

حل تحلیلی میدان دمای دوبعدی غیر دائم در استوانه توخالی با شرایط مرزی متغیر و هارمونیک

غلامعلی عاطفی و روح الله ابراهیمی

چکیده: در این مقاله حل تحلیلی میدان دما در استوانه توخالی تحت شرط مرزی هارمونیک محیط خارج که در جهت محور به طور دلخواه تغییر می نماید ارائه شده است. استوانه بصورت همگن و با خواص فیزیکی غیر وابسته به دما می باشد. برای حل مسأله ابتدا شرایط مرزی به صورت مقادیر ثابت فرض شده و با روش جداسازی متغیرها توزیع دما در استوانه بدست می آید. سپس با استفاده از تئوری دوهمال میدان دما تحت شرایط مرزی متغیر با زمان محاسبه می‌شود. در پایان برای تأیید صحت حل، نتیجه را برای حالت خاص یکبعدی هارمونیک بدست آورده و با مراجع موجود مقایسه می نماییم.

واژه های کلیدی: دما، استوانه، شرایط مرزی.

۱. مقدمه

مسائل انتقال حرارت با شرایط مرزی متغیر با زمان یکی از پرکاربردترین مسایل انتقال حرارت می باشند. لوله های انتقال آب، نفت و گاز، اجزاء موتورهای احتراقی، رآکتورهای اتمی، دودکش های صنعتی، رگهای بدن موجودات و ... نمونه های کوچکی از این موارد هستند.

Heisler در سال ۱۹۴۷ نمودارهای میدان حرارتی غیردائم را برای یک استوانه بلند و توپر با دمای اولیه ثابت بدست آورد. این نمودارها بصورت توابعی از اعداد بدون بعد بیوت و فوریر رسم شده که دمای استوانه را در شعاعهای مختلف می دهد [۱]. Ozisik نیز میدان حرارتی ناپایا را برای استوانه توخالی و توپر تحت شرایط مرزی مختلف همگن و غیرهمگن بدست آورده است [۲]. تروستل تنشهای ایجاد شده در اثر بارهای حرارتی مختلف را مورد بررسی قرار داده است [۳].

در این مقاله توزیع دمای ناپایا (غیر دائم) در استوانه توخالی و محدود (دوبعدی و وابسته به زمان) ناشی از انتقال حرارت هدایتی محاسبه شده است. شرایط مرزی در ابتدا و انتهای استوانه و همچنین سطح داخلی همگن در نظر گرفته شده، ولی روی سطح

خارجی استوانه ناهمگن و ناپایا فرض شده است. شرط اولیه نیز برابر مقدار ثابت صفر فرض شده است.

روش حل تحلیلی بوده و از روش جداسازی متغیرها برای حل معادله دیفرانسیل حرارت در مختصات استوانه‌ای با چهار شرط مرزی و یک شرط اولیه استفاده شده است. برای حل ابتدا شرایط مرزی روی سطوح جانبی استوانه را پایا (دائم) فرض کرده و با استفاده از جمع آثار، جواب مسئله را به دو قسمت تقسیم می کنیم. یکی جواب پایا و دیگری جواب ناپایا که از جمع این دو قسمت میدان حرارتی حاصل می‌شود. سپس با اعمال شرایط مرزی واقعی روی سطح خارجی که ناپایا (متغیر با زمان و هارمونیک) می‌باشد، میدان حرارتی نهایی حاصل می گردد. در پایان نمودارهای بدون بعد نسبت دما به ارتفاعی استوانه به دمای محیط و اختلاف فاز آنها و همچنین شار عبوری از سطح استوانه، به صورت توابعی از اعداد بدون بعد بیوت (Bi) و فوریر (Fo) محاسبه و ترسیم شده است. مرجع [۴] شرط مرزی را به عنوان یک ارتعاش هارمونیک در نظر گرفته و نمودارهای دما و اختلاف فاز برای استوانه توپر، کره توپر و صفحه ترسیم نموده است. برای نمایش صحت حل، نتایج را برای یک ارتعاش هارمونیک بدست آورده و با مرجع [۴] مقایسه می‌نماییم.

۲. معادلات حاکم و شرایط مرزی

معادله هدایت حرارتی دوبعدی در یک استوانه برای محیط ایزوتروپ همگن بدون چشمه حرارتی و خواص حرارتی ثابت بصورت ذیل می‌باشد:

این مقاله در تاریخ ۸۳/۸/۵ دریافت و در تاریخ ۸۵/۴/۱۴ به تصویب نهایی رسیده است.

دکتر غلامعلی عاطفی استادیار، دانشکده مکانیک دانشگاه علم و صنعت ایران،
atefi@iust.ac.ir
مهندس روح الله ابراهیمی، دانشکده مکانیک دانشگاه علم و صنعت ایران،
ro.ebrahimi@gmail.com

با گذاردن (۸) در رابطه (۶) شرط مرزی به فرم ذیل نوشته می‌شود.

$$\theta(r_o, z, t) + \frac{k}{h} \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r_o, z, t} = f(z) (\theta_{M_o \max} - \bar{\theta}) \sin(2\pi \frac{t}{T}) \quad (9)$$

۳. حل تحلیلی معادله حرارت

برای بدست آوردن میدان دما با شرط اولیه و شرایط مرزی فوق باید ابتداء میدان دما برای حالتی حل شود که از زمان صفر اثرات مرزی ثابتی در سطوح جانبی فرض شود [۳]. در این صورت شرط اولیه و شرایط مرزی عبارت خواهد بود از:

$$\theta(r, z, 0) = 0 \quad (10)$$

$$\theta(r, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{r, l, t} = 0 \quad (11)$$

$$\theta(r_o, z, t) + \frac{k}{h} \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r_o, z, t} = f(z), \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r_i, z, t} = 0 \quad (12)$$

این مسأله را چنین حل می‌کنیم که ابتداء مسأله مرزی (۱۱) و (۱۲) را با حل دائم $\theta_0(r, z)$ بدست آورده و سپس حل غیردائم را که با $\theta_1(r, z, t)$ نشان داده می‌شود بدست می‌آوریم. با جمع حل دائم و غیردائم $(\theta(r, z, t) = \theta_0(r, z) + \theta_1(r, z, t))$ شرط مرزی و اولیه (۱۰) تا (۱۲) ارضاء می‌شود. در پایان، حل کلی را بدست می‌آوریم که شرایط مرزی و اولیه (۲) تا (۷) را ارضاء کند.

۳-۱. حل تحلیلی میدان دمای دائم

معادله دیفرانسیلی هدایت حرارتی در این حالت برابر است با:

$$\nabla^2 \theta_0 = \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

شرایط مرزی در این حالت عبارت است از:

$$\theta_0(r, 0) = 0 \quad (14)$$

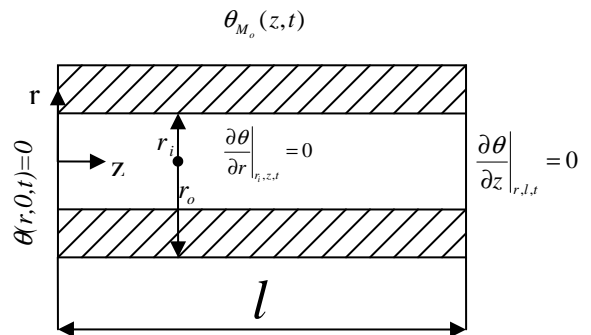
$$\frac{\partial \theta_0}{\partial z} \Big|_{r, l} = 0 \quad (15)$$

$$\theta_0(r_o, z) + \frac{k}{h} \frac{\partial \theta_0}{\partial r} \Big|_{r_o, z} = f(z) \quad (16)$$

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial r} \Big|_{r_i, z} = 0 \quad (17)$$

حل معادله (۱۳) به روش جداسازی انجام می‌گیرد.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$



شکل ۱. استوانه توخالی همراه شرایط مرزی

مطابق شکل (۱)، شرایط مرزی و اولیه به شرح ذیل می‌باشد:
 شرط اولیه:

$$\theta(r, z, 0) = 0 \quad (2)$$

شرط مرزی در سطح $Z = 0$:

$$\theta(r, 0, t) = 0 \quad (3)$$

شرط مرزی در سطح $Z = l$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{r, l, t} = 0 \quad (5)$$

شرط مرزی در سطح خارجی و داخلی

(۶)

$$-h [\theta_{M_o}(z, t) - \theta(r_o, z, t)] = -k \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r_o, z, t}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r_i, z, t} = 0 \quad (7)$$

در این روابط h, k, r_i, r_o به ترتیب، شعاع خارجی، شعاع داخلی، ضریب هدایت حرارتی و ضریب جابجایی سیال خارج استوانه، $a = \frac{k}{\rho C}$ ضریب نفوذ حرارتی جسم و $\theta_{M_o}(z, t)$ دمای محیط خارج است.

