

آنالیز شکست پوسته‌های استوانه‌ای شیاردار تحت اثر انفجار داخلی به روش تحلیلی و شبیه‌سازی عددی

حسین خدارحمی، ناصر دشتیان گرامی و نجمه خضرائیان

چکیده: در این مقاله، روشی برای تحلیل شکست دینامیکی استوانه‌های شیاردار در اثر انفجار خرج میانی شدیدالانفجار (HE) برای تعیین زمان شکست، شعاع شکست، سرعت و شتاب ترکش ارائه و با استفاده از کد صریح و غیر خطی LS-DYNA شکست دینامیکی استوانه‌های شیاردار متأثر از انفجار خرج میانی شبیه‌سازی عددی شده است. در شبیه‌سازی عددی از مدل‌های مادی جانسون-کوک و شدیدالانفجار، و معادلات حالت مای-گرونیزن و JWL استفاده شده است. نتایج تحلیلی و عددی با نتایج حاصل از تعمیم مدل تیلور در تعیین پارامترهای مورد نظر برای استوانه‌های شیاردار مقایسه شده و موارد اختلاف سه روش و همچنین اثر پارامترهای مختلف مادی و هندسی پوسته و خرج بر روی زمان شکست و سرعت ترکش بحث و بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: استوانه شیاردار، بارگذاری انفجاری، شکست، شبیه‌سازی عددی، LS-DYNA

۱. مقدمه

فرآیند شکست و ترکش شدن پوسته متأثر از انفجار خرج داخلی در چهار مرحله صورت می‌گیرد. ابتدا پوسته در جهت شعاعی منبسط می‌شود، پس از آن شکست سطح خارجی بصورت ترک هایی که بسمت سطح داخلی پوسته رشد می‌کنند توسعه می‌یابد. محصولات گاز انفجار در هنگام جریان در داخل ترک ها باعث برجستگی منفذ عبور گاز انفجار می‌شوند. و در نهایت با گسترش منافذ عبور گاز شکست اتفاق می‌افتد. پوسته تا هنگامیکه فشار داخلی بیشتر از استحکام تسلیم پوسته شود، منبسط می‌گردد. در نهایت در اثر فشار بسیار بالای اعمالی منافذ عبور گاز گسترش یافته و پوسته به ترکش تبدیل می‌شود [۴]. از سال ۱۹۴۰ محققان زیادی شکست پوسته های استوانه ای تحت اثر بارگذاری گذرا را مورد مطالعه و تحقیق قرار

این مقاله در تاریخ ۸۳/۵/۱۲ دریافت و در تاریخ ۸۴/۲/۱۷ به تصویب نهایی رسیده است.

دکتر حسین خدارحمی، استادیار، دانشکده علوم و مهندسی، دانشگاه امام حسین(ع). hossein_khodarahmi@yahoo.com

ناصر دشتیان گرامی، کارشناس ارشد، دانشکده علوم و مهندسی، دانشگاه امام حسین(ع). m_gerami@ofogh.net

نجمه خضرائیان، کارشناس ارشد، دانشکده علوم و مهندسی، دانشگاه امام حسین(ع). n_khazra@dr.com

داده‌اند و این موضوع در زمینه های مختلف نظامی و صنعتی کاربرد پیدا کرده است. مدل های نظری و آزمایشگاهی برای تشریح مکانیزم و شرایط شکست سازه ها تحت اثر بارگذاری انفجاری ارائه شده است. تیلور معیار شکستی را پیشنهاد نمود که بر اساس آن شکست نهایی بدنه پوسته ناشی از گسترش شعاعی ترک است. در معیار تیلور عمق ترک تابعی از تنش تسلیم، ضخامت پوسته و فشار انفجار است [۵]. ایوانف برای مواد ویسکو-الاستو-پلاستیک یک معیار انرژی پیشنهاد کرد [۶]. او فرض نمود که انرژی لازم برای شروع ترک و رشد آن برابر انرژی کرنش الاستیک رها شده از برداشتن امواج الاستیک است. معیار او بر اساس کرنش شکست و نرخ آن می باشد، زیرا شکست-های قابل توجه یا ماکرو شکست در اثر شکل گیری، رشد و همگرا شدن آسیب های ریز (مثلا حفره ها یا ترک های ریز) بوجود می آید. هوگات-ریجت^۱ [۷] با استفاده از روشی مشابه روش تیلور فشار لازم برای شروع تسلیم و شعاع تسلیم پلاستیک را بر اساس شعاع لحظه ای پوسته در حال انبساط محاسبه نمودند. در این محاسبات اثرات کار سختی نیز لحاظ شده است. الحسنی و جانسون^۲ مدل تیلور را برای پوسته های کروی نازک تعمیم دادند [۸]. آنها رابطه ای بدست آوردند که بر اساس آن شعاع شکست بر حسب نرخ کرنش، چگالی،

¹ Hoggatt-Recht

² Alhassani-Johnson

نمی‌گیرد، ولی با این وجود اغلب محققین در کارهای تحلیلی به روابط تیلور رجوع می‌نمایند. در این تحقیق نیز، روابط تیلور و نتایج تحقیقات کوسماتکا^۶ [۱۴] در تعیین ضریب تمرکز تنش شیار و همچنین استفاده از روابط تنش دینامیکی، اثرات کارسختی و در نهایت تلفیق آنها مبنای کار تحلیلی و ارائه روشی نو در تحلیل شکست پوسته‌های استوانه‌ای شیاردار قرار گرفته است.

۲. روابط اساسی

تحلیلی که در اینجا صورت می‌گیرد مربوط به آغاز پروسه انفجار در پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم می‌باشد و هدف بدست آوردن پارامترهایی از قبیل شعاع شکست، فشار لازم انفجار برای شروع شکست، سرعت وشتاب ترکش و در نهایت زمان شکست برای پوسته‌های استوانه‌ای شیاردار می‌باشد.

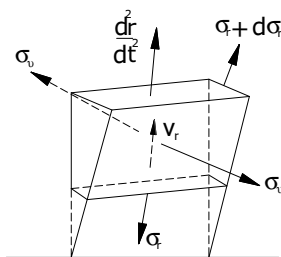
برای المانی از یک پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم (شکل ۱) تحت فشار داخلی P_a ، معادله تعادل دینامیکی شعاعی بصورت زیر است:

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \rho \frac{dV_r}{dt} \quad (1)$$

که در آن ρ , V_r , σ_θ , σ_r به ترتیب تنش شعاعی، تنش محیطی، سرعت شعاعی و چگالی پوسته می‌باشد. بکارگیری روابط حجم ثابت برای المان فوق می‌دهد:

$$r_{of}^2 - r_{if}^2 = r_{oo}^2 - r_{io}^2 \quad (2)$$

که r_{of} , r_{if} , شعاع خارجی و داخلی در لحظه شکست، r_{oo} شعاع خارجی اولیه و r_{io} شعاع داخلی اولیه می‌باشد.



