آمارۀ EWMA، نمونۀ تصادفی

۱. مقدمه

در بسیاری از موقعیت‌های صنعتی، به منظور کنترل فرآیند از نمونه‌ای به اندازۀ یک استفاده می‌شود (نظیر بسیاری از فرآیندهای شیمیایی) و یا به عبارت دیگر نمونه فقط شامل یک محصول است. در چنین مواردی نمونه‌های تکی در فواصل زمانی معین از فرآیند گرفته شده و سپس به منظور کنترل فرآیند با استفاده از این نمونه‌های تکی یا مشاهدات انفرادی[1]، از نمودار X استفاده می‌شود. از این نمودار اغلب در فرآیندهای شیمیایی که دما یا غلظت فرآیند اندازه‌گیری می‌شوند و یا صنایعی که از یک سیستم نظارت و اندازه‌گیری خودکار بهره می‌برند، استفاده می‌شود. علاوه بر این، نمودار X در صنایعی که سرعت خط تولید کند بوده و هزینۀ اندازه‌گیریِ مشخصۀ کیفی محصول بالاست، مفید واقع می‌شود. ولی نمودار X نسبت به پی بردن به وجود تغییرات کوچک در فرآیند مثلاً تغییراتی به اندازۀ ۱/۵ برابر انحراف معیار یا کمتر، نسبتاً بی‌تفاوت است. زمانی که پی بردن به وجود تغییرات کوچک در فرآیند مورد نظر باشد، نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی[2] می‌تواند جایگزین مناسبی برای نمودار X باشد[۱].

نسخه اصلی مقاله در تاریخ ۱۳۸۲/۷/۳۰ واصل، و پس از بازنگریهای لازم، در تاریخ ۱۳۸۳/۴/۸ به تصویب نهایی رسیده است.

دکتر مسعود نیکوکار زنجانی، استادیار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر.
دکتر سید محمدتقی فاطمی قمی، استاد دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر. fatemi@aut.ac.ir
مهدی کلانتری، دانشکدۀ ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

[1] Individual Observations
[2] Exponentially Weighted Moving Average (EWMA)

۲. نمودار کنترل EWMA

این نمودار برای اولین بار توسط روبرتس[3] [۲] معرفی شد. محققان دیگری نیز از جمله هانتر[4] [۳]، کرودر[5] [۴] و لوکاس و ساکوکی[6] [۵] تحقیقاتی در این زمینه انجام داده‌اند.

فرض کنید X_t نشان دهندۀ مشخصۀ کیفی محصول در زمان t باشد و $\{X_t\} \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma_p^2)$. μ و σ_p^2 به ترتیب نشان دهندۀ میانگین و واریانس فرآیند می‌باشند. آمارۀ EWMA را که با نماد S_t نشان می‌دهیم، به صورت رابطه (۱) تعریف می‌شود.

$$S_t = (1-\lambda) S_{t-1} + \lambda X_t \qquad t = 1, \ldots, n \tag{۱}$$

(n نشان دهندۀ تعداد نمونه است.) این یک رابطۀ بازگشتی بر حسب t است. با حل این رابطۀ بازگشتی برحسب X_t خواهیم داشت:

$$S_t = \sum_{i=0}^{t-1} \lambda (1-\lambda)^i X_{t-i} + (1-\lambda)^t S_0 \tag{۲}$$

λ پارامتر هموارسازی[7] نامیده می‌شود و عددی بین صفر و یک است. با استفاده از رابطۀ (۲) و با فرض اینکه S_0 مقداری ثابت بوده و مشاهدات مستقل باشند، به راحتی می‌توان $Var(S_t)$ را به دست آورد. این واریانس برابر است با:

$$Var(S_t) = \sigma_p^2 \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) \left[1 - (1-\lambda)^{2t} \right] \tag{۳}$$

در این صورت حدود کنترل نمودار کنترل EWMA را می‌توان با استفاده از رابطۀ (۴) محاسبه کرد.