دمای محیط خارجی استوانه را تابعی از Z برحسب زمان فرض نموده و به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\theta_{M_o}(z, t) = f(z) (\theta_{M_o \max} - \bar{\theta}) \sin(2\pi \frac{t}{T}) \quad (8)$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(w_{0n}z) \quad (27)$$

ضریب فوریه C_n با در نظر گرفتن متعامد بودن توابع ویژه برابر است با:

$$C_n = \frac{\int_{z=0}^l f(z) \sin(w_{0n}z) dz}{\int_{z=0}^l \sin^2(w_{0n}z) dz} \quad (28)$$

(۲۷) را در (۲۶) می‌گذاریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \left[I_0(w_{0n}r_0) + \frac{k}{h} w_{0n} I_0'(w_{0n}r_0) \right] + B_n \left[K_0(w_{0n}r_0) + \frac{k}{h} w_{0n} K_0'(w_{0n}r_0) \right] - C_n \right\} \sin(w_{0n}z) = 0 \quad (29)$$

روابط (۲۹) و (۲۶) زمانی ارضاء می‌شوند که برای هر n برقرار باشند. به عبارت دیگر باید ثابت‌های A_n و B_n از سیستم معادلات خطی زیر بدست آیند.

$$\begin{aligned} A_n \left[I_0(w_{0n}r_0) + \frac{k}{h} w_{0n} I_0'(w_{0n}r_0) \right] + \\ B_n \left[K_0(w_{0n}r_0) + \frac{k}{h} w_{0n} K_0'(w_{0n}r_0) \right] &= C_n \\ A_n I_0'(w_{0n}r_i) + B_n K_0'(w_{0n}r_i) &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

با جایگزینی (۳۰) در رابطه (۳۰) داریم:

$$\begin{aligned} A_n \left\{ \left[I_0(w_{0n}r_0) + \frac{k}{h} w_{0n} I_0'(w_{0n}r_0) \right] \right. \\ \left. - \frac{I_0'(w_{0n}r_i)}{K_0'(w_{0n}r_i)} \left[K_0(w_{0n}r_0) + \frac{k}{h} w_{0n} K_0'(w_{0n}r_0) \right] \right\} = C_n \end{aligned} \quad (31)$$

ضریب A_n را با D_n نشان می‌دهیم. آنگاه:

$$A_n = \frac{C_n}{D_n} k_0'(w_{0n}r_i) \quad (32)$$

با جایگزینی (۳۲) در (۳۰b)، B_n بدست می‌آید:

$$B_n = -\frac{I_0'(w_{0n}r_i)}{k_0'(w_{0n}r_i)} A_n = -\frac{C_n}{D_n} I_0'(w_{0n}r_i) \quad (33)$$

حال A_n و B_n را از روابط (۳۲) و (۳۳)، در (۲۵) جایگذاری می‌کنیم. در نتیجه میدان دما عبارتست از:

$$\theta_0(r, z) = R_0(r)Z_0(z) \quad (18)$$

با قرار دادن رابطه فوق در معادله (۱۳) و انتخاب w_0^2 به دو معادله دیفرانسیل ذیل برحسب R_0 و Z_0 می‌رسیم:

$$\frac{d^2 R_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_0}{dr} - w_0^2 R_0(r) = 0 \quad (19)$$

$$\frac{d^2 Z_0}{dz^2} + w_0^2 Z_0(z) = 0 \quad (20)$$

معادله (۲۰) یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ۲ و معادله (۱۹) یک معادله دیفرانسیل بسل مرتبه صفر می‌باشد که جواب آنها به ترتیب برابر است با:

$$Z_0(z) = A_1 \cos(w_0 z) + B_1 \sin(w_0 z) \quad (21)$$

$$R_0(r) = A_2 I_0(w_0 r) + B_2 K_0(w_0 r) \quad (22)$$

بنابراین $\theta_0(r, z)$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \theta_0(r, z) = [A_1 \cos(w_0 z) + B_1 \sin(w_0 z)] \\ \cdot [A_2 I_0(w_0 r) + B_2 K_0(w_0 r)] \end{aligned} \quad (23)$$

با اعمال شرایط مرزی (۱۴) و (۱۵) میدان دمای پایا (دائم) بر حسب مقادیر ویژه w_{0n} یعنی:

$$w_{0n} = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} \quad (24)$$

به فرم کلی زیر بدست می‌آید:

$$\theta_0(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n I_0(w_{0n}r) + B_n K_0(w_{0n}r)] \sin(w_{0n}z) \quad (25)$$

ثابت‌های A_n و B_n از شرایط مرزی (۱۶) و (۱۷) بدست می‌آیند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \left[I_0(w_{0n}r_0) + \frac{k}{h} w_{0n} I_0'(w_{0n}r_0) \right] + \right. \quad (26)$$

$$\left. B_n \left[K_0'(w_{0n}r_0) + \frac{k}{h} w_{0n} K_0'(w_{0n}r_0) \right] \right\} \sin(w_{0n}z) = f(z)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [A_n I_0'(w_{0n}r_i) + B_n K_0'(w_{0n}r_i)] w_{0n} \sin(w_{0n}z) = 0$$

برای بدست آوردن ثابت‌های A_n و B_n لازم است که تابع مرزی $f(z)$ را با توابع ویژه $\sin(w_{0n}z)$ بسط دهیم:

در مساله مرزی میدان دمای غیر دائم فوق، باید شرایط مرزی ذیل ارضا شوند.

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right|_{r,l,t} = 0 \quad , \quad \theta_1(r, 0, t) = 0 \quad (47)$$

$$\theta_1(r_o, z, t) + \frac{k}{h} \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \right|_{r_o, z, t} = 0 \quad , \quad \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \right|_{r_i, z, t} = 0 \quad (48)$$

با مقادیر زیر و با توجه به اینکه مشتق ها بر حسب μr می باشند، داریم:

$$-A_1 \sin(\nu l) + B_1 \cos(\nu l) = 0 \quad (49)$$

$$A_1 = 0$$

$$A_2 [J_0(\mu r_o) + \frac{k}{h} \mu J_0'(\mu r_o)] +$$

$$B_2 [N_0(\mu r_o) + \frac{k}{h} \mu N_0'(\mu r_o)] = 0$$

$$A_2 J_0'(\mu r_i) + B_2 N_0'(\mu r_i) = 0 \quad (50)$$

از (49) نتیجه می شود:

$$\cos(\nu l) = 0 \Rightarrow \nu_n = \frac{2n+1}{2l} \pi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (51)$$

برای آنکه (50) جوابهای غیر صفر برای A_2 و B_2 داشته باشد. باید دترمینان ضرایب صفر باشد. بنابراین:

$$N_0'(\mu r_i) [J_0(\mu r_o) + \frac{k}{h} \mu J_0'(\mu r_o)] +$$

$$J_0'(\mu r_i) [N_0(\mu r_o) + \frac{k}{h} \mu N_0'(\mu r_o)] = 0 \quad (52)$$

بدین ترتیب (ν_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) و μ_s ($s = 1, 2, 3, \dots$) بدست می آیند. علاوه بر آن از تساوی معادلات مقادیر مشخصه (24) و (51) دیده می شود که:

$$\nu_n = w_{0n} \quad (53)$$

از رابطه (50b)، رابطه بین A_2 و B_2 بدست می آید:

$$B_2 = -\frac{J_0'(\mu r_i)}{N_0'(\mu r_i)} A_2 \quad (54)$$

در این صورت روابط برای $Z(z)$ و $R(r)$ با استفاده از رابطه (54) به فرم زیر بدست می آید:

$$\theta_0(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \eta(w_{0n} r) \sin(w_{0n} z) \quad (34)$$

که در آن:

$$\eta(w_{0n} r) = \frac{1}{D_n} \cdot \quad (35)$$

$$[K_0'(w_{0n} r_i) I_0(w_{0n} r) - I_0'(w_{0n} r_i) K_0(w_{0n} r)]$$

۳-۲. حل میدان دمای گذرا

در این حالت معادله دیفرانسیلی هدایت حرارتی برابر است با:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} \quad (37)$$