شکل ۱. المانی از یک پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم

با مشتق‌گیری نسبت به زمان از رابطه (۲) بدست می‌آید:

$$r_{of} V_o = r_{if} V_o = r V_r \quad (3)$$

که در آن V_o سرعت شعاعی در زمان شکست می‌باشد. همچنین طبق معیار شکست ترسکا برای شکست دینامیکی می‌توان نوشت:

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_D \quad (4)$$

ضخامت پوسته و نمای انبساط آدیاباتیک بیان می‌شود. در رابطه ایشان وابستگی شعاع شکست به نرخ کرنش کمی ضعیف بیان شده است. جائو چونگینگ و همکارانش^۱ بر اساس ایجاد و رشد حفره در پوسته متأثر از بار انفجاری برای مواد با رفتار ویسکو پلاستیک با کار سختی، معیار آسیبی را برای تعیین شعاع و زمان شکست ارائه دادند [۹]. جائو و شفرده^۲ با اعمال ضریب افزایشی دینامیکی در معادلات حاکم، شکست پوسته‌های متأثر از بار انفجاری حاصل از انفجارات گازی را بر اساس روش‌های تنش تسلیم، روش انرژی و همچنین روش ضریب شدت تنش استاتیکی بصورت تحلیلی و تجربی مورد مطالعه و بررسی قرار دادند [۱۰]. دشتیان، خداحمی و میرجلیلی عکس العمل سازه‌ای پوسته‌های استوانه‌ای را تحت اثر بارگذاری انفجاری گازی بصورت تحلیلی و عددی مورد بررسی قرار دادند [۱۱]. منجیت سینگ و همکارانش^۳ مطالعات آزمایشگاهی جامعی بر روی تغییر شکل شعاعی و کرنش گسیختگی استوانه‌های آلومینیومی و مسی با قطر و ضخامت مختلف تحت بار ناشی از انفجار خرج میانی (با نرخ کرنش بالا) انجام دادند [۱۱].

علاوه بر پدیده شکست پوسته‌های متأثر از انفجار خرج میانی موارد دیگری نیز از جمله سرعت و شکل ترکش بسیار مورد توجه محققین قرار گرفته است.

ویلسون و همکارانش^۴ فرآیند ترکش‌زایی طبیعی و مشخصات ترکش‌ها را در پوسته‌های استوانه‌ای متأثر از انفجار خرج میانی با روش‌های عددی و تجربی مورد مطالعه قرار دادند [۱۲]. همچنین ژانگ و همکارانش^۵ با ارائه یک مدل تحلیلی ارتباط بین سرعت اولیه ترکش و شدت موج شوک ناشی از انفجار داخلی را برای ضخامت‌های مختلف پوسته مورد بررسی قرار دادند [۱۳].

فرآیند شکست سازه‌های پوسته‌های تحت بارگذاری انفجاری بسیار پیچیده است و با تمام تحقیقات و مطالعات انجام شده بر روی این موضوع هنوز هم مکانیزم واضح و روشنی در مورد آن وجود ندارد. از ویژگی‌های کلی فرآیند شکست می‌توان به دو مورد زیر اشاره نمود:

۱- ضخامت و شکل سازه پوسته در فرآیند شکست دینامیکی بسیار مهم است. برای پوسته‌های نازک، ترک بطور ناگهانی از خارج بسمت داخل سازه گسترش می‌یابد. اگر شیارهایی از قبل در سطح پوسته ایجاد شده باشد، این ترک‌ها در امتداد شیارها گسترش می‌یابند.

۲- هرچند در فرآیند شکست دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای تحت اثر بارگذاری انفجاری عوامل زیادی مؤثرند، اما تغییر شکل‌های بزرگ و نرخ کرنش بالا دو عامل بسیار مهم می‌باشند.

معادلات تیلور اگرچه پاره‌ای از عوامل مؤثر بر روی شکست پوسته تحت اثر انفجارات داخلی، از جمله دما و کار پلاستیک را در نظر

¹ GAO Chongyang et al

² Chao-Shepherd

³ Manjit Singh et al

⁴ Wilson et al

⁵ Zhang et al

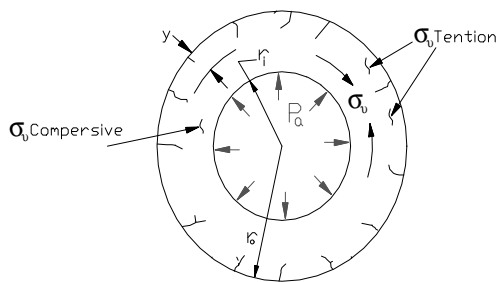
⁶ Kosmatka

با استفاده از معادله (۱۰) مقدار تنش محیطی در هر شعاع دلخواه قابل محاسبه می‌باشد.

همچنین با توجه به این نکته که در $r = r_{of}$, $\sigma_r = 0$ است، یعنی در سطح بیرونی پوسته تنش شعاعی وجود ندارد، با استفاده از رابطه (۹) فشار بصورت زیر در می‌آید:

$$P_a = \left[\sigma_D + \rho (V_o^2 + r_{if} \dot{V}_o) \right] \ln \frac{r_{of}}{r_{if}} + \frac{1}{2} \rho r_{if}^2 V_o^2 \left(\frac{1}{r_{of}^2} - \frac{1}{r_{if}^2} \right) \quad (11)$$

دو منطقه تنش کششی و فشاری در داخل جداره وجود دارد که در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲. دو منطقه تنش در داخل دیواره

در مرز بین این دو ناحیه $\sigma_\theta = 0$ می‌باشد و همان طوری که در شکل مشاهده می‌شود عمق y که مربوط به فاصله شعاعی منطقه کششی از سطح بیرونی پوسته می‌باشد، عبارت است از:

$$y = r_{of} - r \quad (12)$$

حال برای اینکه تحت تاثیر فشار داخلی P_a شکست کامل اتفاق بیافتد، لازم است که این فاصله با ضخامت دیواره h برابر باشد. عبارتی تمام ضخامت دیواره تحت تاثیر تنش کششی قرارگیرد:

$$y = r_{of} - r = h \quad (13)$$

اگر شرط بدست آمده فوق در رابطه (۹) قرار داده شود، پس از ساده‌سازی رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$P_a = \sigma_D \quad (14)$$

رابطه (۱۴) شبیه رابطه‌ای است که تیلور برای استوانه‌ای جدارضخیم تحت بارگذاری انفجاری بدست آورد، با این تفاوت اصلی که در رابطه تیلور از تنش تسلیم استاتیکی σ_y استفاده شده است. با توجه به رابطه (۱۴) شکست کامل زمانی اتفاق می‌افتد که فشار داخلی برابر تنش تسلیم دینامیکی ماده گردد. همانطوریکه اشاره شد فشار در هر لحظه متغیر می‌باشد. لذا ابتدا بایستی فشاری که در آن شکست اتفاق

که در آن σ_D تنش تسلیم دینامیکی است و مقدار آن بر حسب تنش تسلیم استاتیکی بصورت زیر توسط Cowper-Simond داده شده است [۱۵].

$$\sigma_D = \sigma_y \left[1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{D'} \right)^q \right] \quad (5)$$

که در آن $\dot{\epsilon}$ نرخ کرنش و D' , q ثابت های مادی‌اند. با مشتق گیری از V_r نسبت به زمان شتاب بدست می‌آید:

$$\frac{dV_r}{dt} = \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} \quad (6)$$

زیرا سرعت هر ترکش در هر لحظه تابع شعاع و زمان در لحظه شکست می‌باشد. با استفاده از رابطه (۳) می‌توان مقدار V_r ، سرعت شعاعی در شعاع r را برحسب شعاع داخلی و نیز سرعت ترکش در آن شعاع بدست آورد:

$$V_r = \frac{r_{if} V_o}{r} \quad (7)$$

حال اگر مقدار V_r بدست آمده از رابطه (۷) در رابطه (۶) قرار داده شود به کمک روابط (۴) و (۱)، و پس از انتگرال گیری در نهایت رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\sigma_r = \left[\sigma_D + \rho (V_o^2 + r_{if} \dot{V}_o) \right] \ln r + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{r_{if}}{r} \right)^2 V_o^2 + C \quad (8)$$