[3] Roberts
[4] Hunter
[5] Crowder
[6] Lucas and Saccucci
[7] Smoothing Parameter

$$
\begin{aligned}
UCL &= S_0 + 3\sigma_p\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)\left[1-(1-\lambda)^{2t}\right]}\\
CL &= S_0\\
LCL &= S_0 - 3\sigma_p\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)\left[1-(1-\lambda)^{2t}\right]}
\end{aligned}
\qquad (۴)
$$

باید به این نکته توجه داشت که حدود کنترل به دست آمده با این فرض معتبرند که S_0 مقداری ثابت باشد. معمولاً S_0 را برابر میانگین حسابی مشاهدات گذشتهٔ فرآیند قرار می‌دهند. ولی متأسفانه در عمل، همواره این امکان وجود ندارد. مثلاً به دلیل ناقص بودن و یا مفقود شدن اطلاعات گذشته، جمع‌آوری اطلاعات از خط تولیدی که تازه راه اندازی شده است و یا جمع آوری اطلاعات از خط تولیدی که به دلیل معیوب بودن دستگاه‌های تولیدی، پس از یک وقفهٔ طولانی به راه افتاده و غیره. در چنین مواقعی مجبور هستیم که از اطلاعاتی که در زمان حال از فرآیند به دست آورده‌ایم، استفاده کنیم. در این صورت S_0 را معمولاً برابر $\bar{X}$ یعنی میانگین حسابی مشاهداتی که در زمان حال از فرآیند به دست آورده‌ایم، قرار می‌دهیم. واضح است که S_0 دیگر مقداری ثابت نبوده و در واقع یک متغیر تصادفی خواهد بود. در نتیجه، دیگر نمی‌توان برای محاسبهٔ $Var(S_t)$ از رابطهٔ (۳) استفاده کرد و حدود کنترلی که از رابطهٔ (۴) محاسبه می‌شوند، معتبر نخواهند بود. در بخش بعدی واریانس دقیق آمارهٔ EWMA را به دست می‌آوریم.

۳. واریانس دقیق آمارهٔ EWMA

قضیه: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از فرآیندی با واریانس متناهی σ_p^2 باشد. اگر $S_0 = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ آن گاه:

$$
\begin{aligned}
Var(S_t) = {} & \sigma_p^2\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)\left[1-(1-\lambda)^{2t}\right]\\
& + \frac{1}{n}\sigma_p^2(1-\lambda)^t\left[2-(1-\lambda)^t\right]
\end{aligned}
\qquad (۵)
$$

اثبات: با فرض اینکه $S_0 = \bar{X}$ و با استفاده از رابطهٔ (۲) داریم:

$$S_t = \sum_{i=0}^{t-1}\lambda(1-\lambda)^i X_{t-i} + (1-\lambda)^t\bar{X} \qquad (۶)$$

برای سهولت در انجام محاسبات، بردار وزن‌ها و بردار مشاهدات را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\underset{\sim}{w}' = \begin{pmatrix}\lambda & \lambda(1-\lambda) & \lambda(1-\lambda)^2 & \cdots & \lambda(1-\lambda)^{t-1} & (1-\lambda)^t\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{X}' = \begin{pmatrix}X_t & X_{t-1} & \cdots & X_1 & \bar{X}\end{pmatrix}$$

بنابراین رابطهٔ (۶) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$S_t = \underset{\sim}{w}'\underset{\sim}{X} \qquad (۷)$$

در این صورت داریم [۶]:

$$Var(S_t) = \underset{\sim}{w}'\,Var\left(\underset{\sim}{X}\right)\underset{\sim}{w} \qquad (۸)$$

وقتی که ماتریس $Var\left(\underset{\sim}{X}\right)$ به صورت زیر تعریف شود.

$$
Var\left(\underset{\sim}{X}\right) = \begin{pmatrix}
\sigma_p^2 & 0 & \cdots & 0 & Cov(X_t,\bar{X})\\
0 & \sigma_p^2 & \cdots & 0 & Cov(X_{t-1},\bar{X})\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & \sigma_p^2 & Cov(X_1,\bar{X})\\
Cov(\bar{X},X_t) & Cov(\bar{X},X_{t-1}) & \cdots & Cov(\bar{X},X_1) & Cov(\bar{X},\bar{X})
\end{pmatrix}
$$

از طرفی به ازای $j = 1,2,\dots,t$ داریم:

$$
\begin{aligned}
Cov(\bar{X},X_j) &= Cov(X_j,\bar{X}) = Cov\left(X_j,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Cov(X_j,X_i) = \frac{1}{n}Cov(X_i,X_i)\\
&= \frac{1}{n}Var(X_i) = \frac{1}{n}\sigma_p^2
\end{aligned}
\qquad (۹)
$$

