نشریه بین المللی علوم مهندسی دانشگاه علم و صنعت ایران، شماره ۱، جلد ۱۸، تابستان ۱۳۸۶، صفحه ۱-۱۰
ویژه‌نامه مهندسی عمران

روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته برای حل معادلات دیفرانسیل جابجائی - پخش

حامد ارزانی، محمد هادی افشار و محمد نجمائی

چکیده: انواع مختلفی از روشهای بدون شبکه در سالهای اخیر برای حل معادلات دیفرانسیل معرفی شده است که هرکدام دارای مزایا و معایب مخصوص به خود می‌باشند. گسسته‌سازی مسئله در بسیاری از روش-های بدون شبکه به معادلات انتگرالی منجر می‌شود که حل آنها نیازمند انتگرالگیری عددی و معرفی نقاط گوس و وزنهای مربوطه همراه با شبکه‌بندی است. در این مقاله به روشهای مختلف حداقل مربعات پرداخته و روش حداقل مربعات گسسته در حل معادلات دیفرانسیل بکار گرفته می‌شود. ازحداقل مربعات گسسته در مرحله گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل به منظور دستیابی به معادلات ماتریسی و همچنین از حداقل مربعات وزنی داده‌ها با توابع وزنی اسپلاین مرتبه سه برای دستیابی به مقادیر توابع شکل استفاده شده است. اگرچه فرمولبندی حداقل مربعات گسسته در نهایت منجر به حجم عملیات بیشتری نسبت به سایر روشهای می‌شود اما مهمترین مزایای این روش را می‌توان در حذف مراحل انتگرال‌گیری از روال محاسبه ماتریسهای ضرایب و همچنین پشتوانه بدون شبکه بودن آن در مفهوم واقعی دانست. صحت‌یابی فرمولبندی با حل مثال‌های یک بعدی از معادله برگر و معادله دیفرانسیل جابجائی پخش خطی و غیرخطی درحالت دائمی و زمان وابسته بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: روش بدون شبکه، حداقل مربعات گسسته، معادله برگر، معادله جابجائی پخش

۱. مقدمه

روشهای بدون‌شبکه[1] طی ده سال اخیر به مجموعه روش‌های عددی اضافه شده و بستر مناسب و وسیعی در زمینه‌های علمی، تحقیقاتی و مهندسی گردیده است. استفاده از روش‌های بدون شبکه هنوز به گستردگی روشهای اجزاء محدود درمسائل مهندسی نمی‌باشد ولی چه بسا فعلا این روش‌ها شرایطی مشابه با زمانی که روش اجزاء محدود شروع به گسترش نمود را سپری می‌نمایند.

شباهت زیادی که بین روش تفاضل محدود و روشهای بدون شبکه به واسطه گسسته‌سازی حوزه فیزیکی وجود دارد فصل جدیدی از مطالعات را بروی محققین گشوده است به گونه‌ای که به نظر می‌رسد بسیاری از مشکلاتی که در روش تفاضل محدود در گذشته وجود داشته و عامل رویکرد به اجزاء محدود شده است را برطرف می‌نماید.

در تمامی روش‌های بدون‌شبکه گسسته‌سازی حوزه[1] فیزیکی مسئله با تعداد مناسبی از نقاط که هریک شامل زیرحوزه‌های[2] متداخل با زیرحوزه‌های نقطه یا نقاط همسایه است انجام می‌شود.

مباحث نقاط ارتباطی[3] اجزاء محدود در روشهای بدون شبکه از طریق تعداد نقاط مشترک موجود در ناحیه مشترک هریک از زیرحوزه‌ها بیان می‌شود. در واقع در این روش دو نقطه در صورتی با یکدیگر ارتباط دارند که در ناحیه مشترک حوزه تاثیرشان تعداد نقاط مشخصی که تامین کننده شرط معکوس‌پذیری ماتریس‌ها است، وجود داشته باشد. کاوه وهمکاران [۱] گراف‌های مناسبی را به منظور رتبه‌بندی نقاط[4] و تامین ماتریس‌های تو پر در روش‌های

مقاله در تاریخ ۱۳۸۳/۸/۱۰دریافت شده و در تاریخ ۱۳۸۴/۹/۱ به تصویب نهایی رسیده است.

دکتر حامد ارزانی، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید رجائی، Arzani@iust.ac.ir
دکتر محمد هادی افشار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، MHAfshar@iust.ac.ir
دکتر محمد نجمائی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم وصنعت ایران ، Najmaei@iust.ac.ir

1. Meshless Methods

1. Domain
2. Subdomain
3. Connectivity
4. Nodal Ordering

بدون شبکه ارائه نموده‌اند. لازم بذکر آنکه حوزه تاثیر یک نقطه دراجزاء محدود مجموع المان‌هائی است که این نقطه درآنها وجود دارد. نقطه مشترک در روش‌های بدون شبکه توابع وزنی یا به عبارتی توابع پنجره‌ای می‌باشند و خصوصیت اصلی آن دارا بودن مقدار غیرصفر در داخل زیر حوزه و صفر در خارج از زیر حوزه می‌باشد. زیرحوزه‌ها عموماً به صورت دایره یا کره و مستطیل درنظر گرفته می‌شوند. همچنین بعضی از نقاط می‌توانند به صورت مشترک در تعدادی از حوزه‌های اثر وجود داشته باشند.

انواع مختلفی از روش‌های بدون شبکه توسط محققین ارائه شده است. در یک دسته‌بندی کلی روش‌های مختلف بدون شبکه با انتخاب گزینه‌های مختلف از روش دست یابی به معادلات گسسته‌سازی شده یا روش تقریب و انتخاب توابع وزنی شکل گرفته‌اند.

روش حداقل مربعات به عنوان یکی از انواع تقریب‌ها در گذشته به‌طور گسترده‌ای برای تولید داده‌های آماری بکار گرفته شده است. این روش اکنون به‌عنوان یک رقیب اساسی به لحاظ دقت و سادگی در مقابل سایر روش‌ها مطرح است.