در رابطه فوق C ثابت انتگرال گیری است که با اعمال شرایط مرزی زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_r)_{r=r_{if}} = -P_a$$

لذا معادله (۸) خواهد شد:

$$\sigma_r = -P_a + \left[\sigma_D + \rho (V_o^2 + r_{if} \dot{V}_o) \right] \ln \frac{r}{r_{if}} + \frac{1}{2} \rho r_{if}^2 V_o^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_{if}^2} \right) \quad (9)$$

با استفاده از معادله (۹) می‌توان مقدار تنش شعاعی را در هر شعاع دلخواه بدست آورد. با توجه به اینکه در رابطه فوق P_a فشار داخلی می‌باشد و این فشار در هر لحظه متفاوت است، لذا در هر شعاعی فشار داخلی نیز بایستی بدست آید. از رابطه فوق به تنهایی نمی‌توان استفاده نمود. جهت یافتن تنش شعاعی و فشار داخلی نیاز به داشتن روابط دیگری نیز می‌باشد. با استفاده از معادلات (۴) و (۲) خواهیم داشت:

$$\sigma_\theta = \sigma_D - P_a + \left[\sigma_D + \rho (V_o^2 + r_{if} \dot{V}_o) \right] \ln \frac{r}{r_{if}} + \frac{1}{2} \rho r_{if}^2 V_o^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_{if}^2} \right) \quad (10)$$

با حل این معادله درجه دوم، t بدست می‌آید. با محاسبه زمان رسیدن موج به انتها و یا سطح داخلی پوسته، و اضافه نمودن آن به مقدار فوق زمان کلی شکست حاصل می‌شود، یعنی:

$$t_T = t + t_w \quad (22)$$

که در آن t_w ، زمان رسیدن موج انفجار به سطح داخلی پوسته، از رابطه $t_w = \frac{L}{V_{CJ}}$ بدست می‌آید. که در آن L فاصله مرکز انفجار تا سطح داخلی و V_{CJ} سرعت چاپمن-جوینگت ماده منفجره می‌باشد.

۳. اثرات شیار

با ایجاد شیار، تغییرات ناگهانی در هندسه سبب تمرکز تنش شده و شکست اولیه در بدنه از این محل‌ها آغاز می‌شود. تاکنون تست‌ها و تحلیل‌های عددی زیادی برای تعیین ضریب تمرکز تنش در شیار انجام شده و این ضریب در شیارهای مختلف V و U شکل بصورت تابعی از ابعاد شیار ارائه شده است. از آن جمله می‌توان به فعالیت‌های کوسماتکا [۱۴] اشاره نمود. وی با تغییر نسبت عمق شیار به ضخامت بدنه ضریب تمرکز تنش را بصورت تحلیلی و عددی محاسبه نمود. با اعمال این ضریب در معادله (۱۶) و روابط پس از آن می‌توان روابط را برای استوانه‌های شیاردار توسعه داد. شعاع شکست پس از اعمال ضریب تمرکز تنش شیار بصورت زیر در می‌آید:

$$r_{if} = r_{io} \left[\frac{K P_e}{\sigma_y \left(1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{D'} \right)^{\frac{1}{q}} \right)} \right]^{\frac{1}{2\gamma}} \quad (23)$$

که در آن K ضریب تمرکز تنش شیار استوانه می‌باشد. با استفاده از روابط فوق برنامه‌ای کامپیوتری برای محاسبه شعاع شکست، زمان شکست، سرعت ترکش و... در پوسته‌های استوانه‌ای شیاردار تهیه شده و بر روی نتایج خروجی این برنامه در قسمت‌های بعدی بحث می‌شود.

۴. شبیه سازی عددی

شبیه‌سازی به روش اجزاء محدود با استفاده از کد LS-DYNA انجام شده است. در مرحله اول ساخت مدل پوسته شیاردار و خرج انفجاری داخل پوسته و شیارهای آن با استفاده از پیش پردازنده FEMB (مدل ساز المان محدود) و در مرحله دوم تحلیل دینامیکی غیرخطی و سپس پس پردازش نتایج تحلیل با استفاده از پردازنده Post-GL برای تفسیر نتایج انجام شده است.

می‌افتد بدست آید. برای این کار می‌توان از رابطه آیزنتروپیک مطابق زیراستفاده نمود [۴]:

$$P_a = P_e \left(\frac{r_{if}}{r_{io}} \right)^{-2\gamma} = P_e \dot{\epsilon}^{-2\gamma} \quad (15)$$

که در آن P_a فشار داخلی در شعاع r_{if} ، P_e فشار انفجاری مواد منفجره و γ نمای انبساط آدیاباتیک می‌باشد. مقدار γ حداقل ۱/۹ و حداکثر ۵ است و مقدار بهینه آن که با استفاده از نتایج تجربی بدست آمده ۳ می‌باشد. با استفاده از روابط (۱۴) و (۱۵) خواهیم داشت:

$$\dot{\epsilon} = \left(\frac{r_{if}}{r_{io}} \right) = \left(\frac{P_e}{\sigma_D} \right)^{\frac{1}{2\gamma}} \quad (16)$$

با استفاده از روابط (۱۶) و (۱۵) معادله حاصل بصورت زیر می‌باشد:

$$\dot{\epsilon}^{2\gamma} \left[1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{D'} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \frac{\sigma_y}{P_e} - 1 = 0 \quad (17)$$

در رابطه بالا مقادیر P_e ، σ_D ، γ ، D' ، q معلوم هستند و تنها مقدار مجهول $\dot{\epsilon}$ می‌باشد. با مشخص شدن $\dot{\epsilon}$ از رابطه (۱۶) می‌توان r_{if} و با استفاده از رابطه (۱۵) مقدار P_a را بدست می‌آید. برای بدست آوردن شتاب و سرعت ترکشها با استفاده از رابطه (۱۱) و انجام ساده سازی در نهایت رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{V}_o = \frac{P_a - \sigma_D \ln \frac{r_{of}}{r_{if}}}{\rho r_{of} \ln \frac{r_{of}}{r_{if}}} - \left(\frac{1}{r_{of}^2} - \frac{r_{if}^2 - r_{of}^2}{2 r_{if}^2 r_{of} \ln \frac{r_{of}}{r_{if}}} \right) V_o^2 \quad (18)$$

اگر معادله حرکت را برای جداره استوانه بنویسیم [۲]:

$$P_a \times (2\pi r_{if}) = \rho \pi (r_{oo}^2 - r_{io}^2) \times \dot{V}_o \quad (19)$$

که در آن P_a فشار داخلی در شعاع r_{if} و ρ چگالی ماده است. از رابطه اخیر شتاب \dot{V}_o و با جایگذاری در رابطه (۱۸)، V_o سرعت ترکشها بدست می‌آید.