معادله میدان دمای ناپایا را از روش جداسازی متغیرها حل نموده به عبارت ذیل برای زمان می رسمیم:

$$\theta_1(r, z, t) = R(r)Z(z)T(t) \quad (38)$$

$$\frac{T'}{T} = a \left(\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{Z''}{Z} \right) \quad (39)$$

با انتخاب ثابتهای دلخواه معادلات دیفرانسیلی معمولی زیر بدست می آید:

$$R'' + \frac{1}{r} R' = -R\mu^2 \quad , \quad \frac{Z''}{Z} = -\nu^2 \quad (40)$$

و با توجه به رابطه (39) می توان نوشت:

$$\frac{T'}{T} = -a(\mu^2 + \nu^2) = -a\omega^2 \quad (41)$$

که در آن $\mu^2 + \nu^2 = \omega^2$ می باشد. لذا حل معادلات دیفرانسیلی فوق عبارتند از:

$$Z(z) = \bar{A}_1 \cos(\nu z) + \bar{B}_1 \sin(\nu z) \quad (43)$$

$$R(r) = A_2 J_0(\mu r) + B_2 N_0(\mu r) \quad (44)$$

$$T(t) = A_0 e^{-a\omega^2 t} \quad (45)$$

J_0 تابع بسل (Bessel) و N_0 تابع نیومان (Neumann) درجه صفر هستند. با گذاردن روابط فوق در (38) و با اختصار $A_0 \bar{A}_1 = A_1$ و $A_0 \bar{B}_1 = B_1$ ، رابطه زیر بدست می آید:

$$\theta_1(r, z, t) = e^{-a\omega^2 t} [A_1 \cos(\nu z) + B_1 \sin(\nu z)] \times [A_2 J_0(\mu r) + B_2 N_0(\mu r)] = T(t)Z(z)R(r) \quad (46)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_{js} \phi_0(\mu_j r) = -C_s \eta(w_{0s} r) \quad (64)$$

با توجه به متعامد بودن توابع مشخصه $\phi_0(\mu_j r)$ می توان نوشت:

$$\int_{r_i}^{r_o} r \phi_0(\mu_j r) \phi_0(\mu_i r) dr = 0 \quad i \neq j \quad (65)$$

حال برای بدست آوردن A_{js} طرفین (64) را در $r \phi_0(\mu_j r)$ ضرب نموده و از r_i تا r_o انتگرال می گیریم:

$$A_{js} = - \frac{\int_{r_i}^{r_o} r \phi_0(\mu_j r) C_s \eta(w_{0s} r) dr}{\int_{r_i}^{r_o} r \phi_0^2(\mu_j r) dr} \quad (66)$$

در نتیجه میدان دمای غیردائم (ناپایا) برابر است با:

$$\theta_1(r, z, t) = - \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \phi_0(\mu_j r) \sin(w_{0s} z) e^{-a\omega_{js}^2 t} \cdot \frac{\int_{r_i}^{r_o} r \phi_0(\mu_j r) C_s \eta(w_{0s} r) dr}{\int_{r_i}^{r_o} r \phi_0^2(\mu_j r) dr} \quad (67)$$

نهایتاً میدان دمایی که شرایط مرزی (۱۰) تا (۱۲b) را ارضاء کند، عبارت است از:

$$\theta(r, z, t) = \theta_0(r, z) + \theta_1(r, z, t) \quad (68)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\theta(r, z, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[\eta(w_{0s} r) - \sum_{j=1}^{\infty} \phi_0(\mu_j r) e^{-a\omega_{js}^2 t} \frac{\int_{r_i}^{r_o} r \phi_0(\mu_j r) \eta(w_{0s} r) dr}{\int_{r_i}^{r_o} r \phi_0^2(\mu_j r) dr} \right] \cdot C_s \sin(w_{0s} z) \quad (69)$$

۳-۳. حل کامل میدان دمای متقارن با شرایط مرزی متغیر و پریودیک با شرایط مرزی و اولیه ۲، ۵ و ۹

رابطه (69) مشخص کننده میدان دمایی در زمان t است که به علت شرایط مرزی (۱۲) ایجاد شده است. شرایط مرزی (۱۲) در زمان $t = 0$ اثر نموده و از نظر زمان ثابت می باشد. در حالتی که اثرات مرزی مطابق رابطه (۹) از نظر زمانی متغیر باشد، در این صورت ضرایب فوریه که با C_s نشان داده ایم ثابت نبوده و تابع زمان هستند. حال شرط مرزی (۹) را بر حسب توابع مشخصه تکامل می دهیم.

$$Z(z) = B_1 \sin(v z) \quad (55)$$

$$R(r) = A_2 \left[J_0(\mu r) - \frac{J'_0(\mu r_i)}{N_0(\mu r_i)} N_0(\mu r) \right]$$

با ثابت $B_1 A_2 = A$ رابطه (۴۶) به صورت زیر می باشد:

$$\theta_1(r, z, t) = A \left[J_0(\mu r) - \frac{J'_0(\mu r_i)}{N_0(\mu r_i)} N_0(\mu r) \right] \cdot \sin(v z) e^{-a\omega^2 t} \quad (56)$$

رابطه فوق شرایط مرزی (۴۷) الی (۴۸) را برای همه مقادیر مشخصه‌ایکه از روابط (۵۱) و (۵۲) بدست می آیند، ارضاء می کند. بدین ترتیب می توان برای حالت کلی نوشت:

$$\theta_1(r, z, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{js} \left[J_0(\mu_j r) - \frac{J'_0(\mu_j r_i)}{N_0(\mu_j r_i)} N_0(\mu_j r) \right] \sin(v_s z) e^{-a\omega_{js}^2 t} \quad (57)$$

که طبق (۴۲):

$$\omega_{js}^2 = \mu_j^2 + v_s^2 \quad (58)$$

با اختصار:

$$\phi_0(\mu_j r) = \frac{N'_0(\mu_j r_i) J_0(\mu_j r) - J'_0(\mu_j r_i) N_0(\mu_j r)}{N'_0(\mu_j r_i)} \quad (59)$$

رابطه (57) فرم زیر را پیدا می کند:

$$\theta_1(r, z, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{js} \phi_0(\mu_j r) \sin(v_s z) e^{-a\omega_{js}^2 t} \quad (60)$$

در میدان دمای فوق که بر حسب توابع مشخصه تکامل داده شده است، ثابت A_{js} باقیمانده است، که از شرط اولیه بدست می آید. برای این منظور باید حل غیر دائم در زمان صفر در رابطه زیر صدق کند (اثرات حل دائم و غیر دائم باید در زمان صفر خنثی شود).

$$\theta_1(r, z, 0) = -\theta_0(r, z) \quad (61)$$

حال معادلات (60) و (۳۶) را در رابطه بالا می گذاریم:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{js} \phi_0(\mu_j r) \sin(v_s z) = - \sum_{s=1}^{\infty} C_s \eta(w_{0s} r) \sin(w_{0s} z) \quad (62)$$

با $w_{0s} = v_s$ خواهیم داشت:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{\infty} A_{js} \phi_0(\mu_j r) + C_s \eta(w_{0s} r) \right] \sin(w_{0s} z) = 0 \quad (63)$$

که برای هر s رابطه زیر برقرار است:

با توجه به قاعده انتگرال جزء به جزء می توان نوشت:

$$C_s(0)e^{-a\omega_{js}^2 t} + \int_0^t e^{-a\omega_{js}^2(t-\tau)} \frac{dC_s}{d\tau} d\tau = \quad (76)$$

$$C_s(t) - a\omega_{js}^2 \int_0^t C_s(\tau) e^{-a\omega_{js}^2(t-\tau)} d\tau$$

در نتیجه:

$$\theta(r, z, t) = \left[\sum_{s=1}^{\infty} \left[\eta(w_{0s}, r) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_0(\mu_j r)}{\int_{r_i}^{r_o} r \phi_0^2(\mu_j r) dr} \int_{r_i}^{r_o} r \phi_0^2(\mu_j r) \eta(w_{0s}, r) dr \right] \right] \quad (77)$$

$$\cdot C_s(t) \sin(w_{0s}, z) + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a\omega_{js}^2 \phi_0(\mu_j r) \sin(w_{0s}, z)}{\int_{r_i}^{r_o} r \phi_0^2(\mu_j r) dr}$$

$$\cdot \int_0^t \int_{r_i}^{r_o} C_s(\tau) r \phi_0(\mu_j r) \eta(w_{0s}, r) e^{-a\omega_{js}^2(t-\tau)} dr d\tau$$