بنابراین ماتریس $Var\left(\underset{\sim}{X}\right)$ به شکل زیر در خواهد آمد:

$$
Var\left(\underset{\sim}{X}\right) = \begin{pmatrix}
\sigma_p^2 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n}\sigma_p^2\\
0 & \sigma_p^2 & \cdots & 0 & \frac{1}{n}\sigma_p^2\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & \sigma_p^2 & \frac{1}{n}\sigma_p^2\\
\frac{1}{n}\sigma_p^2 & \frac{1}{n}\sigma_p^2 & \cdots & \frac{1}{n}\sigma_p^2 & \frac{1}{n}\sigma_p^2
\end{pmatrix}
$$

حال این ماتریس را به صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$
Var\left(\underset{\sim}{X}\right) = \left(\begin{array}{c|c}
\sigma_p^2 I & \frac{1}{n}\sigma_p^2\underset{\sim}{j}\\
\hline
\frac{1}{n}\sigma_p^2\underset{\sim}{j}' & \frac{1}{n}\sigma_p^2
\end{array}\right)
\qquad (۱۰)
$$

I نشان دهندهٔ ماتریس همانی t بعدی بوده و $\underset{\sim}{j}$ نیز برداری t بعدی از مقادیر ثابت یک است. یعنی:

$$\underset{\sim}{j}' = \begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix} \qquad (۱۱)$$

بردار $\underset{\sim}{w}$ را نیز به صورت زیر افراز می‌کنیم.

$$\underset{\sim}{w}' = \begin{pmatrix}\underset{\sim}{Y}' & (1-\lambda)^t\end{pmatrix} \qquad (۱۲)$$

وقتی که بردار $\underset{\sim}{Y}$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$\underset{\sim}{Y}' = \begin{pmatrix}\lambda & \lambda(1-\lambda) & \cdots & \lambda(1-\lambda)^{t-1}\end{pmatrix}$$

با در نظر گرفتن روابط (۱۰) و (۱۲) خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{w}'\,Var\left(\underset{\sim}{X}\right) &= \begin{pmatrix}\underset{\sim}{Y}' & (1-\lambda)^t\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c}
\sigma_p^2 I & \frac{1}{n}\sigma_p^2\underset{\sim}{j}\\
\hline
\frac{1}{n}\sigma_p^2\underset{\sim}{j}' & \frac{1}{n}\sigma_p^2
\end{array}\right)\\
&= \begin{pmatrix}\sigma_p^2\underset{\sim}{Y}' + \frac{1}{n}\sigma_p^2(1-\lambda)^t\underset{\sim}{j}' & \frac{1}{n}\sigma_p^2\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{j} + \frac{1}{n}\sigma_p^2(1-\lambda)^t\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

حال می‌توان با استفاده از رابطهٔ (۸)، $Var(S_t)$ را به دست آورد.

$$
\begin{aligned}
Var(S_t) &= \underset{\sim}{w}'\,Var\left(\underset{\sim}{X}\right)\underset{\sim}{w}\\
&= \begin{pmatrix}\sigma_p^2\underset{\sim}{Y}' + \frac{1}{n}\sigma_p^2(1-\lambda)^t\underset{\sim}{j}' & \frac{1}{n}\sigma_p^2\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{j} + \frac{1}{n}\sigma_p^2(1-\lambda)^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underset{\sim}{Y}\\ (1-\lambda)^t\end{pmatrix}\\
&= \sigma_p^2\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} + \frac{1}{n}\sigma_p^2(1-\lambda)^t\underset{\sim}{j}'\underset{\sim}{Y} + \frac{1}{n}\sigma_p^2(1-\lambda)^t\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{j} + \frac{1}{n}\sigma_p^2(1-\lambda)^{2t}
\end{aligned}
$$

ولی با توجه به تعریف بردارهای $\underset{\sim}{j}$ و $\underset{\sim}{Y}$ داریم:

$$\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} = \sum_{i=1}^{t} l^2 (1-l)^{2i-2}$$