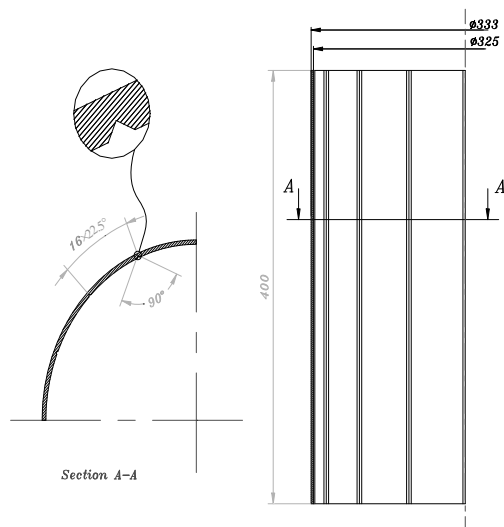
برای بدست آوردن زمان شکست با فرض شتاب ثابت خواهیم داشت:

$$\Delta r = \frac{1}{2} \dot{V}_o t^2 + V_o t \quad (20)$$

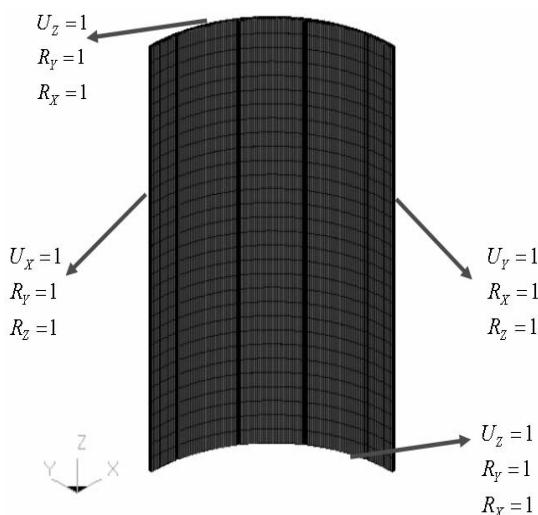
که در آن $\Delta r = r_{if} - r_{io}$ تغییرات شعاع، \dot{V}_o شتاب و V_o سرعت می‌باشند. بعد از مرتب نمودن رابطه فوق داریم:

$$\dot{V}_o t^2 + 2V_o t - 2\Delta r = 0 \quad (21)$$

محوری مدل‌سازی و تحلیل نمود وجود ندارد، ولی با توجه به وجود تقارن صفحه‌ای برای صرفه جویی در وقت و حافظه می‌توان یک چهارم آنرا مدل‌سازی و تحلیل نمود.



شکل ۳. هندسه پوسته استوانه ای شیاردار



شکل ۴. مدل اجزاء محدود و شرایط مرزی پوسته

در شکل ۴ نحوه المان بندی نشان داده شده است. المان بندی پوسته با چهارالمان در جهت ضخامت، ۱۴۴ المان در طول کمان ۹۰ درجه‌ای و ۳۰ المان در جهت طولی صورت گرفته است. با توجه به تمرکز تنش در شیارها، المان بندی اطراف شیار، ریزتر شده است. تعداد کل المان‌های پوسته برابر ۱۷۲۸۰ المان می‌باشد. نوع المان بکار رفته در پوسته از نوع المان حجمی هشت گره‌ای انتخاب شده است. ضخامت المانهای پوسته یک میلی‌متر می‌باشد و ابعاد دیگر المانها نیز با در نظر گرفتن همگرایی و صرفه جویی در هزینه محاسبات انتخاب شده است. در شکل ۵ المان بندی خرج میانی نشان داده شده است. تعداد کل المانهای خرج ۲۸۸۰۰ المان می‌باشد.

۴-۱. روش آسیب در تحلیل شکست پوسته

از آنجائیکه بارگذاری انفجاری از ماهیت دینامیکی بسیار بالا و همراه با تغییرات شدید دما، نرخ کرنش و فشار همراه می‌باشد، در اینجا از مدل مادی جانسون-کوک استفاده شده است. این مدل مادی تنش تسلیم را بصورت تابعی از کرنش پلاستیک، نرخ کرنش و دما بصورت زیر بیان می‌کند [۱۶و۴]:

$$\bar{\sigma}_y = [A + B(\bar{\epsilon}^P)^N] [1 + C \ln(\dot{\epsilon}^*)] [1 - (T^*)^M] \quad (24)$$

که در آن M, N, C, B, A ثابت‌هایی هستند که با استفاده از نتایج تجربی بدست می‌آیند و $\bar{\epsilon}^P$ کرنش پلاستیک موثر، $\dot{\epsilon}^*$ نرخ کرنش بدون بعد و T^* دمای بدون بعد بوده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$T^* = (T - T_{ref}) / (T_{melt} - T_{ref}) \quad (25)$$

که در آن T_{ref} دمای محیط و T_{melt} دمای ذوب ماده مورد نظر می‌باشد. در این مدل آسیب دیدگی المان توسط پارامتری بنام D بشکل زیر تعریف می‌شود:

$$D = \sum \frac{\Delta \bar{\epsilon}^P}{\epsilon_f} \quad (26)$$

که در آن $\Delta \bar{\epsilon}^P$ نمو کرنش پلاستیک معادل و ϵ_f کرنش شکست است. وقتی مجموع نموهای کرنش پلاستیک پارامتر D را به عدد یک برساند، معرف آسیب کامل یا شکست المان است. کرنش شکست ϵ_f بر حسب تنش، نرخ کرنش و درجه حرارت بصورت زیر تعریف می‌شود [۱۶]:

$$\epsilon_f = [d_1 + d_2 \exp(d_3 \sigma^*)] [1 + d_4 \ln(\dot{\epsilon}^*)] [1 + d_5 T^*] \quad (27)$$

که در آن $\sigma^* = p / \bar{\sigma}$ است که p فشار و $\bar{\sigma}$ تنش موثر و از معادله $\bar{\sigma} = (\frac{3}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij})^{\frac{1}{2}}$ محاسبه میشود و σ_{ij} مؤلفه‌های تانسور تنش است.

۴-۲. تشریح مدل اجزا محدود

در شکل ۳ هندسه پوسته استوانه ای شیار دار نشان داده شده است. در تحلیل های اولیه از پوسته‌ای با شعاع داخلی ۱۶۲/۵ میلی‌متر، شعاع خارجی ۱۶۶/۵ میلی‌متر و طول ۴۰۰ میلی‌متر استفاده شده است. هندسه شیار نیز به دو صورت V و U شکل در نظر گرفته شده است. در شکل ۳ هندسه شیار V شکل نمایان است. تعداد شیارهای طولی در مدل کامل شانزده شیار می‌باشد. از آنجا که پوسته موردنظر دارای شیارهای طولی است امکان اینکه بتوان آنرا بصورت متقارن

۴-۳. مدل‌های مادی

مدل‌های مادی در نرم افزار LS-DYNA در حقیقت معادلات مشخصه‌ای هستند که بیانگر رفتار تنش-کرنش مواد می‌باشد.

در تحلیل عددی حاضر از مدل مادی جانسون-کوک (MAT15-Johnson/Cook- Plasticity Model) برای پوسته و مدل مادی شدیدالانفجار (MAT8-High Explosive Burn) برای

خرج استفاده شده است. مدل‌های مادی مورد استفاده در تحلیل عددی نیازمند ثابت‌هایی می‌باشند که بصورت تجربی حاصل می‌شوند. ثابت‌های مورد استفاده در تحلیل‌های عددی در جدول ۱ برای مدل مادی جانسون-کوک و در جدول ۲ برای مدل مادی شدیدالانفجار ارائه شده است [۱۶].