در رابطه بالا قسمتی که با علامت مشخص شده است طبق رابطه (۶۴) و (۶۶) برابر است با $\eta(w_{0s}, r)$ که منجر به حذف عبارت اول می گردد. بنابراین حل میدان دما به صورت ذیل حاصل می شود.

$$\theta(r, z, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a\omega_{js}^2 \phi_0(\mu_j r) \sin(w_{0s}, z)}{\int_{r_i}^{r_o} r \phi_0^2(\mu_j r) dr} \quad (78)$$

$$\cdot \int_0^t \int_{r_i}^{r_o} C_s(\tau) r \phi_0(\mu_j r) \eta(w_{0s}, r) e^{-a\omega_{js}^2(t-\tau)} dr d\tau$$

۳-۴. فرم بی بعد معادلات

جهت سهولت محاسبات و همچنین ارائه جواب تحلیلی بر حسب اعداد بدون بعد بیوت (Bi) و فوریه (Fo) باید از ابتدا کمیت های مختلف را بدون بعد در نظر گرفت. در این صورت خواهیم داشت:

$$\bar{r} = \frac{r}{r_o}, \quad \bar{z} = \frac{z}{l}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T} \quad (79)$$

$$Bi = \frac{hr_o}{k}, \quad Fo = \frac{aT}{r_o^2}$$

که در آن T, l, r_o به ترتیب شعاع خارجی، طول استوانه و دوره تناوب نوسان دمای اطراف استوانه می باشد. همچنین در این حل اعداد بدون بعد m و x به عنوان نسبت شعاع به طول استوانه و نسبت شعاع داخل به خارج، تعریف می گردد.

$$x = \frac{r}{l}, \quad m = \frac{r_i}{r_o} \quad (80)$$

در اینصورت با جایگذاری کمیت های بدون بعد در معادله (۱) خواهیم داشت:

$$f(z)(\theta_{M_{o,max}} - \bar{\theta}) \sin(2\pi \frac{t}{T}) = \sum_{s=1}^{\infty} C_s \sin(w_{0s}, z) \quad (70)$$

که C_s طبق رابطه زیر بدست می آید:

$$C_s = \frac{\int_0^l f(z) (\theta_{M_{o,max}} - \bar{\theta}) \sin(2\pi \frac{t}{T}) \sin(w_{0s}, z) dz}{\int_0^l \sin^2(w_{0s}, z) dz} \quad (71)$$

در یک المان زمانی تغییرات C_s ، $dC_s = \frac{dC_s}{d\tau} d\tau$ می باشد. حال فرض می کنیم اثری که در زمان τ ایجاد شده است. با گذشت زمان ثابت بماند. در این صورت میدان دمائی که در زمان t بعد از گذشت $t - \tau$ ثانیه ایجاد شده است، توسط رابطه (۶۹) با جایگزینی dC_s بجای C_s و $t - \tau$ بجای t بدست می آید.

$$d\theta(r, z, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[\eta(w_{0s}, r) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_0(\mu_j r) e^{-a\omega_{js}^2(t-\tau)}}{\int_{r_i}^{r_o} r \phi_0^2(\mu_j r) dr} \right] \sin(w_{0s}, z) \frac{dC_s}{d\tau} d\tau \quad (73)$$

اثر کل در زمان t را می توان از جمع اثرات المانی dC_s که در فاصله زمانی dt ایجاد شده، بعلاوه اثر آغاز $C_s(0)$ بدست آورد.

$$\theta(r, z, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[\eta(w_{0s}, r) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_0(\mu_j r) e^{-a\omega_{js}^2(t-\tau)}}{\int_{r_i}^{r_o} r \phi_0^2(\mu_j r) dr} \int_{r_i}^{r_o} r \phi_0(\mu_j r) \eta(w_{0s}, r) dr \right] \quad (74)$$

$$\cdot \sin(w_{0s}, z) \frac{dC_s}{d\tau} d\tau +$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left[\eta(w_{0s}, r) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_0(\mu_j r) e^{-a\omega_{js}^2(t-\tau)}}{\int_{r_i}^{r_o} r \phi_0^2(\mu_j r) dr} \int_{r_i}^{r_o} r \phi_0(\mu_j r) \eta(w_{0s}, r) dr \right]$$

$$\cdot \sin(w_{0s}, z) C_s(0)$$

و یا:

$$\theta(r, z, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \eta(w_{0s}, r) C_s(t) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_0(\mu_j r)}{\int_{r_i}^{r_o} r \phi_0^2(\mu_j r) dr} \left[C_s(0) e^{-a\omega_{js}^2 t} + \int_0^t e^{-a\omega_{js}^2(t-\tau)} \frac{dC_s}{d\tau} d\tau \right] \int_{r_i}^{r_o} r \phi_0^2(\mu_j r) \eta(w_{0s}, r) dr \right\} \sin(w_{0s}, z) \quad (75)$$

با اعمال $e^{-Fo \omega_{js}^2 \bar{t}} = 0$ و ساده سازی داریم:

$$\int_0^{\bar{t}} C_s(\tau) e^{-Fo \omega_{js}^2 (\bar{t}-\tau)} d\tau = \frac{\gamma_s}{Fo \omega_{js}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2M^2}{\omega_{js}^2}\right)^2}} (\theta_{M_{o,max}} - \bar{\theta}) \sin(2\pi\bar{t} + \phi_{js}) \quad (94)$$

که در آن عدد بی بعد M و اختلاف فاز ϕ_{js} برابر است با:

$$M = \sqrt{\frac{\pi}{Fo}}, \quad \phi_{js} = tg^{-1} \left(-\frac{2M^2}{\omega_{js}^2} \right) \quad (94)$$

بدین ترتیب میدان دما در این حالت برابر است با:

$$\theta(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma_s \phi_0(\mu_j \bar{r}) \sin(w_{0s} \bar{z})}{\left[\frac{1}{2} \bar{r}^2 \{ \phi_0^2(\mu_j \bar{r}) + \phi_0'^2(\mu_j \bar{r}) \} \right]_m^1} \cdot \omega_{js}^2 \left[\phi_0(\mu_j) \frac{\partial \eta(w_{0s} r)}{\partial r} \Big|_{r=1} - \frac{\partial \phi_0(\mu_j r)}{\partial r} \Big|_{r=1} \eta(w_{0s}) \right] \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2M^2}{\omega_{js}^2}\right)^2}} (\theta_{M_{o,max}} - \bar{\theta}) \sin(2\pi\bar{t} + \phi_{js}) \right) \quad (95)$$

در نتیجه با اختصار A_{sj} به عنوان ضرائب سینوس خواهیم داشت:

$$\theta(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(A_{js} (\theta_{M_{o,max}} - \bar{\theta}) \sin(2\pi\bar{t} + \phi_{js}) \right) \quad (96)$$

در قدم آخر با محاسبه برآیند بردارهای $A_{js} (\theta_{M_{o,max}} - \bar{\theta}) \sin(2\pi\bar{t} + \phi_{js})$ به عبارت ذیل می رسیم:

$$\theta(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) = A(r, z) (\theta_{M_{o,max}} - \bar{\theta}) \sin(2\pi\bar{t} + \phi) \quad (97)$$

که در آن A نسبت دامنه نوسانات دمای استوانه و دمای محیط و ϕ اختلاف فاز بین این دو می باشد

$$A = \frac{\text{دامنه نوسانات دمای استوانه}}{\text{دامنه نوسانات دمای محیط خارج}} \quad (98)$$

$\phi =$ اختلاف فاز بین دمای محیط و استوانه

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} = Fo \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} + x^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{z}^2} \right) \quad (81)$$

با حل معادله (81) با شرایط مرزی و اولیه فوق به جواب ذیل می رسیم:

$$\theta(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Fo \omega_{js}^2 \phi_0(\mu_j \bar{r}) \sin(w_{0s} \bar{z})}{\int_m^1 \bar{r} \phi_0^2(\mu_j \bar{r}) d\bar{r}} \cdot \int_0^{\bar{t}} \int_m^1 C_s(\tau) \bar{r} \phi_0(\mu_j \bar{r}) \eta(w_{0s} \bar{r}) e^{-Fo \omega_{js}^2 (\bar{t}-\tau)} d\bar{r} d\tau \quad (87)$$

۳-۵. حالت خاص

حل ارائه شده برای حالت کلی است و دمای محیط خارج، تابعی از t و z می باشد. حال برای حالت ذیل جواب را بررسی می کنیم:

$$f(z) = 1 + \frac{z}{l} \quad (88)$$

در این صورت ضرایب فوریه که با $C_s(t)$ نشان دادیم برابر است با:

$$C_s(t) = \frac{2x}{w_{0s}} \left(1 + \frac{x}{w_{0s}} \sin\left(\frac{w_{0s}}{x}\right) \right) (\theta_{M_{o,max}} - \bar{\theta}) \sin(2\pi\bar{t}) \quad (90) \\ = \gamma_s (\theta_{M_{o,max}} - \bar{\theta}) \sin(2\pi\bar{t})$$

که در آن $\gamma_s = \frac{2x}{w_{0s}} \left(1 + \frac{x}{w_{0s}} \sin\left(\frac{w_{0s}}{x}\right) \right)$ می باشد.