$$\underset{\sim}{j}'\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{j} = \sum_{i=1}^{t} l (1-l)^{i-1}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
Var(S_t) &= s_p^2 \sum_{i=1}^{t} l^2 (1-l)^{2i-2} \\
&\quad + \frac{2}{n} s_p^2 (1-l)^t \sum_{i=1}^{t} l (1-l)^{i-1} + \frac{1}{n} s_p^2 (1-l)^{2t} \\
&= s_p^2 l^2 \sum_{i=1}^{t} \left[(1-l)^2\right]^{i-1} \\
&\quad + \frac{2}{n} s_p^2 (1-l)^t \, l \, \frac{1-(1-l)^t}{l} + \frac{1}{n} s_p^2 (1-l)^{2t} \\
&= s_p^2 l^2 \frac{1-(1-l)^{2t}}{1-(1-l)^2} \\
&\quad + \frac{2}{n} s_p^2 (1-l)^t \left[1-(1-l)^t\right] + \frac{1}{n} s_p^2 (1-l)^{2t} \\
&= s_p^2 \left(\frac{l}{2-l}\right)\left[1-(1-l)^{2t}\right] + \frac{2}{n} s_p^2 (1-l)^t \\
&\quad - \frac{2}{n} s_p^2 (1-l)^{2t} + \frac{1}{n} s_p^2 (1-l)^{2t} \\
&= s_p^2 \left(\frac{l}{2-l}\right)\left[1-(1-l)^{2t}\right] \\
&\quad + \frac{2}{n} s_p^2 (1-l)^t - \frac{1}{n} s_p^2 (1-l)^{2t} \\
&= s_p^2 \left(\frac{l}{2-l}\right)\left[1-(1-l)^{2t}\right] \\
&\quad + \frac{1}{n} s_p^2 (1-l)^t \left[2-(1-l)^t\right]
\end{aligned}$$

با مقایسهٔ روابط (۳) و (۵) به این نتیجه می‌رسیم که واریانس واقعی آمارهٔ EWMA بیش از آن چیزی است که تا به حال استفاده می‌شده است. به عبارت دیگر، وقتی که از رابطهٔ (۴) برای محاسبهٔ حدود کنترل نمودار کنترل EWMA استفاده می‌شود، مقداری از واریانس آمارهٔ EWMA نادیده گرفته می‌شود که این امر تنگ‌تر شدن حدود کنترل محاسبه شده از حدود کنترل واقعی را در پی دارد. برای روشن‌تر شدن موضوع، تعریف می‌کنیم:

$$Var_{old}(S_t) = s_p^2 \left(\frac{l}{2-l}\right)\left[1-(1-l)^{2t}\right] \qquad (۱۳)$$

$$\begin{aligned} Var_{new}(S_t) &= s_p^2 \left(\frac{l}{2-l}\right)\left[1-(1-l)^{2t}\right] \\ &\quad + \frac{1}{n} s_p^2 (1-l)^t \left[2-(1-l)^t\right] \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

واضح است که

$$\begin{aligned} Var_{new}(S_t) &= Var_{old}(S_t) \\ &\quad + \frac{1}{n} s_p^2 (1-l)^t \left[2-(1-l)^t\right] \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

جملهٔ $\frac{1}{n} s_p^2 (1-l)^t \left[2-(1-l)^t\right]$ همان مقدار واریانسی است که تا کنون نادیده گرفته می‌شده است. در بخش‌های بعدی نشان خواهیم داد که با افزایش n و l ، این جمله به صفر می‌گراید.

حال با در دست داشتن واریانس دقیق آمارهٔ EWMA، حدود کنترل را می‌توان با استفاده از رابطهٔ (۱۶) محاسبه کرد.

$$\begin{aligned} UCL &= S_0 + 3\sqrt{Var_{new}(S_t)} \\ CL &= S_0 \\ LCL &= S_0 - 3\sqrt{Var_{new}(S_t)} \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

سؤالی که می‌توان مطرح کرد این است که حدود کنترل جدید تا چه اندازه با حدود کنترل قدیمی که از رابطهٔ (۱۷) به دست می‌آیند متفاوت است؟ در بخش بعدی به این سؤال پاسخ می‌دهیم.

$$\begin{aligned} UCL &= S_0 + 3\sqrt{Var_{old}(S_t)} \\ CL &= S_0 \\ LCL &= S_0 - 3\sqrt{Var_{old}(S_t)} \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