احتمالا حداقل مربعات اولین بار توسط آقای K. Friedrich Gauss در سال ۱۷۹۴ برای حل معادله دیفرانسیل بکار گرفته شده است. بکارگیری روش حداقل مربعات برای حل معادلات دیفرانسیلی با روش‌های عددی متکی به شبکه همانند روش اجزاء محدود، دارای سابقه نسبتاً طولانی بوده ودر مراجع[۲و۳] زیادی به آن اشاره شده است. شاید کاملترین مقاله که به بررسی انواع روش‌های حداقل مربعات پرداخته مربوط به آقای Eason [۴] می‌باشد. آقای Taylor و Zienkievicz و همکاران [۵] تقریب حداقل مربعات متحرک را برای حل معادله دیفرانسیل پیشنهاد نمودند که اساس بسیاری از فعالیت‌های بعدی آنها گردید. Bristeau و همکاران[۶] مسائل غیرخطی در دینامیک سیالات را با فرمولبندی حداقل مربعات و الگوریتم شیب‌های مزدوج بررسی نمودند. آنها فرمولبندی مذکور را برای جریان پتانسیل غیردائمی تراکم‌پذیر، سیالات غیرلزج وهمچنین معادلات ناویراستوکس با سیالات لزج غیرقابل تراکم بکار گرفتند. روش حداقل مربعات اجزاء محدود برای حل مسائل خطی پخش (مسائل بیضوی) و همچنین برای حل معادله ناویر استوکس برای سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک در حالت دائمی توسط آقای Carey و همکاران[۷] ارائه گردید. آقای افشار[۲] حداقل مربعات پیوسته را برای تحلیل جریانات تراکم‌پذیر و غیر قابل تراکم درحالت پایدار بکارگرفت. کلیه سوابق تا به حال ذکر شده مربوط به بکارگیری حداقل مربعات در روش‌های متکی به شبکه بوده است.

اگرچه شروع بکارگیری روش‌های بدون شبکه همانند شروع بکارگیری اجزاء محدود از مسائل سازه‌ای بوده است ولی در فاصله زمانی اندک ایده استفاده از روش‌های بدون شبکه و خصوصا روش حداقل مربعات برای حل معادلات دیفرانسیل و متعاقبا مسائل سیالات قوت گرفت. Nayroles و همکاران[۸] اولین کسانی بودند که تقریب حداقل مربعات متحرک را در روش گالرکین استاندارد بکار گرفتند و آنرا روش جزء پخش نامیدند. Belytschko و همکاران [۹] با انجام اصلاحاتی بر روی روش جزء پخش[1] و تکمیل آن پایه‌گذار روش گالرکین مستقل از جزء[2] شدند. در واقع این روش را باید شروع بکارگیری حداقل مربعات در روش‌های بدون‌شبکه تلقی نمود. شاید بهترین مرجع معرفی انواع روش‌های بدون‌شبکه و همچنین قابلیت بعضی از روش‌ها برای ترکیب شدن با اجزاء محدود برای اعمال شرایط مرزی در حل معادله دیفرانسیل را باید در مقاله آقای Belytschko و همکاران [۱۰] یافت. آقای Onate و همکارانشان[۱۱و۱۲] برای حل معادله جابجائی- پخش و مسائل جریان سیالات از حداقل مربعات وزنی برای درونیابی در روش هم مکانی نقطه‌ای استفاده نمودند.

آقای Bonet و همکارش[۱۳] در ادامه فعالیت‌های سال ۱۹۹۷ خودشان و آقای دکتر حسنی [۱۴] روش موسوم به هیدرودینامیک ذرات هموار اصلاح شده یا CSPH را به منظور اصلاح دقت و سازگاری روش هیدرودینامیک ذرات هموار و با اعمال تصحیح بر روی توابع کرنل ارائه نمودند. در مقاله ایشان علاوه بر تصحیح توابع کرنل با تصحیح انتگرالگیری و استفاده از انتگرال نقطه‌ای، توانمندی روش با ارائه نتایج حل معادله پواسون در روش SPH و CSPH مقایسه گردید. آقای Idelsohn و همکاران[۱۵] با استفاده از روش ذرات و با فرمولبندی لاگرانژ معادله اولر را برای سیال غیرویسکوز و غیرلزج در حالت جدائی ناگهانی ستون آب حل نمودند. بررسی جریان غیرقابل تراکم به کمک ذرات متحرک توسط Koshizuka و همکارش[۱۶] ارائه گردید. خانم لیلا فرهادی و آشتیانی[۱۷] با استفاده از روش ذرات مدلی برای پیش‌بینی جریان سطح آزاد بعد از شکست سد ارائه نمودند.

آقای Park[۱۸] در مقاله خود از روش حداقل مربعات مرتبه اول بجای روش گالرکین در مرحله گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل استفاده نمود. کار ایشان مشابه فعالیت‌های آقای Jiang و همکاران ایشان و از جمله آقای Carey [۱۹] در مدل‌های اجزاء محدود است. آقای Chen و همکارش [۲۰] برای حل معادله غیرخطی برگر با ضرائب ویسکوزیته متفاوت از روش هیدرودینامیک ذرات هموار در یک و دو بعد استفاده نمودند.