جدول ۱. خواص مدل مادی جانسون-کوک در تحلیل عددی شکست پوسته

مقدار کمیت	علامت ویژه	خواص ماده
7800E-12(ton/mme3)	Ro	Mass density
80000 (MPa)	G	Shear moduls
210000(MPa)	E	Young moduls
0.3	PR	Poisson Ratio
570(MPa)	A	Johnson-Cook-Constant
250(MPa)	B	Johnson-Cook-Constant
0.36	N	Johnson-Cook-Constant
0.022	C	Johnson-Cook-Constant
1.0	M	Johnson-Cook-Constant
1811(K)	TM	Melt temperature
300(K)	TR	Room temperature
452E6	CP	Specific heat
-1E20	PC	Failure stress or pressure cutoff
1.45	D1	Failure parameter
3.5	D2	Failure parameter
-0.54	D3	Failure parameter
0.015	D4	Failure parameter
0.0	D5	Failure parameter

جدول ۲. خواص مدل مادی شدیدالانفجار در تحلیل عددی شکست پوسته

مقدار کمیت	علامت ویژه	خواص ماده
1601e-12(ton/mme3)	Ro	Mass density
8190e3(mm/s)	Dcj	Detonation velocity
28000(MPa)	Pcj	Chapman-Jouget pressure

۴-۴. معادلات حالت

علاوه بر معادلات اساسی بقاء که شامل معادلات بقاء جرم، بقای اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای و بقای انرژی است، در مسائلی که با تنش یا فشار شدید و تغییر حجم همراه باشند، به معادله‌ای که رابطه بین خصوصیات ترمودینامیکی ماده (مثل فشار، جرم حجمی و دما) را بدهد، نیاز می‌باشد. در تحلیل عددی حاضر از معادله حالت می-گرونیزن برای فلز پوسته و JW (جونز-ویلکنز-لی) برای خرج انفجاری استفاده شده است. ارتباط بین فشار، چگالی و انرژی برای

مواد پوسته بوسیله معادله حالت می-گرونیزن (Mie-Gruneisen) بصورت زیر بیان می‌شود:

$$P = \frac{\rho_0 C^2 \bar{\mu} \left\{ 1 + \left[1 - \left(\frac{\gamma_0}{2} \right) \right] \bar{\mu} - \left(\frac{a}{2} \right) \bar{\mu}^2 \right\}}{\left[1 - (S_1 - 1) \bar{\mu} - S_2 \frac{\bar{\mu}^2}{\bar{\mu} + 1} - S_3 \frac{\bar{\mu}^3}{(\bar{\mu} + 1)^2} \right]} + (\gamma_0 + a \bar{\mu}) E \quad (28)$$

در معادله فوق S_1 ، S_2 ، S_3 ضرایب معادله U_S بر حسب U_P است، که سرعت موج شاک و U_P سرعت ذره می‌باشد [۱۶]:

$$U_S = C + S_1 U_P + S_2 U_P^2 + S_3 U_P^3 \quad (29)$$

این معادله حالت ارتباط بین فشار، حجم و انرژی داخلی را بیان می‌نماید. این معادله بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$P = A \left(1 - \frac{\omega}{R_1 V'} \right) e^{-R_1 V'} + B \left(1 - \frac{\omega}{R_2 V'} \right) e^{-R_2 V'} + \frac{\omega}{V'} E \quad (31)$$

که در آن ρ چگالی جاری و ρ_0 چگالی اولیه است. معادله حالت JWL نیز معمولا برای تشریح رفتار محصولات انفجار مواد منفجره سرعت بالا مورد استفاده قرار می‌گیرد.

و E انرژی اولیه داخلی، a ضریب تصحیح حجمی، γ_0 ضریب گرونینز و C سرعت صوت حجمی است. مقدار $\bar{\mu}$ بصورت زیر بیان میشود:

$$\bar{\mu} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) - 1 \quad (30)$$

جدول ۳. ضرایب معادله حالت مای-گرونینز

نوع ماده	C	S1	S2	S3	GAMA
Steel	3600000.0	1.9	0.0	0.0	1.7

جدول ۴. ضرایب معادله حالت JWL

نوع ماده منفجره	A	B	R1	R2	OMEGA
Comp C-4	609800	12950	4.5	1.4	0.28

زمانی باید کوچکتر از زمان گذر موج تنش از کوچکترین اجزاء شبکه بندی شده باشد ($\Delta t \leq \frac{l}{v}$) که در آن l کوچکترین بعد المانها و v سرعت موج است. در مسائلی مثل برخورد و نفوذ پرتابه یا بارگذاری انفجاری روی سازه‌ها که تغییر شکل‌های بزرگ روی می‌دهد، مقدار گام زمانی Δt در طول شبیه‌سازی تغییر می‌نماید. Δt بصورت $\Delta t = \alpha \frac{l}{v}$ تعریف می‌شود که در آن α همان ضریب مقیاس گام زمانی است که معمولا عددی کمتر از ۰/۹ فرض می‌شود [۱۷]. در تحلیل عددی شکست پوسته، α برابر ۰/۴ در نظر گرفته شده است. کل بازه زمانی ۱۰۰ میکرو ثانیه و گام زمانی برای رسم فایل‌های گرافیکی نیز ۱ میکرو ثانیه فرض شده است.

۵. ارائه نتایج و بحث

در این قسمت ضمن ارائه بعضی از نتایج بدست آمده، مقایسه‌ای بین نتایج تحلیلی و شبیه‌سازی عددی، صورت پذیرفته و اثرات بعضی از پارامترهای مادی و هندسی پوسته و خرج، بر روی زمان شکست، سرعت ذرات و... بررسی می‌شود.

تعریف شکست پوسته: با توجه به مدل مادی انتخاب شده برای پوسته و قابلیت شکست و حذف المانها در اثر کرنش‌های پلاستیک زیاد، در حین بارگذاری انفجاری بر روی پوسته، المان‌های متعددی در نقاط مختلف دچار شکست می‌شوند. ولی شکست پوسته در نقطه‌ای فرض می‌شود که همه المانهای موجود در ضخامت دچار شکست شده و حذف شوند. به عبارت دیگر مسیر عبور گازهای ناشی از انفجارات

۵-۴. شرایط مرزی و اولیه

با توجه به ماهیت مسئله و تقارن موجود برای مدل، یک چهارم پوسته (شکل ۴) مدل شده است. شرایط مرزی تقارن نسبت به صفحات XZ و XY برای مرزهای طولی مدل در نظر گرفته شده، و برای لبه‌های بالا و پایین تغییر مکان محوری U_z ، دوران‌های R_x ، R_y بسته شده اند. برای خرج نیز در سطوح جانبی از شرط تقارن نسبت به صفحات XZ و XY استفاده شده است. تنها شرط اولیه، تعریف چاشنی^۱ یا محل شروع انفجار در وسط خرج در مختصات (۲۰۰ و ۰ و ۰) است.

۶-۴. تعریف نوع و فصول مشترک تماس

برای تعامل بین خرج و پوسته باید سطوح تماس بین آن دو تعریف شود.