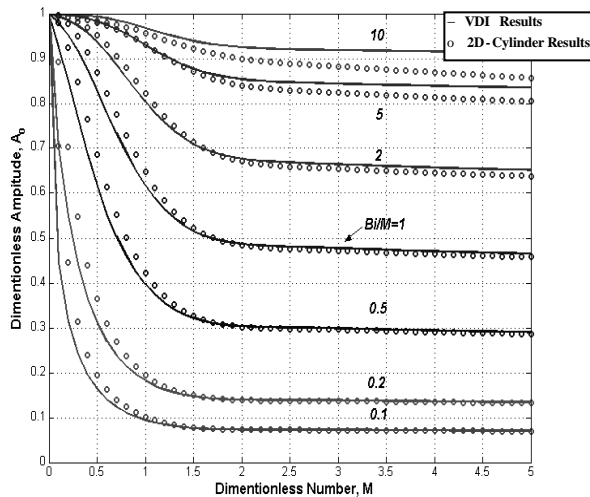
برای بدست آوردن میدان دما ابتدا باید انتگرالهای رابطه (87) محاسبه شود. لذا:

$$\int_m^1 \bar{r} \phi_0^2(\mu_j \bar{r}) d\bar{r} = \left[\frac{1}{2} \bar{r}^2 \{ \phi_0^2(\mu_j \bar{r}) + \phi_0'^2(\mu_j \bar{r}) \} \right]_m^1 \quad (91)$$

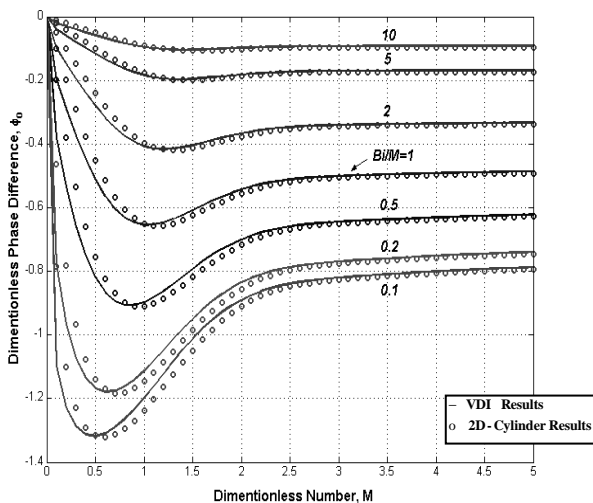
$$\int_m^1 \bar{r} \phi_0(\mu_j \bar{r}) \eta(w_{0s} \bar{r}) d\bar{r} = \frac{1}{(v_s^2 + \mu_j^2)} \left[\phi_0(\mu_j) \frac{\partial \eta(w_{0s} r)}{\partial r} \Big|_{r=1} - \frac{\partial \phi_0(\mu_j r)}{\partial r} \Big|_{r=1} \eta(w_{0s}) \right] \quad (92) \\ = \frac{1}{\omega_{js}^2} \left[\phi_0(\mu_j) \frac{\partial \eta(w_{0s} r)}{\partial r} \Big|_{r=1} - \frac{\partial \phi_0(\mu_j r)}{\partial r} \Big|_{r=1} \eta(w_{0s}) \right] \\ = \frac{1}{\omega_{js}^2} \left[\phi_0(\mu_j) \frac{\partial \eta(w_{0s} r)}{\partial r} \Big|_{r=1} - \frac{\partial \phi_0(\mu_j r)}{\partial r} \Big|_{r=1} \eta(w_{0s}) \right]$$

$$\int_0^{\bar{t}} C_s(\tau) e^{-Fo \omega_{js}^2 (\bar{t}-\tau)} d\tau = \int_0^{\bar{t}} \gamma_s (\theta_{M_{o,max}} - \bar{\theta}) \sin(2\pi\bar{t}) e^{-Fo \omega_{js}^2 (\bar{t}-\tau)} d\tau \quad (93)$$

جمله از بسط \sum_s محاسبه شده است. اختلاف جزئی در نتایج به دلیل دویبعدی بودن هدایت حرارتی در این مقاله و دقت حل می باشد.



شکل ۳. نمودار تغییرات نسبت دامنه بر حسب عدد بی بعد M



شکل ۴. نمودار تغییرات اختلاف فاز بر حسب عدد بی بعد M

حال به بررسی تاثیر کمیت‌های بی بعد m و X (نسبت شعاع داخلی به خارجی و نسبت شعاع به طول) بر روی نمودار دامنه و اختلاف فاز می پردازیم.

۴-۱. تاثیر تغییرات m بر روی میدان دما

بدین منظور نمودارهای دامنه و اختلاف فاز را در سطح خارجی برای حالات مختلف، از استوانه توپر تا یک پوسته نازک، رسم می کنیم. در نمودارهای ذیل $X=0.1$ و $Z=0.5$ می باشد.

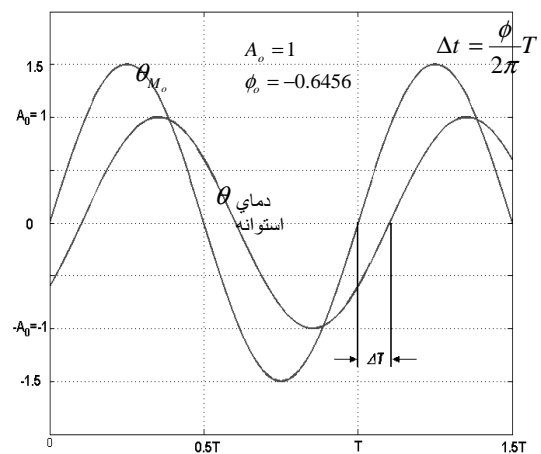
۴. نتایج و نمودارهای ترسیمی

حالت ذیل را برای میدان دمای محیط خارج فرض می کنیم:

$$f(\bar{z}) = 1 + \bar{z} \quad (99)$$

$$\theta_{M_o}(z, t) = (1 + \bar{z})(\theta_{M_o \max} - \bar{\theta}) \sin(2\pi \bar{t})$$

در شکل ذیل، دمای استوانه به ازای مقادیر $0.5, \bar{z}, \bar{r} = 1$ ترسیم شده است: $M = 1, Bi = 1, m = 0.5, X = 0.1$