در روش پیشنهادی ایشان اعمال مستقیم شرایط مرزی که یکی از مشکلات روش معمول هیدرودینامیک ذرات هموار است، امکان‌پذیر می‌باشد. آقای Zerroukat و همکاران [۲۱] با استفاده از تقریب تابع پایه دایره‌ای[5] و با توزیع نقاط تصادفی در صفحه دو بعدی، معادله جابجائی- پخش خطی را در حالت گذرا و به شکل صریح و ضمنی حل کرد. آقای Boztosun و همکاران [۲۲] ضمن بررسی دقت و

1. Diffuse Element
2. Element Free Galerkin (EFG)
3. Radial Basis Function

پایداری روش تابع پایه دایره‌ای، آنرا برای حل معادلات جابجائی-پخش بکار گرفتند. در این مقاله ایشان با بررسی مثال‌هائی به دقت و همچنین کاهش زمان محاسبات در این روش پرداختند. آقای Chongjiang [۲۳] جریان دوبعدی رودخانه را با فرض معادلات آبهای کم‌عمق با روش گالرکین مستقل از جزء مدلسازی نمود.
آقای Huerta و همکاران[۲۴] معادله جابجائی- پخش گذرا را در روش گالرکین مستقل از جزء با استفاده از روش‌های گام‌برداری زمانی مرتبه بالا ارائه نمودند و با بررسی نرخ همگرائی و همچنین سازگاری، روش پیشنهادی را روش برتری نسبت بروش گالرکین استاندارد با دقت گام‌برداری زمانی مرتبه دوم همانند روش Lax-Wendroff و Crank-Nicolson که در مسائل جابجائی تولید نوساناتی می‌کند، معرفی نمودند.
تقریبا کلیه روش‌های بدون شبکه نوع گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل و همچنین محاسبه ماتریس ضرائب در آنها به شکل انتگرالی می‌باشد و عموماً برای حل این معادلات از انتگرالگیری عددی استفاده می‌شود که بکارگیری انتگرالگیری عددی مستلزم تعریف شبکه نقاط گوس با وزن‌های مربوطه می‌باشد. برای حل معادلات انتگرال در تحقیقات اخیر از نوع جدید انتگرالگیری بنام انتگرال نقطه‌ای استفاده می شود[۱۴].
رویکرد دوم که در این مقاله ارائه شده است استفاده از روشی نوین در حداقل مربعات می باشد، که به مراحل ساده‌تری از گسسته‌سازی حوزه فیزیکی و معادله دیفرانسیل تاکید دارد. ضمن اینکه روش پیشنهادی با حذف مراحل انتگرالگیری، مفهوم واقعی‌تری از روش بدون شبکه را داراست.

۲. فرمولبندی روش حداقل مربعات گسسته

روش‌های معمول گالرکین، حداقل مربعات، هم‌مکانی و روش‌های زیرحوزه‌ای همگی به خانواده روش‌های باقیمانده وزنی متعلق بوده و اختلاف آنها تنها منتج از معیارهای مختلف وزن‌دهی به معادلات باقیمانده‌ها است.
در کلیه این روش‌ها باقیمانده وزنی غالبا بر روی حوزه انتگرال‌گیری انجام شده و سپس برابر صفر قرار داده می‌شود.
انتگرالگیری بر روی حوزه خود منجر به تولید معادلات انتگرالی می‌شود که برای حل این معادلات از انتگرالگیری عددی استفاده می‌شود.
در این بخش بنا به اهمیت کاربرد روش حداقل مربعات گسسته به نحوه دست‌یابی به مقادیر توابع شکل با استفاده از حداقل مربعات متحرک و همچنین گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل باز هم با استفاده از روش حداقل مربعات می‌پردازیم.
وزن باقیمانده‌ها در این روش شامل مشتق باقیمانده‌ها می‌باشد. از آنجائیکه حل معادلات دیفرانسیل هم در حالت دائمی و هم در حالت غیردائمی (گذرا) مطرح است، گسسته‌سازی زمانی بطور مستقل ارائه می‌شود.

۱-۲. گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل وشرایط مرزی به روش حداقل مربعات گسسته

مسئله مقدار مرزی با معادلات دیفرانسیل زیر را درنظر بگیرید.

$$L(u) = f \qquad \text{در حوزه } \Omega \qquad (۱)$$

$$B(u) = g \qquad \text{در مرز } \Gamma \qquad (۲)$$

که در آن L و B عملگرهای دیفرانسیلی، f مقدارسمت راست معادله و g مقدار سمت راست عملگر دیفرانسیلی در مرزهاست. باقیمانده‌های داخل حوزه و مرز درنقاط داخلی و مرزی بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$R_\Omega = L(\hat{u}) - f \qquad \text{روی حوزه } \Omega \qquad (۳)$$
$$R_\Gamma = B(\hat{u}) - g \qquad \text{روی مرز } \Gamma$$

فلسفه بکارگیری حداقل مربعات یافتن جواب تقریبی به گونه‌ای که نتایج دارای حداقل خطای باقیمانده با قرارگیری درمعادلات ۱ و۲ باشند. برای دست‌یابی به چنین جوابی فرض می‌شود حل تقریبی معادله $(\hat{u})$ شامل n پارامتر است که مقادیر این پارامترها با حداقل سازی خطای باقیمانده‌ها بدست می‌آیند.

$$u(\underline{x}) \sim \hat{u}(\underline{a}, \underline{x}) \qquad (۴)$$

$\underline{a}$ بردار پارامترهای مجهول و $\underline{x}$ متغیرهای مستقل حوزه می‌باشند.
میزان خطا در حوزه و مرزها با جایگزینی $\hat{u}$ در معادلات ۱ و۲ بصورت زیر بدست می‌آید.

$$R_\Omega(\underline{a}, \underline{x}) = L(\hat{u}) - f \qquad \text{در حوزه } \Omega \qquad (۵)$$

$$R_\Gamma(\underline{a}, \underline{x}) = B(\hat{u}) - g \qquad \text{در مرز } \Gamma \qquad (۶)$$

R_Γ و R_Ω باقیمانده‌های حوزه‌ای و مرزی نامیده می‌شوند. با حداقل‌سازی جمع وزنی مربعات باقیمانده‌ها بر روی حوزه و مرزها بردار پارامتری مجهول بدست می‌آید.
براساس نحوه تشکیل مربعات باقیمانده‌ها روش حداقل مربعات به دو گروه اساسی دسته بندی می‌شود. درصورتیکه که از انتگرال مربعات باقیمانده در حوزه استفاده شود، روش پیوسته نامیده می‌شود .

$$\mathrm{I_C}(\underline{a}) = \int_\Omega [R_\Omega(\underline{a}, \underline{x})]^2 \mathrm{d}\Omega + \mathrm{w}^2 \int_\Gamma [R_\Gamma(\underline{a}, \underline{x})]^2 \mathrm{d}\Gamma \qquad (۷)$$