۴. مقایسهٔ حدود کنترل جدید و قدیم

خط مرکز نمودار کنترل در هر دو روش جدید و قدیم برابر $S_0 = \overline{X}$ است. ولی حدود کنترل بالا و پایین در دو روش جدید و قدیم به طور متفاوتی محاسبه می‌شوند. برای سنجش میزان تفاوت این حدود، وقتی که با دو روش متفاوت محاسبه می‌شوند، از نسبت $\frac{\sqrt{Var_{new}(S_t)}}{\sqrt{Var_{old}(S_t)}}$ استفاده کرده‌ایم. با توجه به رابطهٔ (۱۵) واضح است که این نسبت همواره بزرگتر از یک است و هر چقدر نزدیک یک باشد بدین معنی است که حدود کنترل جدید و قدیم تفاوت چندانی با هم ندارند و برای محاسبهٔ حدود کنترل می‌توان از هر یک از روابط (۱۶) یا (۱۷) استفاده کرد. ولی هر چقدر این نسبت از یک دور شود، بدین معنی است که حدود کنترل جدید و قدیم تفاوت معنی داری با هم دارند و برای محاسبهٔ حدود کنترل حتماً باید از رابطهٔ (۱۶) استفاده کرد. نسبت انحراف معیار جدید به انحراف معیار قدیمی را می‌توان به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$\begin{aligned} R &:= \frac{\sqrt{Var_{new}(S_t)}}{\sqrt{Var_{old}(S_t)}} \\ &= \sqrt{\frac{Var_{old}(S_t) + \frac{1}{n} s_p^2 (1-l)^t \left[2-(1-l)^t\right]}{Var_{old}(S_t)}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{\frac{1}{n} s_p^2 (1-l)^t \left[2-(1-l)^t\right]}{s_p^2 \left(\frac{l}{2-l}\right)\left[1-(1-l)^{2t}\right]}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{(2-l)(1-l)^t \left[2-(1-l)^t\right]}{n\, l \left[1-(1-l)^{2t}\right]}} \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که میزان تفاوت حدود کنترل جدید و قدیم بستگی به تعداد نمونه (n)، پارامتر هموار سازی (l) و شمارهٔ

نمونه (t) دارد. فرض می‌کنیم حدود کنترل جدید و قدیم تفاوتی با هم ندارند و بر هم منطبق هستند هرگاه R<۱/۰۱. سؤال اساسی این است که به ازای n و l ی معلوم، از نمونهٔ چندم به بعد حدود کنترل جدید و قدیم بر هم منطبق می‌شوند؟ به عبارت دیگر، به ازای n و l ی معلوم در صدد یافتن کوچکترین t ای هستیم که به ازای آن R<۱/۰۱. برای این منظور از یک برنامهٔ کامپیوتری که در محیط Script نرم‌افزار S-PLUS نوشته شده، استفاده کرده‌ایم (این برنامه در ضمیمه ارائه شده است).

نتیجهٔ محاسبات را در جدول ۱ خلاصه کرده‌ایم. در این جدول به ازای n و l ی معلوم، کوچکترین مقدار t ای که به ازای آن R<۱/۰۱ باشد، درج شده است. مثلاً به ازای n=۱۰۰ و l =۰/۱، از نمونهٔ بیست و هشتم به بعد؛ حدود کنترل جدید و قدیم بر هم منطبق می‌شوند. هر چه t مقدار بزرگتری داشته باشد بدین معنی است که حدود کنترل جدید و قدیم دیرتر بر هم منطبق می‌شوند، در نتیجه باید از رابطهٔ (۱۶) برای محاسبهٔ حدود کنترل استفاده کرد. ولی هر چه t مقدار کوچکتری داشته باشد بدین معنی است که حدود کنترل جدید و قدیم زودتر بر هم منطبق می‌شوند، در نتیجه استفاده از هر یک از روابط (۱۶) یا (۱۷) برای محاسبهٔ حدود کنترل، مجاز است. با بررسی جدول ۱ می‌توان به نتایج زیر دست یافت:

۱- به ازای تعداد نمونهٔ ثابت، هر چه l افزایش یابد حدود کنترل زودتر بر هم منطبق می‌شوند.

۲- به ازای l ی ثابت، هر چه تعداد نمونه افزایش یابد حدود کنترل زودتر بر هم منطبق می‌شوند.

۳- اگر تعداد نمونه و l هر دو با هم افزایش یابند، حدود کنترل بر هم منطبق‌تر می‌شوند.

توجه داشته باشید که هرگاه تعداد نمونه افزایش یابد، حدود کنترل جدید و قدیم به مقدار حدی $S_0 \pm 3s_p\sqrt{\frac{l}{2-l}}$ میل خواهند کرد.