شکل ۲. مقایسه دمای استوانه متاثر از محیط با دمای محیط

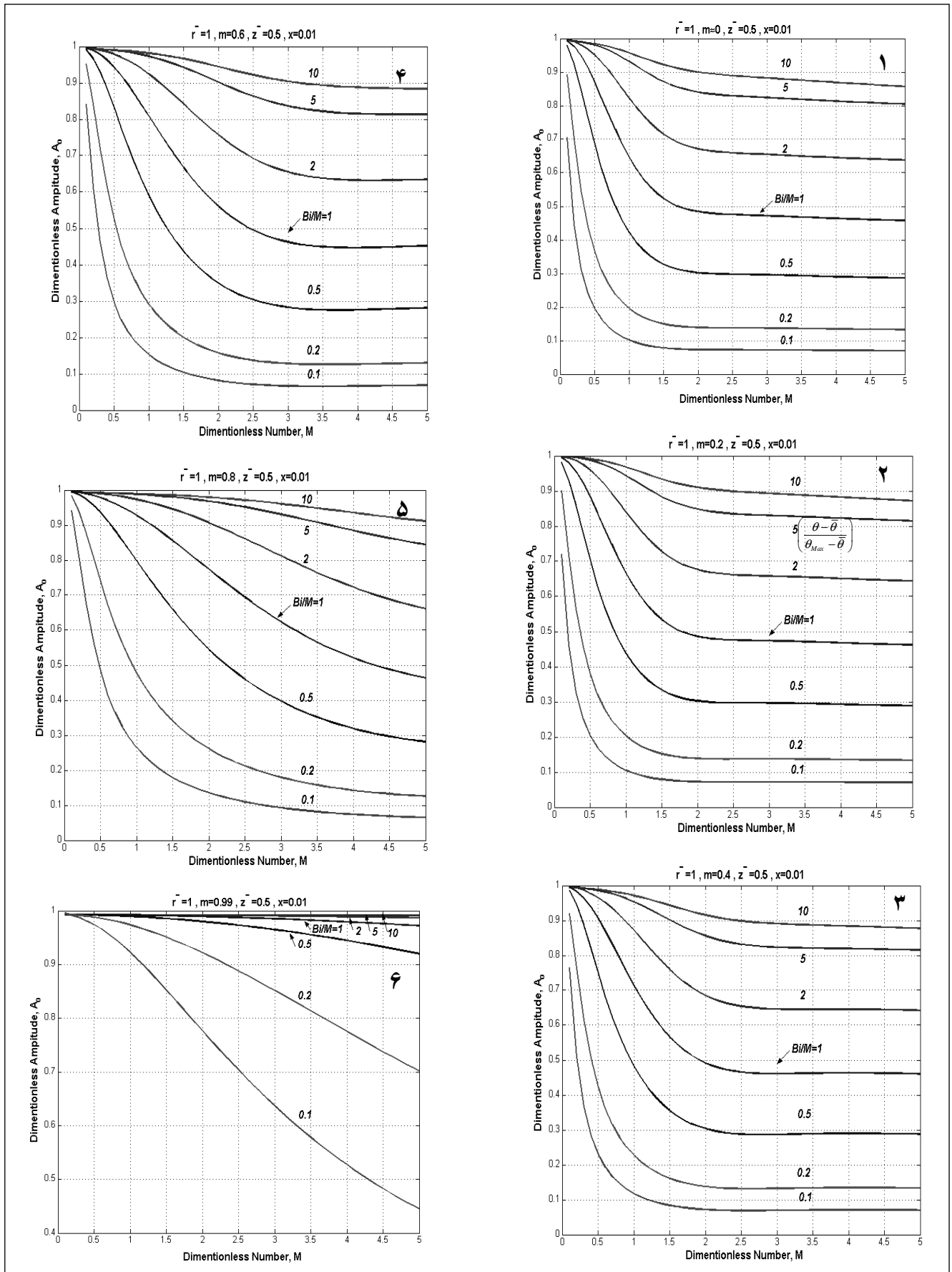
به منظور بررسی تغییرات A و ϕ ، دو نمودار که بیان کننده این دو کمیت می باشند رسم شده است که در آن تغییرات این دو کمیت بر حسب اعداد بی بعد M و Bi/M بیان شده است. M متناسب با جذر عکس عدد فوریر و به نوعی بیانگر فرکانس نوسانات دما می باشد.

همچنین Bi/M متاثر از پرپود، شرایط مرزی و خواص ترموفیزیکی استوانه می باشد. جهت نمایش صحت حل ابتدا نمودار تغییرات A و ϕ را برای سطح استوانه توپر ($r_i/r_o \rightarrow 0$) با نمودار مرجع [۳] مقایسه می نماییم. برای این منظور نسبت شعاع داخلی به خارجی را نزدیک صفر انتخاب می کنیم.

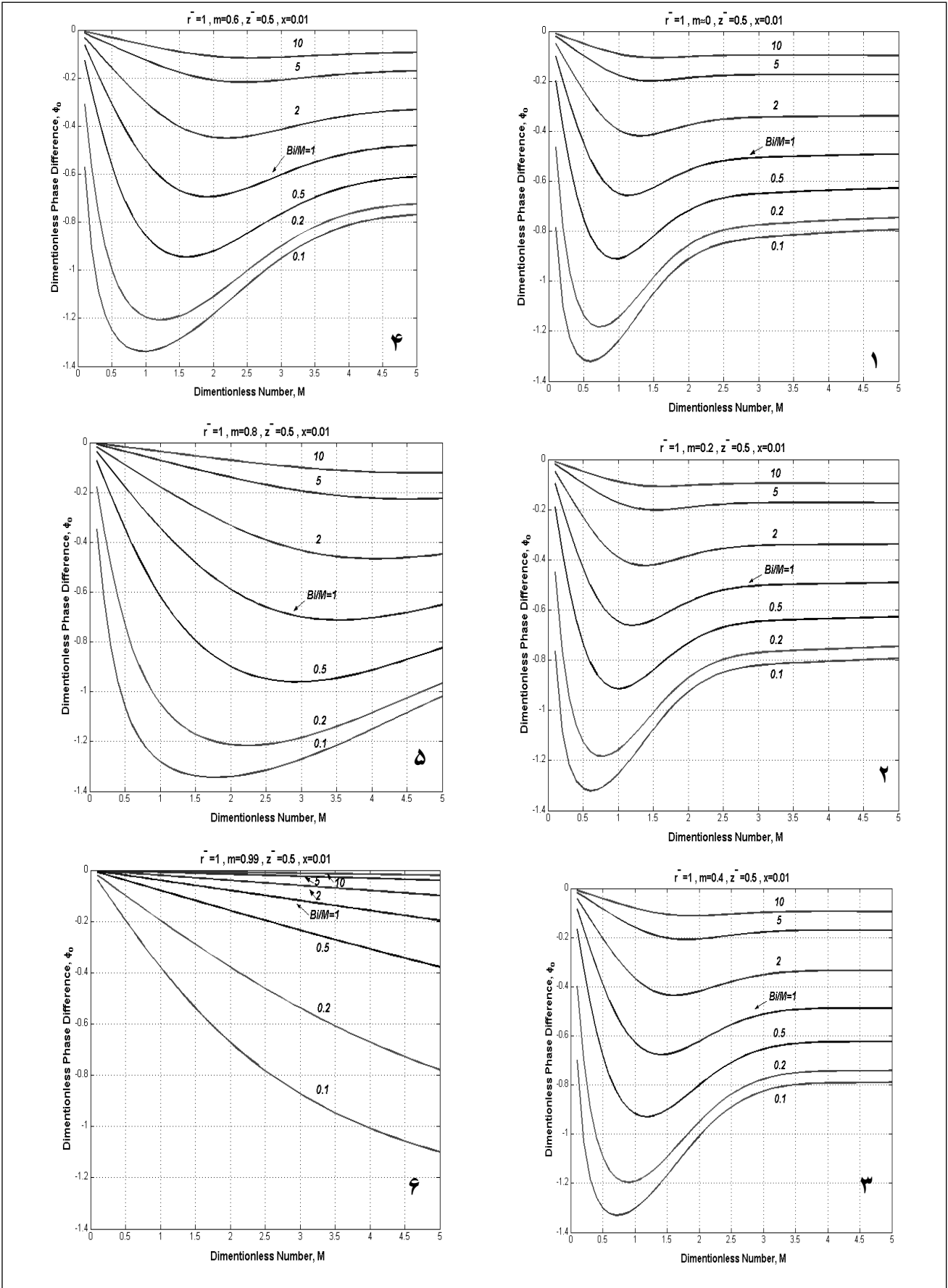
در این مساله $m=0.001, X=0.1, Z=0.5$ می باشد. همچنین شرط مرزی جهت مقایسه با نتایج مرجع [۴]، حالت ساده $\theta_{M_o}(z, t) = (1 + \bar{z})(\theta_{M_o \max} - \bar{\theta}) \sin(2\pi \bar{t})$ در نظر گرفته شده است. طبق رابطه میدان دو بعدی دما بصورت

$$\theta(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (A_{js} (\theta_{M_o \max} - \bar{\theta}) \sin(2\pi \bar{t} + \phi_{js}))$$