و درصورتیکه مربعات باقیمانده در تعدادی از نقاط محدود x_i حوزه بررسی و جمع شود، روش گسسته و یا حداقل مربعات نقطه‌ای نامیده می‌شود.

$$\mathrm{I_d}(\underline{a}) = \sum_{i=1}^{k}[R_\Omega(\underline{a}, x_i)]^2 + \mathrm{w}^2\sum_{i=1}^{k}[R_\Gamma(\underline{a}, x_i)]^2 \tag{۸}$$

فاکتور w^2 درمعادلات ۷ و۸ اهمیت اعمال باقیمانده‌های مرزی را در مقایسه با باقیمانده‌های حوزه نشان می‌دهد.
مقادیر بزرگتر این پارامتر منجر به اعمال دقیق‌تر شرایط مرزی می‌گردد، که در واقع معادل ضریب مربوط به اعمال شرایط مرزی در روش معمول تابع تاوانی است.
درصورتیکه مربع باقیمانده‌ها برروی تعداد محدودی از نقاط حوزه مطابق فرمول ۷ محاسبه گردد و با جایگزینی باقیمانده‌ها درمعادلات اساسی روش حداقل مربعات گسسته و همچنین مقدار w^2 برابر یک داریم.

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{ne}([L(\hat{u}) - f]_i)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_b}([B(\hat{u}) - g]_i)^2 \tag{۹}$$

با جایگزینی مقادیر گرهی بوسیله پارامترهای گرهی وزن دهی شده $(\hat{u} = Nu)$ و مشتق‌گیری از تابع I نسبت به پارامترهای گرهی دستگاه معادلات جبری حاصل می‌شود.
به عنوان مثال در حالت شرایط مرزی دیریچله ماتریس‌های ضرائب نمونه اینگونه هستند.

$$KU = F$$

$$K_{lm} = \sum_{i=1}^{n_e}[L(N_l)_i]^T[L(N_m)_i] + \sum_{i=1}^{n_b}[N_l]^T{}_i[N_m]_i \qquad \mathrm{l,m} = 1,\ldots,\mathrm{n} \tag{۱۰}$$

$$F_l = -\sum_{i=1}^{n_e}[L(N_l)]_i^T\, f_i + \sum_{i=1}^{n_b}[N_l]^T{}_i\, g \qquad \mathrm{l,m} = 1,\ldots,\mathrm{n} \tag{۱۱}$$

۲-۲. حداقل مربعات متحرک وزنی برای محاسبه مقادیر توابع شکل

این روش حدود سال ۱۹۶۰ میلادی توسط شپارد به منظور درونیابی هموار سطحی برای نقاط با مقادیر متغیر بکار رفته است و اساس کاربرد آن دستیابی به تقریب‌های کاملا پیوسته می‌باشد.
تقریب حداقل مربعات متحرک[1] برای کلیه نقاطی که تعیین مقدار مجهول در آن با درونیابی مدنظر است بکار گرفته می‌شود.
البته بکارگیری توابع وزنی علاوه بر تعیین مقادیر مجهول، توانائی هموارسازی مشتقات را نیز داراست و نکته قابل توجه آنکه چنین مشتقاتی صرفا به تابع چند جمله‌ای موضعی مرتبط می‌باشند. تابع تقریب را بصورت زیر فرض کنید.

$$u^h(x) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{P_i^T}(x)a_i(x) \equiv P^T(x)a(x) \tag{۱۲}$$

$a_i(x)$بردار ضرائب تابع چند جمله‌ای که مقادیر آن با بکارگیری الگوریتم مناسب تعیین می‌شوند. و $P^T(x)$ بردار متغیرهای چندجمله‌ای که در حالت خطی یک و دو بعدی به صورت زیر می‌باشند.

$$\mathrm{P} = (1, x), \quad \mathrm{P} = (1, x, y) \tag{۱۳}$$

همچنین درحالت غیر خطی (مرتبه دوم) یک و دو بعدی به‌صورت زیر است.

$$\mathrm{P} = \left(1, x, x^2\right), \;\; \mathrm{P} = \left(1, x, y, x^2, xy, y^2\right) \tag{۱۴}$$

هدف در روش حداقل مربعات متحرک، حداقل سازی تابع زیر است.

$$J(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}W_x(x_k - x)\left[u_k - P^T(x)a(x)\right]^2 \tag{۱۵}$$

در این حالت تابع وزنی برای هر نقطه دلخواه در حوزه مسئله به صورت متحرک یا انتقالی تعیین می‌شود و لذا توانائی درونیابی پیوسته، درحوزه مسئله مورد نظر را داراست. توابع وزنی و خصوصیات آن در بند بعدی معرفی می‌شوند.
مشکل اصلی در این حالت تولید تابع وزنی متحرکی است که بتواند تغییر در اندازه را به‌طور پیوسته برای هر نقطه‌ای مانند x_k وبا تعدادی از نقاط مشخص در هر مرتبه از محاسبه هماهنگ نماید. بدین منظور می توان تصور نمود تابع وزنی دارای خاصیت تقارن به‌صورت زیر می‌باشد.

$$W_x(x_k - x) = W_x(x - x_k) \tag{۱۶}$$

---

1. Moving Least Square

با بکارگیری تابع وزنی متناظر با هر نقطه مانند x_k داریم.

$$W_x(x_k - x) = W_k(x - x_k) \qquad (۱۷)$$

بنابراین هدفی که باید کمینه شود به‌صورت زیر است.

$$J(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} W_k(x - x_k)\left[u_k - P^T(x)a(x)\right]^2 \qquad (۱۸)$$

n تعداد نقاط موجود در همسایگی x به‌گونه‌ای که اندازه تابع وزنی در آن نقاط مخالف صفر است.

$$\mathrm{w} = (x_k - x) \neq 0$$

u_k پارامتر گرهی u در $x = x_k$ است. در این حالت تابع وزنی درنقطه x_k استوار می‌شود و درنقاط دیگر ارزیابی می‌شود.
با مشتق‌گیری از تابع هدف $J(x)$ نسبت به $a(x)$ به منظور کمینه‌سازی آن و با مرتب سازی داریم.