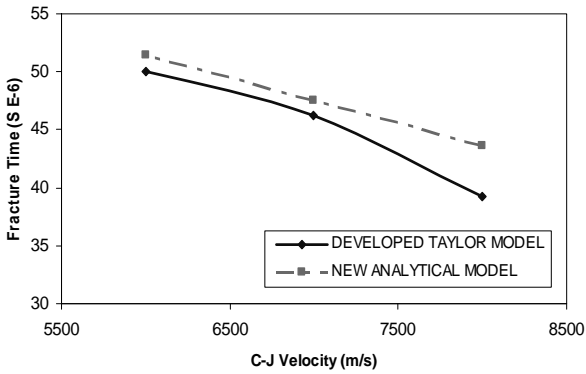
در این تحلیل تماس بین خرج و پوسته از نوع سطح به سطح (CONTACT-SURFACE-TO-SURFACE) انتخاب شده است. در این تماس پوسته ضربه خور و خرج ضربه‌زن می‌باشد.

۷-۴. پارامترهای کنترلی

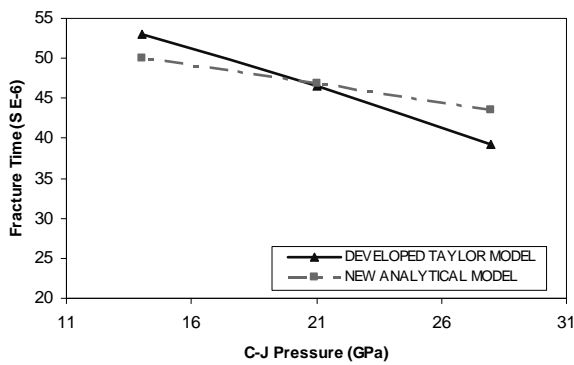
برای کنترل خروجی‌ها، از پارامترهای کنترلی استفاده می‌شود. از مهمترین پارامترهای کنترلی ضریب مقیاس گام زمانی است. برای پایداری حل عددی، اندازه گام زمانی Δt برای هر نمو

^۱ Detonator

اثرات سرعت و فشار: در شکل ۸ و ۹ نیز اثرات دو پارامتر مهم خرج میانی یعنی سرعت چاپمن-جویگت ماده منفجره (V_{CJ}) و فشار چاپمن-جویگت ماده منفجره (P_{CJ}) بر روی زمان شکست با استفاده از نتایج تحلیلی بسط مدل تیلور و مدل تحلیلی ارائه شده نشان داده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش سرعت و فشار، زمان شکست کاهش می‌یابد.



شکل ۸. اثر تغییر سرعت انفجار، D_{CJ} ، بر روی زمان شکست



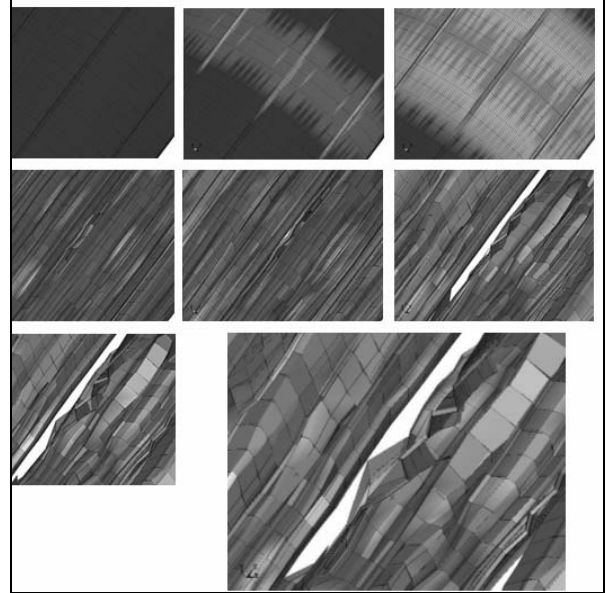
شکل ۹. اثر تغییر فشار انفجار، P_{CJ} ، بر روی زمان شکست

اثرات نوع خرج: اثرات سه نوع خرج C-4، PTEN و HMX با مشخصات ارائه شده در جدول ۵، در شکل ۱۰ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود ماده منفجره HMX با قدرت انفجاری بالا کمترین زمان شکست را موجب می‌شود. ماده منفجره PTEN در مقام دوم، و C-4 با توجه به اینکه نسبت به دو ماده منفجره دیگر از سرعت و فشار انفجار پایین تری برخوردار است، بیشترین زمان شکست پوسته را باعث می‌گردد.

اثرات تنش تسلیم: تنش تسلیم به عنوان یکی از مهمترین خواص مادی اثر گذار بر روی زمان شکست پوسته است. در شکل ۱۱ اثر این پارامتر بر روی زمان شکست با استفاده از نتایج تحلیلی رسم شده است. همانطور که در نمودار مشاهده می‌شود با افزایش تنش تسلیم، زمان شکست پوسته افزایش می‌یابد.

اثرات هندسه شیار: هندسه شیار نیز به عنوان یکی از عوامل اثر گذار بر روی زمان شکست از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. هندسه

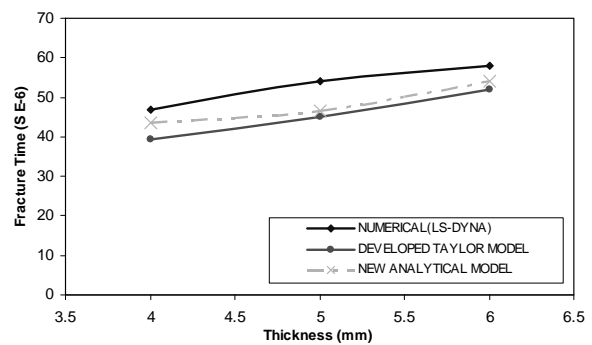
بسمت بیرون باز شود. اولین نقطه‌ای که چنین وضعیتی در آن ایجاد شود بعنوان نقطه شروع شکست و زمان آن به عنوان زمان شکست پوسته تعریف شده است. در شکل ۶ تمرکز تنش در محل شیارها، جابجایی و حذف المانها در محل شیار، انتشار و رشد ترک و شکست نهایی پوسته از محل شیار نشان داده شده است.



شکل ۶. تمرکز تنش، رشد و انتشار ترک در شیارها تحت اثر انفجار خرج میانی در فازهای مختلف

زمان شکست: زمان شکست پوسته در اثر انفجار خرج میانی به عوامل مختلفی از جمله مشخصات ماده منفجره، شامل: چگالی، ابعاد هندسی، سرعت انفجار بستگی دارد. از دیگر عوامل تأثیرگذار بر روی زمان شکست، مشخصات پوسته، شامل: خواص مادی، ابعاد هندسی مخصوصاً ضخامت می باشد. در ادامه اثر بعضی از پارامترها بر روی زمان شکست پوسته مورد بررسی قرار گرفته است.

اثرات ضخامت: در شکل ۷ اثر ضخامت بر روی زمان شکست نشان داده شده است. با افزایش ضخامت پوسته زمان شکست افزایش می‌یابد، و همانطور که مشاهده می‌شود زمان شکست بدست آمده از حل عددی تطابق خوبی با نتایج تحلیلی داشته و مقدار کمی بالاتر از آنهاست.