در این مقاله میدان دما برای ۲۰۰ جمله از بسط \sum_j و ۲۰۰



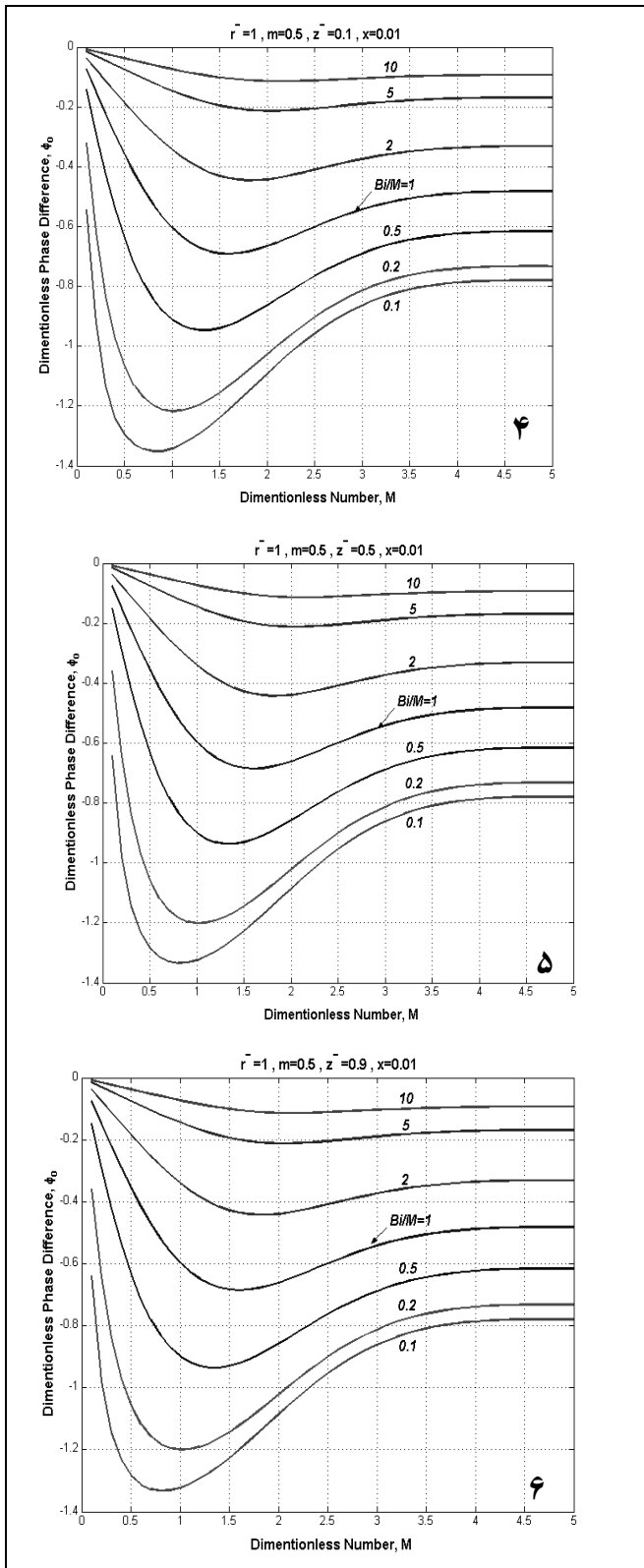
شکل ۱-۵ الی ۶. نمودار تغییرات دامنه بر حسب عدد بی بعد m



شکل ۶-۱ الی ۶-۶. نمودار تغییرات فاز بر حسب عدد بی بعد m

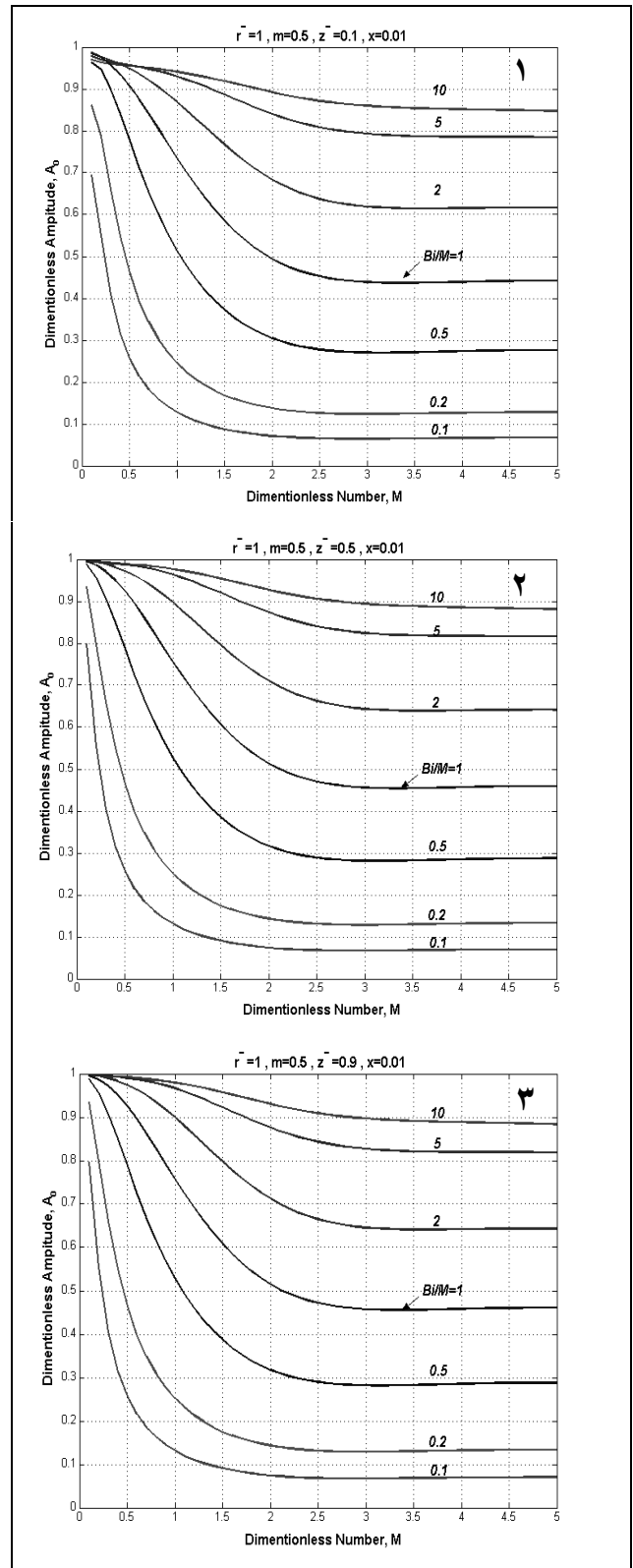
استوانه و در سطح خارجی بدست می آوریم. در حل ذیل $X=0/01$ و $m=0/5$ می باشد.

۲-۴. تاثیر تغییرات Z بر روی میدان دما در این حالت کمیت های دیگر ثابت بوده و میدان دما را در طول



شکل ۴-۱ الی ۴-۳ بررسی تغییرات فاز بر حسب عدد بی بعد

\bar{Z}



شکل ۷-۱ الی ۷-۳ نمودار تغییرات دامنه بر حسب عدد بی بعد

\bar{Z} بعد

$$\frac{Q(\bar{t})}{Q(1)} = \frac{\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (B_{js} (\theta_{M_{o_{\max}}} - \bar{\theta}) \sin(2\pi\bar{t} + \phi_{js}))}{\underbrace{\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (B_{js} (\theta_{M_{o_{\max}}} - \bar{\theta}) \sin(\phi_{js}))}_C} \quad (1.6)$$

با اختصار مخرج کسر با C، به عبارت ذیل برای شار می‌رسیم:

$$\frac{Q(\bar{t})}{Q(1)} = \frac{1}{C} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (B_{js} (\theta_{M_{o_{\max}}} - \bar{\theta}) \sin(2\pi\bar{t} + \phi_{js})) \quad (1.7)$$