$$a(x) = A^{-1}(x)\sum_{j=1}^{n} B_j(x)u_j \qquad (۱۹)$$

$$a(x) = A^{-1}(x)\,\mathrm{B}(x)\,u_j \qquad (۲۰)$$

با تعریف ماتریس‌های A و B به‌صورت زیر داریم.

$$A(x) = \sum W_k(x - x_k)P(x_k)P^T(x_k) \qquad (۲۱)$$

$$B(x) = W_j(x - x_j)P(x_j) \qquad (۲۲)$$

$$Pa = u = \sum_{k=1}^{n} f_k u_k \qquad (۲۳)$$

$$P\left(A^{-1}B\,u_k\right) = f_k u_k \qquad (۲۴)$$

حال می‌توان تابع شکل را به‌صورت زیر نشان داد.

$$f_k(x) = PA^{-1}B_k \qquad (۲۵)$$

همچنین مشتقات توابع شکل و ماتریس A و B براحتی با معلوم بودن خود توابع بدست می‌آیند.

۱-۲-۲. توابع وزنی

توابع وزنی درحالت کلی باید دارای مشخصه‌های زیر باشند[۱۰].
الف) پیوسته و مثبت و قابل تفکیک درحوزه‌های تاثیر مسئله باشند و دارای مقدار بزرگتر از صفر در داخل حوزه و مقدار صفر در خارج از حوزه باشند. همچنین سطح زیر منحنی تابع وزنی در یک زیرحوزه معادل واحد باشد. (خاصیت نرمال)
ب) اندازه تابع وزنی برای یک نقطه مقدار بزرگتری نسبت به مقدار آن در سایر نقاط آن زیرحوزه داشته باشد.
ج) تعداد نقاط موجود در یک حوزه تاثیر (زیرحوزه) که مقادیر تابع وزنی در آن محاسبه می‌شود باید بزرگتر یا مساوی درجه تابع پایه (تعداد جملات تابع چندجمله‌ای) باشند.
با بکارگیری حوزه اثر دایره‌ای و درصورتیکه پارامتر s معرف فاصله دو نقطه از یکدیگر، r معرف شعاع تاثیر زیرحوزه، $w(r)$ تابع وزنی، $s_{\mathbf{max}}$ متناظر با اندازه حوزه و $r = s/s_{\mathbf{max}}$ در فرمولبندی کلی باشند. سه تابع وزنی مطرح در روش‌های بدون‌شبکه شامل توابع نمائی، اسپلاین درجه ۳ و اسپلاین درجه ۴ بصورت زیر می‌باشند.

تابع وزنی نمائی

$$w(r) = \begin{cases} e^{-(r/a)^2} & \text{اگر} \quad r \le 1 \\ 0 & \text{اگر} \quad r > 1 \end{cases} \qquad (۲۶)$$

تابع وزنی اسپلاین مرتبه سه[۱]

$$w(r) = \begin{cases} \dfrac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \text{if } r \le \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \dfrac{4}{3}r^3 & \text{if } \dfrac{1}{2} < r \le 1 \\ 0 & \text{if } r \ge 1 \end{cases} \qquad (۲۷)$$

تابع وزنی اسپلاین مرتبه چهار

$$w(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4 & \text{if } r \le 1 \\ 0 & \text{if } r > 1 \end{cases} \qquad (۲۸)$$

۳. گسسته‌سازی زمانی

تمامی روش‌های عددی برای گسسته‌سازی زمانی از روش تفاضل‌محدود پسرو استفاده می‌نمایند. معادله دیفرانسیل زمان وابسته زیر را در حالت کلی تحت شرایط آغازین و مرزی مختلف درنظر بگیرید که A عملگر دیفرانسیلی می‌باشد.

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{A(u)} = 0 \qquad (۲۹)$$

برای گسسته‌سازی زمانی از بسط تیلور در زمان $\mathrm{t} + q\,\Delta\mathrm{t}$ به صورت پسرو[۲] استفاده می‌شود که در آن $0 \le q \le 1$ است.

$$\frac{\mathrm{u}^{\mathrm{n}+1} - \mathrm{u}^{\mathrm{n}}}{\Delta \mathrm{t}} + \theta \mathrm{A(u)}^{\mathrm{n}+1} + (1-\theta)\mathrm{A(u)}^{\mathrm{n}} + \mathrm{O}(\Delta \mathrm{t})^{a} \qquad (۳۰)$$

در صورتیکه $\theta = 1/2$ باشد آنگاه $a = 2$ و معرف روش کرانک نیکلسون با خطای مرتبه دوم زمانی است و اگر $q \neq 1/2$ باشد آنگاه $a = 1$ و خطای زمانی از مرتبه اول می‌باشد.

1. Cubic Spline
2. Backward Difference

در اینجا نیز می‌توان اندازه باقیمانده‌ها و تابع حداقل شونده را در حالت حداقل مربعات گسسته بصورت زیر نشان داد.

$$r_{\Omega}^{n+1} = u^{n+1} - u^{n} + \Delta t\,[\theta\, A(u)^{n+1} + (1-\theta) A(u)^{n}] \qquad (۳۱)$$

$$I(u^{n+1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(r_{\Omega}^{n+1})^{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(r_{\Gamma}^{n+1})^{2} \qquad (۳۲)$$

با بکارگیری رابطه وزنی $u = N\hat{u}$ در رابطه مجموع مربعات باقیمانده و مشتق‌گیری از آن نسبت به پارامترهای گرهی در گام زمانی n+1 براحتی ماتریس ضرائب ku=f حاصل می‌شود.
استفاده از روش‌های معمول حل دستگاه معادلات مقادیر پارامترهای مجهول بدست می‌آید. همچنین برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی، روش‌های معمول خطی‌سازی را می‌توان بکار گرفت.