شکل ۷. اثر افزایش ضخامت بر روی زمان شکست

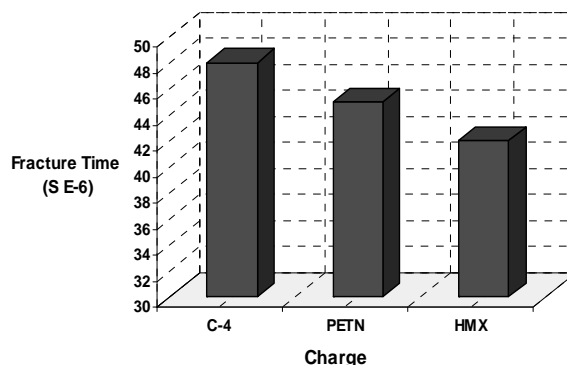
شکل ۱۲ اثرات تغییر نسبت عمق شیار به ضخامت پوسته (DOC/h)، بر روی زمان شکست با استفاده از نتایج تحلیلی و عددی نشان داده شده است.

شیار به دو صورت مورد بررسی قرار گرفته است. اول: ثابت نگه داشتن شکل هندسی و تغییر عمق شیار نسبت به ضخامت پوسته، دوم: تغییر شکل هندسه شیار (V شکل یا U شکل) و مطالعه اثرات آن.

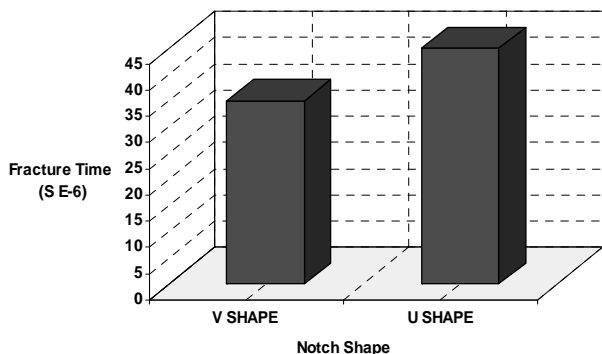
جدول ۵. مشخصات سه نوع خرج بکار رفته در تحلیل های عددی

ماده منفجره	C-J Parameters			JWL EOS Parameters				
	Density(g/cc)	P(GPa)	D (mm/sec)	B (GPa)	C (GPa)	R1	R2	w
C-4	1.601	28.0	8.19	12.95	1.043	4.5	1.40	.25
PETN	1.77	33.5	8.30	16.92	0.699	4.4	1.2	0.25
HMX	1.891	42	9.11	7.071	0.643	4.2	1	0.3

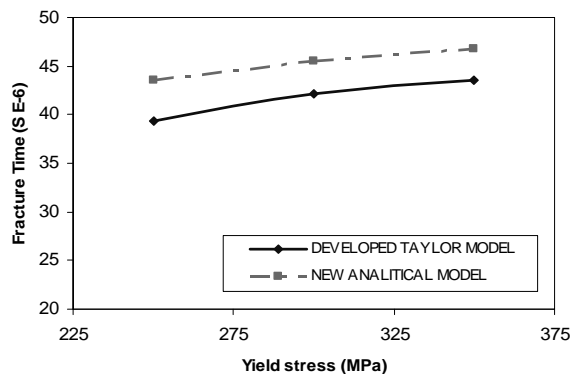
همانطور که در شکل مشاهده می‌شود با افزایش (DOC/h) زمان شکست در مدل‌های تحلیلی تقریباً ثابت بوده و در حل عددی کاهش می‌یابد، ولی کاهش زمان شکست همواره نشان‌دهنده عمق شیار بهینه نمی‌باشد. زیرا علاوه بر زمان شکست سایر پارامترها از قبیل سرعت پرتاب ذرات (ترکش) نیز می‌تواند عاملی تعیین کننده بر روی هندسه شیار باشد. اثر نوع شیار بر روی زمان شکست با استفاده از نتایج عددی بر روی پوسته‌ای با ضخامت چهار میلیمتر در شکل ۱۳ نشان داده شده است.



شکل ۱۰. اثر تغییر خرج میانی بر روی زمان شکست

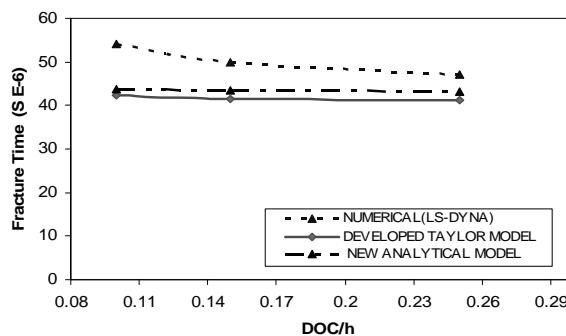


شکل ۱۳. اثر تغییر شکل هندسی بر روی زمان شکست



شکل ۱۱. اثر تنش تسلیم بر روی زمان شکست

همانطور که مشاهده می‌شود با تغییر هندسه شیار از V شکل به U شکل زمان شکست افزایش می‌یابد. در اینجا نیز زمان شکست نمی‌تواند تعیین کننده شکل هندسی بهینه شیار باشد، بلکه باید اثر آن بر روی سایر پارامترها را نیز مورد بررسی قرار داد. با این وجود با توجه به پارامترهایی چون کاهش زمان شکست و شکست یکنواخت، شیار V شکل توصیه می‌شود.



شکل ۱۲. اثر تغییر نسبت عمق شیار به ضخامت بر روی زمان شکست

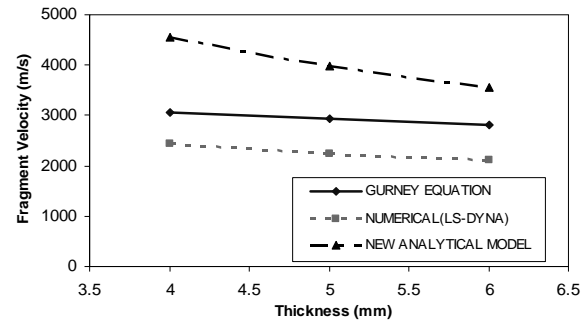
سرعت پرتاب: سرعت پرتاب ذرات یا تکه‌های جدا شده از پوسته پس از فرآیند شکست که اصطلاحاً سرعت ترکش نامیده می‌شود، در مواردی به عنوان هدف اصلی شکست مطرح می‌باشد. در شکل ۱۴ مقایسه‌ای بین سرعت ترکش با استفاده از نتایج شبیه سازی عددی و نتایج فرمول گارنی [۴] برای ضخامت‌های مختلف پوسته نشان داده شده است.

همچنانکه بین نتایج تحلیلی و تجربی زانگ و همکارانش [۱۳] و همچنین سینگ و همکارانش [۱۱] نیز چنین اختلافی در مقایسه با فرمول گارنی مشاهده می‌شود.

انبساط پوسته: در شبیه سازی عددی انجام شده پس از رسیدن موج انفجار به سطح داخلی، پوسته بصورت شعاعی منبسط شده و پس از گذشت زمان معینی منافذی به بیرون باز می‌شود. با گسترش این منافذ در نهایت پوسته دچار شکست کلی می‌گردد. حداکثر میزان انبساط پوسته شیاردار قبل از شکست در شبیه سازی عددی بین ۲۸ تا ۳۲ درصد شعاع اولیه تغییر می‌نماید.

حداکثر تغییر مکان شعاعی در وسط پوسته استوانه‌ای اتفاق می‌افتد و هرچه در جهت طولی از وسط پوسته به انتهای آن نزدیک می‌شویم تغییر مکان شعاعی نیز کاهش می‌یابد.