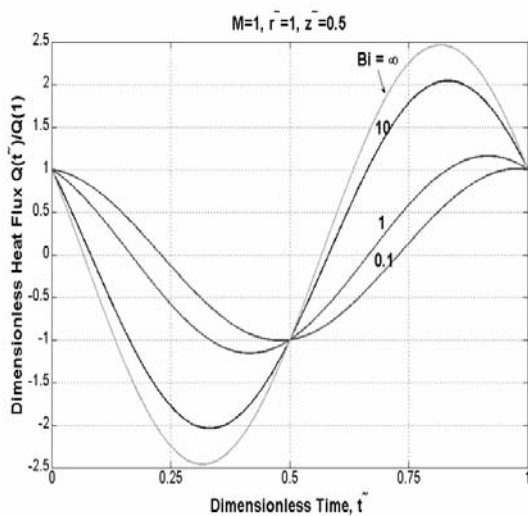
با محاسبه برآیند بردارهای $B_{js} (\theta_{M_{o_{\max}}} - \bar{\theta}) \sin(2n\pi\bar{t} + \phi_{js})$ ، به عبارت ذیل می‌رسیم:

$$\frac{Q(\bar{t})}{Q(1)} = B (\theta_{M_{o_{\max}}} - \bar{\theta}) \sin(2\pi\bar{t} + \phi) \quad (1.8)$$

که در آن:

$$B = \frac{\text{دامنه نوسانات شار حرارتی استوانه}}{\text{دامنه نوسانات دمای محیط خارج}} \quad (1.9)$$

$\phi =$ اختلاف فاز بین شار حرارتی و دمای محیط



شکل ۹. نمودار تغییرات شار بر حسب زمان

۶. بحث و نتیجه گیری

همانطور که مشاهده می‌شود دامنه نوسانات دما در استوانه، هنگامی که Bi/M افزایش می‌یابد به سمت عدد ۱ نزدیک می‌گردد و اختلاف فاز به سمت صفر میل می‌کند. این بدین معنی است که با افزایش عدد بیوت دمای استوانه از محیط اطراف پیروی می‌کند. همچنین در نمودارهای ۵ الی ۸ برای مقادیر کوچک M یعنی تغییرات آهسته دمای محیط این اتفاق می‌افتد. در نمودارهای فوق با افزایش عدد M دامنه و فاز به یک عدد ثابت میل می‌کنند به عبارت دیگر با افزایش عدد M نسبت دامنه و اختلاف فاز مستقل از M می‌گردند.

۵. شار عبوری از استوانه

شار عبوری از استوانه با استفاده از میدان دما طبق رابطه ذیل محاسبه می‌گردد:

$$dQ = \rho C (\theta(0) - \theta(t)) dV \quad (1.00)$$

که در آن:

$$dV = r d\phi dr dz \quad (1.01)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$Q(t) = -\rho C 2\pi \int_{r=r_i}^{r_o} \int_{z=0}^{z=l} \theta(t) r dr dz \quad (1.02)$$

پس از بی بعد سازی رابطه فوق، با استفاده از رابطه (۹۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Q(\bar{t}) &= -2\pi r_o^2 l \rho C \int_{r=m}^1 \int_{z=0}^1 \theta(\bar{t}) \bar{r} d\bar{r} d\bar{z} \\ &= -2\pi r_o^2 l \rho C \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma_s \left[J_1(\mu_j) - \frac{J_1(m\mu_j) Y_1(\mu_j)}{Y_1(m\mu_j)} \right]}{\left[\frac{1}{2} \bar{r}^2 \{ \phi_0^2(\mu_j \bar{r}) + \phi_0^2(\mu_j \bar{r}) \} \right]_m^1} \\ &\quad \cdot \frac{\omega_{js}^2}{w_{0s} \mu_j} \left[\phi_0(\mu_j) \frac{\partial \eta(w_{0s} r)}{\partial r} \Big|_{\bar{r}=1} - \frac{\partial \phi_0(\mu_j r)}{\partial r} \Big|_{\bar{r}=1} \eta(w_{0s}) \right] \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2M^2}{\omega_{js}^2} \right)^2}} (\theta_{M_{o_{\max}}} - \bar{\theta}) \sin(2\pi\bar{t} + \phi_{js}) \right) \end{aligned} \quad (1.03)$$

با اختصار B_{njs} به عنوان ضریب سینوس، رابطه فوق به صورت ذیل خلاصه می‌گردد:

$$Q(\bar{t}) = -2\pi r_o^2 l \rho C \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (B_{js} (\theta_{M_{o_{\max}}} - \bar{\theta}) \sin(2\pi\bar{t} + \phi_{js})) \quad (1.04)$$

همچنین برای $t = T$ یا $\bar{t} = 1$ داریم:

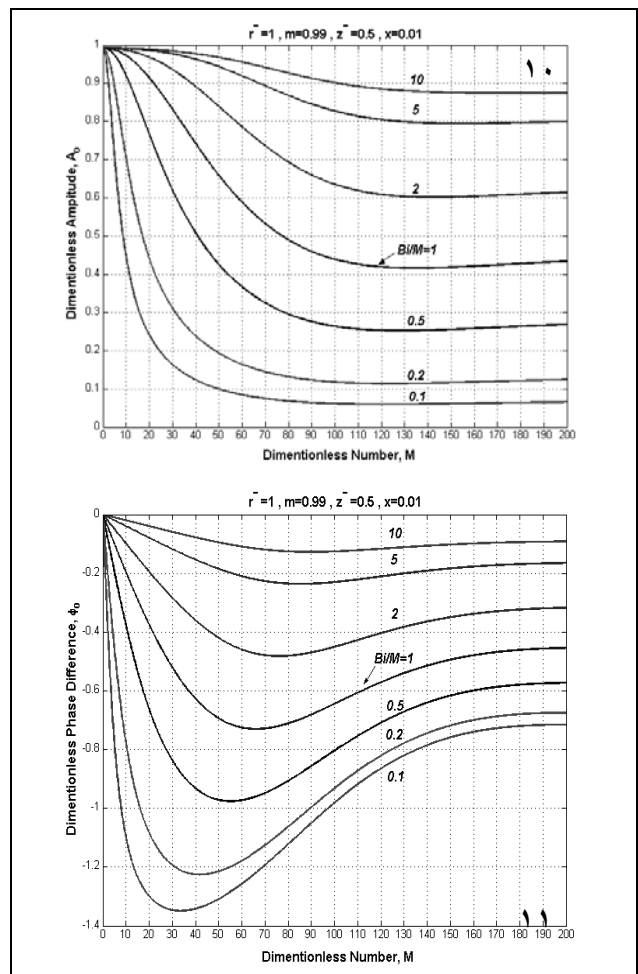
$$Q(1) = -2\pi r_o^2 l \rho C \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (B_{js} (\theta_{M_{o_{\max}}} - \bar{\theta}) \sin(\phi_{js})) \quad (1.05)$$

در نتیجه:

منابع

- [1] Karlekar, B.V., Desmon, R.M., Heat Transfer, 1992.
 [2] Özisik, M.N., *Heat Conduction* (2nd ed), John Wiley, New York, 1993.
 [3] Trostel, R., "*Instationare Warm Espanungen in Einer Hohlkugel*", Engineer-Archiv, 1959, PP. 373-391.
 [4] VDI-Wärmeatlas, Ed 14-17, Düsseldorf, 2003.

همانطور که در نمودارهای ۵-۱ الی ۵-۶ مشاهده می‌گردد، با افزایش عدد m (افزایش شعاع توخالی استوانه)، نسبت دامنه و اختلاف فاز در M های بزرگتری به مقادیر ثابتی می‌رسند. دو نمودار ذیل که همان نمودارهای ۵-۶ و ۶-۶ می‌باشند اینبار برای $[0, 200]$ $M \in$ رسم شده است که گویای این امر می‌باشند. در نمودارهای ۷-۱ الی ۸-۵ مشاهده می‌شود، با آنکه میدان دما در طول استوانه متغیر است، لیکن مقادیر نسبت دامنه و اختلاف فاز تقریباً ثابت می‌باشند. در نمودارهای ۹-۱ الی ۱۰-۴ تغییرات نمودارهای نسبت دامنه و اختلاف فاز، نسبت به X ترسیم شده است.



شکل ۱۰ و ۱۱. نمودار تغییرات دامنه و فاز بر حسب M

نکته قابل توجه در این نمودارها این است که با افزایش نسبت شعاع به طول (X)، به دلیل کوتاه شدن طول استوانه نسبت به شعاع، در M های کوچک (فرکانس های کم) شرایط مرزی قاعده های استوانه بر تغییرات آهسته دمای محیط خارج غلبه می‌کند و دما به سمت صفر میل می‌کند. نمودارهای شار ۱۱ و ۱۲، بیانگر این مطلب می‌باشند که با افزایش عدد m (افزایش شعاع توخالی استوانه)، دامنه شار افزایش می‌یابد و اختلاف فاز به سمت صفر میل می‌کند.