۴. مثال‌های عددی

در این قسمت به منظور اطمینان از صحت مدلسازی روش حداقل مربعات گسسته چند مثال مورد بررسی قرار می‌گیرد.
تابع وزنی بکارگرفته شده در کلیه مثال‌ها از نوع اسپلاین مرتبه۳ و چند جمله‌ای مورد استفاده از مرتبه ۲به‌صورت $p = (1, x, x^2)$ است.
با تغییر در تابع وزنی تفاوت محسوسی در نتایج بوجود نمی‌آید. گسسته‌سازی زمانی در مثال‌های زمان وابسته پسرو است.

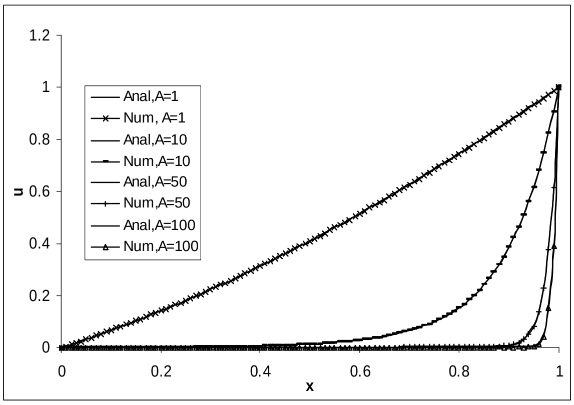
مثال ۱) در این مثال حل معادله دیفرانسیل معمولی جابجائی-پخش خطی و یک بعدی با مقدار متغیر سمت راست و شرایط مرزی دیریچله درحالت دائمی بررسی می‌شود.
علت انتخاب این مسئله خاص به‌خاطر وجود جواب تحلیلی برای این معادله دیفرانسیل به‌ازای مقادیر مختلفی از ضریب جابجائی (A)یا عدد پکلت[1] ($Pe = Ah/2k$) با مقادیر ثابت $k = 1$ و فاصله بین نقاط $h = 0.01$ است.

$$-k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 \qquad 0 < x < 1$$
$$u(x=0) = 0$$
$$u(x=1) = 1$$

جواب تحلیلی به‌ازای مقادیر مختلف عدد پکلت مطابق مباحث معادلات دیفرانسیل معمولی به‌صورت زیر است.

1. Peclet Number

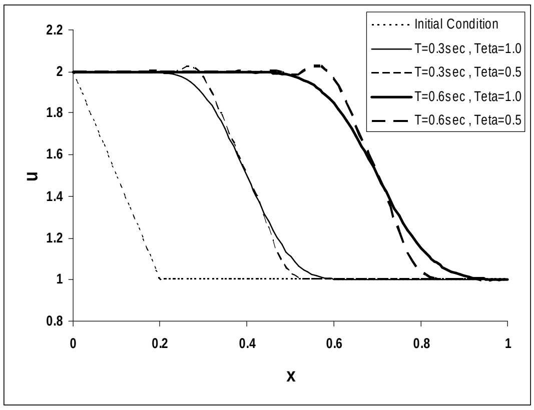
$$u = \left(\frac{1 - \frac{1}{3A} - \frac{1}{A^2} - \frac{2}{A^3}}{1 - e^{A}}\right) + \left(\frac{1 - \frac{1}{3A} - \frac{1}{A^2} - \frac{2}{A^3}}{e^{A} - 1}\right)e^{Ax} + \frac{2}{A^3}x + \frac{1}{A^2}x^2 + \frac{1}{3A}x^3$$



شکل ۱. مقایسه نتایج تحلیلی و عددی روش حداقل مربعات گسسته به‌ازای ضرائب جابجائی۱۰۰و۵۰و۱۰و۱=A

مثال ۲) حل معادله جابجائی خطی زمان وابسته تحت شرایط آغازین زیر در حوزه $x \in [0,1]$ که با ۱۰۰ نقطه گسسته سازی شده $\Delta x = h = 0.01$ مد نظر است.
بازه‌های زمانی معادل $\Delta t = 0.01$ و عدد کورانت[1] C=Adt/dx برابر واحد انتخاب شده است.
پاسخ این معادله دیفرانسیل که در واقع یک مسئله جابجائی خالص است، باید با انتقال کامل تحریک اولیه مطابق آنچه که در شکل۲ نشان داده شده و با سرعت ثابت .A= 1 انجام گردد.
حل این مسئله تا زمان‌های ۰/۳ و۰/۶ ثانیه به‌ازای $q = 0.5$ در گسسته‌سازی زمانی، همانطور که در شکل نشان داده شده است با نوساناتی همراه بوده و در حالت $q = 1.0$ جواب‌ها فاقد نوسان ولی هموار می‌باشند.
کاهش عدد کورانت به مقدار کمتر از یک ضمن افزایش زمان محاسبه منجر به تشکیل نوسان در محل جبهه موج می‌گردد و همچنین افزایش کورانت ضمن افزایش دامنه نوسان منجر به هدایت آن به سمت بالادست می‌گردد.
افزایش یا کاهش جملات تابع چندجمله‌ای و همچنین تغییر در نوع تابع وزنی نیز تاثیر بسزائی در شدت نوسان نمی‌نماید.

1. Courant Number



شکل ۲. **پاسخ معادله دیفرانسیل به‌ازای عدد کورانت ۱ پس از ۰/۳۰ و۰/۶۰ ثانیه به‌ازای** $q = 0.5,1.0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad 0 \le x \le 1$$
$$u = 1. \qquad x \le 0$$
$$u = 0. \qquad x \ge 0$$

مثال ۳) در این مثال معادله غیرخطی برگر (زمان وابسته و ویسکوز) تا زمان‌های ۰/۵ و ۱ ثانیه و ایجاد ناپیوستگی و انتشار آن پس از تشکیل بررسی می‌شود.

بازه‌های زمانی در گسسته سازی dt = 0.01 ثانیه و $q = 0.5$ و $q = 1$ است.

۱۰۱ نقطه با فواصل یکنواخت h=0.03 گسسته‌سازی مکانی حوزه مسئله را تشکیل می‌دهد. ضمن اینکه برای خطی‌سازی معادلات از مقادیر سرعت (u) در گام زمانی قبل استفاده شده است.