جدول ۱. کوچکترین مقادیر t که به ازای آن R<۱/۰۱

l	تعداد نمونه (n)									
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
0.05	130	117	109	103	99	95	92	90	87	85
0.1	57	50	46	44	41	40	38	37	36	35
0.15	34	30	28	26	24	23	22	21	21	20
0.2	24	21	19	17	16	16	15	14	14	13
0.25	18	15	14	13	12	11	11	10	10	10
0.3	14	12	11	10	9	9	8	8	7	7
0.35	11	9	8	8	7	7	6	6	6	6
0.4	9	8	7	6	6	5	5	5	5	4
0.45	8	6	6	5	5	5	4	4	4	4
0.5	6	5	5	4	4	4	4	3	3	3

جدول ۱ (ادامه)

l	تعداد نمونه (n)									
	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
0.05	83	82	80	79	77	76	75	74	73	72
0.1	34	33	32	32	31	30	30	29	29	28
0.15	19	19	18	18	18	17	17	16	16	16
0.2	13	12	12	12	11	11	11	11	10	10
0.25	9	9	9	8	8	8	8	7	7	7
0.3	7	7	6	6	6	6	6	5	5	5
0.35	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4
0.4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3
0.45	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2
0.5	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2

جدول ۱ (ادامه)

l	تعداد نمونه (n)									
	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150
0.05	71	70	69	68	67	66	66	65	64	64
0.1	28	27	27	26	26	26	25	25	25	24
0.15	15	15	15	15	14	14	14	14	13	13
0.2	10	10	9	9	9	9	9	9	8	8
0.25	7	7	7	6	6	6	6	6	6	6
0.3	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4
0.35	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3
0.4	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2
0.45	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0.5	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1

جدول ۱ (ادامه)

l	تعداد نمونه (n)									
	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200
0.05	63	62	62	61	61	60	59	59	58	58
0.1	24	24	23	23	23	22	22	22	22	21
0.15	13	13	13	12	12	12	12	12	11	11
0.2	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7
0.25	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
0.3	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3
0.35	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2
0.4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0.45	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
0.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

تذکر: در برخی از ستون‌های جدول ۱، بعضی از مقادیر t بزرگتر از تعداد نمونه است. این امر از نظر ریاضی امکان پذیر است ولی در عمل غیر ممکن است. مثلاً به ازای $l = 0.2$ و n=۵ مقدار t برابر است با ۲۴. یعنی اگر پنج نمونه در اختیار داشته باشیم و l برابر ۰/۲ باشد، از نمونهٔ بیست و چهارم به بعد حدود کنترل جدید و قدیم بر هم منطبق خواهند شد. این امر غیر ممکن است زیرا ما فقط پنج نمونه در اختیار داریم، پس چگونه ممکن است از نمونهٔ بیست و چهارم به بعد حدود کنترل جدید و قدیم بر هم منطبق شوند؟ در چنین مواقعی، بیشتر بودن مقدار t از n، بدین معنی است که حدود کنترل جدید و قدیم هیچ‌گاه بر هم منطبق نمی‌شوند.

۵. نتیجه‌گیری

همان طور که در بخش قبل اشاره شد، هرگاه حداقل یکی از مقادیر n یا l افزایش یابد؛ حدود کنترل جدید و قدیم زودتر بر هم منطبق می‌شوند. بنابراین پیشنهاد می‌شود که به ازای n و l ی کوچک، مثلاً n کوچکتر از ۳۰ و l کمتر از ۰/۱، از حدود کنترل جدید برای محاسبهٔ حدود کنترل نمودار EWMA استفاده شود. ولی به ازای n و l ی بزرگ، استفاده از روابط (۱۶) و (۱۷) برای محاسبهٔ حدود کنترل، تفاوت معنی داری را نشان نمی‌دهند و از هر کدامیک از آن‌ها می‌توان استفاده کرد.

مراجع

[1] Montgomery D.C., *Introduction to Statistical Quality Control*, 3rd ed., John Wiley & Sons, 1997.

[2] Roberts S.W., "*Control Chart Tests Based on Geometric Moving Average*", Technometrics, Vol. 1, 1959, pp. 239-251.

[3] Hunter J.S., "*The Exponentially Weighted Moving Average*", Journal of Quality Technology, Vol. 18, 1986, pp. 203-209.

[4] Crowder S.V., "*Design of Exponentially Weighted Moving Average Scheme*", Journal of Quality Technology, Vol. 21, 1989, pp. 155-162.

[5] Lucas J.M., and Saccucci M.S., "*Exponentially Weighted Moving Average Control Scheme: Properties and Enhancements (with Discussion)*", Technometrics, Vol. 32, 1990, pp. 1-29.

[6] Rencher A.C., *Linear Models in Statistics*, John Wiley & Sons, 2000.