شکل ۳ نتایج تحلیل‌های عددی را تا زمان‌های ۰/۵ و ۱ ثانیه به ازای ضریب ویسکوزیته یا ضریب پخش معادل D= 0.01 نشان می‌دهد.

نتایج تحلیل بعد از تشکیل شاک نشاندهنده انتقال ثابت شاک ایجاد شده در زمان است.

با کاهش ضریب ویسکوزیتی تا مقدار D=0.001 و حتی کمتر از آن میزان تیزی جبهه موج افزایش یافته ولی با نوسانات کوچکی همراه خواهد بود. که علت آن را باید در نتیجه تبدیل معادله جابجائی-پخش به معادله جابجائی در ازای کوچک شدن ضریب پخش دانست.

نتایج تحلیل‌های عددی متعدد با روش پیشنهادی به‌ازای q های مختلف و ضریب ویسکوزیته‌های کوچک نشان می‌دهد که به‌ازای $q = 0.53 \sim 0.57$ علی‌رغم کاهش مرتبه خطا، منجر به حذف نوسان و قائم شدن جبهه موج می‌گردد.

صحت نتیجه مذکور برای معادلات برگر یک بعدی انجام شده و باید برای مسائل دو بعدی کنترل شود.

نتایج تحلیل به‌ازای q های نزدیک به یک و خود یک در زمان‌های متوالی نشان‌دهنده جبهه‌های موج نسبتا هموار است.

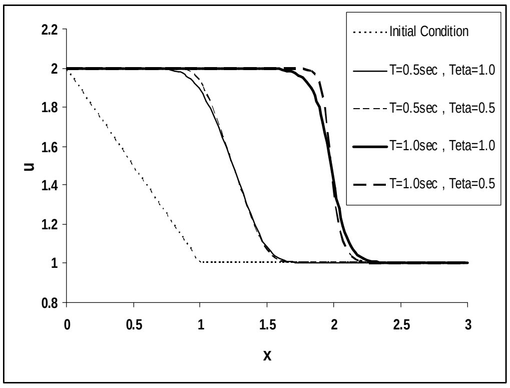
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 \le x \le 3$$

تحت شرایط مرزی و آغازین زیر:

$$u(x, t = 0) = 2. - x \qquad 0 \le x \le 1$$

$$u(x, t = 0) = 1. \qquad 1 \le x \le 3$$

$$u(x = 0, t) = 2.0$$
$$u(x = 1, t) = 1.0$$



شکل ۳. **پدیده پیشروی موج و تشکیل شاک در زمان‌های۰/۰ و ۰/۵ و۱ ثانیه به‌ازای** $q = 1.$ **و** $q = 0.5$

۵. نتیجه گیری

مقاله به تاریخچه بکارگیری روش حداقل مربعات در روش‌های متکی به شبکه و بدون شبکه پرداخته است.

روش حداقل مربعات گسسته برای حل معادلات دیفرانسیل به روش بدون شبکه معرفی نموده است.

حداقل مربعات در این مقاله در دو مرحله بکار گرفته شده است، در اولین مرحله معادله دیفرانسیل به‌کمک نوع گسسته آن گسسته‌سازی و ماتریس ضرائب دستگاه معادلات جبری برحسب توابع شکل استخراج می‌شود و در مرحله دوم برای به‌دست‌آوردن مقادیر توابع شکل در هر نقطه فرضی در داخل حوزه حل از حداقل مربعات متحرک وزنی استفاده شده است.

همانند کلیه روش‌های بدون شبکه و برخلاف روش اجزاء محدود، تابع شکل و مشتقات آن به‌صورت صریح در فرمول بندی اعمال نمی‌شود، بلکه مقادیر توابع شکل با به‌کارگیری حداقل مربعات متحرک وزنی برای کلیه نقاط داخل حوزه و نقاط مرزی به‌دست می‌آید.

این مسئله از یک طرف منجر به حجم عملیات بیشتری نسبت به روش‌های متکی به شبکه می‌شود و از طرف دیگر به‌راحتی می‌توان به پیوستگی‌های مرتبه بالاتری برای توابع شکل به‌ازای چندجمله‌ایهائی با تعداد جملات کم دست یافت.

این خصوصیت در بعضی از مسائل می‌تواند مفید واقع شود و در بعضی دیگر نیز مشکلاتی را به‌وجود می‌آورد.
بعنوان مثال در روش اجزاء محدود گالرکین به‌دلیل پایین بودن مرتبه پیوستگی تابع شکل در گسسته‌سازی ترم پخش که در آن مشتق مرتبه دوم تابع شکل مد نظر است با مشتق‌گیری جزء به جزء از مرتبه مشتق کاسته و شکل ضعیف[1] آن در معادلات اعمال می‌شود در حالیکه مقادیر مشتقات مرتبه بالا در روش حداقل مربعات گسسته به صراحت عاید می‌شوند.
به‌هرحال مهمترین مزایای این روش را می‌توان در حذف مراحل انتگرال‌گیری از روال محاسبه ماتریسهای ضرائب و همچنین پشتوانه بدون‌شبکه بودن آن در مفهوم واقعی دانست. فرمولبندی روش با مثال‌هائی در حالت دائمی و گذرا برای معادلات دیفرانسیل جابجائی- پخش خطی و غیرخطی صحت‌یابی شده است.
در کلیه مسائل، تابع پایه (چند جمله‌ای) از نوع مرتبه دوم مطابق معادله (۱۴) و تابع وزنی مورد استفاده ازنوع اسپلاین مرتبه سه می‌باشد. نتایج مدل در حالت مثال ۱ به‌ازای مقادیر کوچک عدد پکلت معرف معادله پخش خالص و با افزایش آن مجانب‌وار به سمت جواب حاصل از معادله جابجائی خالص میل می‌کند را بوضوح نشان می‌دهد و نتایج تحلیل عددی دارای انطباق کامل با جواب تحلیلی است.
نتایج مدل در مثال‌های ۲و۳ در حالت گذرا و برای معادله جابجائی وجابجائی- پخش به‌ازای q های ۰/۵ و۱ آورده شده است. به‌ازای $q = 1.0$ جبهه موج به‌صورت نرم می‌باشد و در حالت $q = 0.5$ که معرف دقت مرتبه دوم در گسسته‌سازی زمانی است، علی‌رغم برخورداری از دقت مرتبه دوم با نوساناتی در محل جبهه موج همراه است که با اعمال تغییراتی جزئی در میزان q رفع شده است.

۶. قدردانی

این مقاله بخشی از نتایج حاصل از یک طرح تحقیقاتی را ارائه می‌دهد که با حمایت حوزه معاونت پژوهشی سازمان مدیریت منابع آب ایران در دانشگاه علم و صنعت ایران به انجام رسیده است که بدینوسیله از آن معاونت قدردانی می‌گردد.

مراجع

[1] Yavari, A, Kaveh, A., Sarkani, SH., Rahimi, Bondarabady,. H. A., *"Topological aspects of meshless methods and nodal ordering for meshless discritization"*, Int. J. Numer. Meth. Engng. 52, 2001, pp. 921-938.

[2] Afshar, M.H., *"Linear, and quadratic least square finite element method for Compressible and incompressible flows*", Phd Thesis, Department of Civil Engineering, University, College of Swansea, 1992.

[3] Zienkiewicz, O.C., Morgan, "*The Finite Element Method Approximation"*, Butterworth Heinemann 2000.

[4] Eason, E. D., *"A Review of Least Squares Methods for Solving Partial Differential Equations*" Int. J. Numer. Meth. Engng, Vol.10, 1976, 1021-1046.

[5] Taylor, R.L., Zienkievicz, O.C., Onate, E., Idelsohn, S.R., *"Moving least square approximations for solution of differntial equations*", Internal Report 74, CIMNE, Barcelona, Spain, 1996.

[6] Bristeau, M.O., Pironneau, O., Glowinski, R., Periaux, J., and Perrier, P., *"On the Numerical Solution of Nonlinear Problems in Fluid Dynamics by Least Squares and Finite Element Methods. (II) Application to Transonic Flow Simulations. Comp*". Meth. Appl. Mech. Engng. Vol. 51, 1985, pp. 363-394.

[7] Carey, G.F., Pehlivanov, A.I., Shen, Y., A. and Bose, K.C., Wang., *"Least Square Finite Elements For Fluid Flow and Transient"*, International Journal for Numerical Methods In Fluids. Vol. 27, 1998, pp. 97-107.

[8] Nayroles, B., Touzot, G., Villon, P., *"Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse element"*, Coput. Mech. 10, 1992. 307-318.

[9] Belytschko, T., Gu, L. and Lu, Y.Y., *"Fracture and crack growth by element free Galerkin methods*", Model. Simul. Mater. Sci. Engng. 2,1994, 519-534.

[10] Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M., Krysl, P., *"Meshless methods"*: An overview and recent development, Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 139,1996, pp. 3-47.

[11] Onate, E., Idelsohn, S., Zienkievicz, O.C., Taylor, R.L., Sacco, C., "*A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems*" Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. Vol. 139, 1996, pp. 315-346.

[12] Onate, E., Idelsohn, S., Zienkievicz, O.C., Taylor, R.L., "*A finite point method in computational mechanics applications to convective transport and fluid flow"*, Int. J. Numer. Meth. Engng. Vol. 39, 1996, pp. 3839-3866.

[13] Bonet, J., Kulasegaram, S., *"A simplified approach to enhance the performance of smooth particle hydrodynamics methods"*, Applied Mathematics and Computation, 126, 2002,133-155.

[14] Bonet, J., Hassani, B., Lok, L.T., Kulasegaram, S., *"Corrected smooth particle hydrodynamics- a reproducing kernel meshless method for computational mechanics in UK–5th ACME Annual Conference"*, 1997.

[15] Idelsohn, S.R., Storti, M. A., Onate, E., *"Lagrangian formulatios to solve free surface incompressible inviscid fluid flow*", Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 191, 2001. pp.583-593.

[16] Koshizuka, S., Oka, Y., *"Moving particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid"*, Nucl. Engng. Sci. 123, 1999, pp. 421-434.

1. Weak Form

[17] Farhadi, L., Ataie-Ashtiani, B., *"A fully meshless lagrangian numerical method for prediction of free water surface"* hydrulic of dam and river structures conference Iran-Tehran, 2004.

[18] Park, S. H., and Youn, S. L., "*The least-squares meshfree method"*, Int. J. Numer. Meth. Engng. Vol. 52, 2001, pp. 997-1012.

[19] Jiang, B.N. and Carey, G.F., *"A stable least squares finite element method for nonlinear hyperbolic problems*" Int. J. Numer. Meth. in Fluids. Vol. 8, 1988, pp. 933-942.

[20] Chen, J.K., Beraun, J.E., *"A generalized smoothed particle hydrodynamics method for nonlinear dynamic problem*" Comput. Methods Appl. Mech. Engng. Vol. 190, 2000, pp. 225-239

[21] Zerroukat, M., Djidjeli, K. and Charafi, A., "*Explicit and Implicit Meshless Methods for Linear Advection-Diffusion-type Partial Differential Equation*", nt. J. Numer. Meth. Engng, Vol. 48, 2000, pp. 19-35.

[22] Boztosun, I., Charafi, A., *"An Analysis of the Linear Advection-Diffusion Equation Using Mesh-free and Mesh depended Methods*", Engineering Analysis with Boundary Elements, 26, 2002, pp. 889-895.

[23] Chongjiang, D., "*An element free Galerkin method for simulation of stationary two dimensional shallow water flows in rivers*", Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 182, 2000, 89-107.

[24] A. Huerta, and S.F., Mendez. *"Time accurate consistently stabilized mesh-free methods for convection dominated problems*, Int. J. Numer. Meth. Engng. Vol. 56, 2003, pp. 1225-1242.