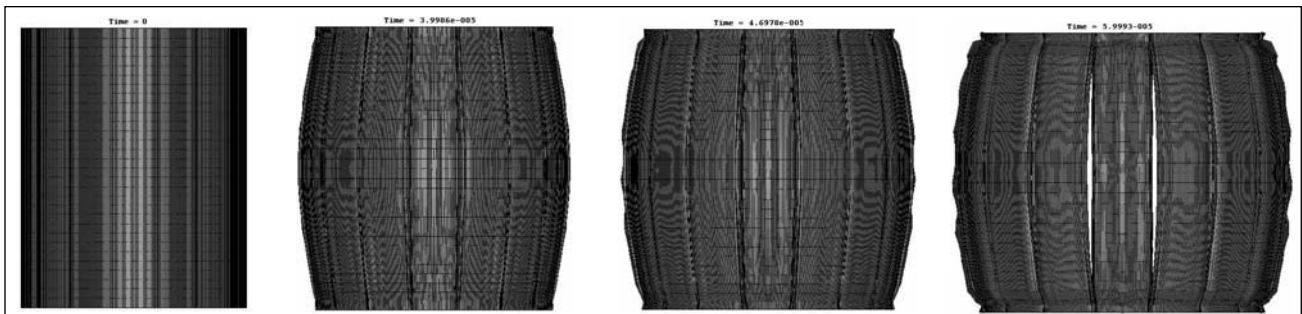
در شکل ۱۵ انبساط پوسته در چند گام زمانی از شروع انفجار خرج میانی تا باز شدن منفذ و رشد آن نشان داده شده است. در شکل ۱۶ نیز تغییر مکان شعاعی در چند نقطه مختلف پوسته که با حروف A, B, C, D مشخص شده‌اند و از قسمت میانی پوسته به انتهای بالایی امتداد دارند، نشان داده شده است. وجود شیارهای طولی سبب کاهش میزان انبساط شعاعی شده و همچنین زمان شکست و سرعت ترکش‌ها را نیز کاهش می‌دهد.



شکل ۱۴. تغییرات سرعت ترکش-ضخامت پوسته

همانطور که مشاهده می‌شود نتایج حل عددی، سرعت‌های کمتری را نسبت به سرعت‌های محاسبه شده از فرمولاسیون گارنی نشان می‌دهد.

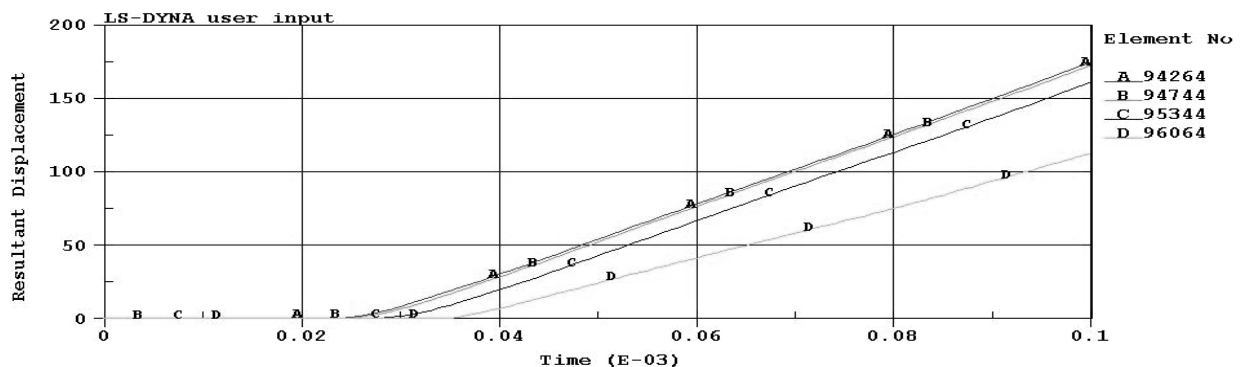
فرمول سرعت گارنی فقط تابعی از قطر پوسته، خرج و یک خصوصیت مادی پوسته و خرج (چگالی) می‌باشد و از سایر خصوصیات ویژه مادی و فرآیند انفجار در آن صرف نظر می‌شود، ولی در شبیه سازی عددی خصوصیات دیگری از فلز پوسته و خرج که بیان کننده رفتار واقعی تر آنها می‌باشد، نیز در تحلیل لحاظ می‌شود. لذا می‌توان چنین اختلافی را توجیه نمود. بعلاوه وجود شیارها نیز عامل مهم دیگر اثرگذار می‌باشد که کاهش سرعت را باعث می‌شود.



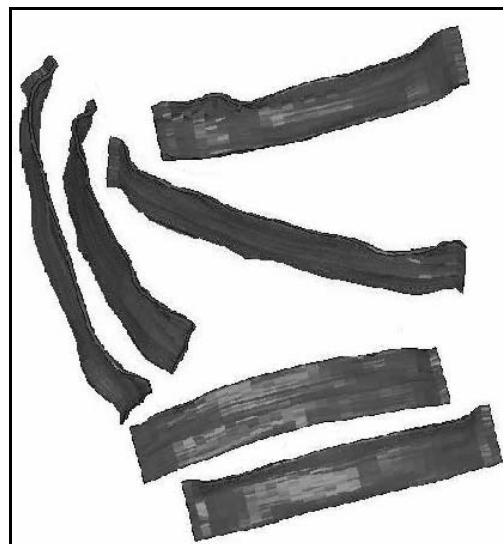
شکل ۱۵. تغییر مکان شعاعی پوسته نسبت به زمان

ایجاد ترکش‌های مورد نظر است. در شکل ۱۷ نمونه‌ای از ترکش‌های ایجاد شده در شبیه‌سازی‌های عددی نشان داده شده و نیز چند نمونه از ترکش‌های حاصل از تست‌های تجربی با مشخصات پوسته مشابه مشاهده می‌شود [۳].

هندسه ترکش: در مواردی (مثلاً سرجنگی‌های ترکشی) یکی از اهداف شکست در پوسته‌های انفجاری ایجاد ترکش‌های یکنواخت با شکلهای هندسی خاص می‌باشد. در پوسته‌های انفجاری دارای شیار طولی نیز علاوه بر تقدم زمان شکست، یکی از مهمترین اهداف ایجاد شیارها، شکست یکنواخت پوسته در جهت‌های از پیش تعیین شده و



شکل ۱۶. انبساط پوسته در فرآیند شکست (شبیه سازی عددی)



شکل ۱۷. شکل ترکش‌ها پس از فرآیند شکست، شبیه سازی عددی (راست) و تست‌های تجربی (چپ) [۳]

۷. پوسته استوانه‌ای شیاردار در اثر انفجار خرج میانی قبل از شکست منبسط می‌گردد. میزان انبساط پوسته قبل از شکست در حدود ۳۰ درصد شعاع اولیه می‌باشد. وجود شیارهای طولی علاوه بر کاهش زمان شکست، انبساط محدودتر پوسته را نیز موجب می‌شود.

۷. مراجع

[۱] دشتیان گرامی، ناصر، خدارحمی، حسین، میرجلیلی، سیدعلیمحمد، "مدل تحلیلی گذرا و شبیه سازی عددی عکس العمل سازه ای پوسته های استوانه ای تحت اثر بارگذاری انفجاری داخلی" کنفرانس بین المللی مهندسی مکانیک ۱۳۸۳، دانشگاه تربیت مدرس.

[۲] دشتیان گرامی، ناصر، خدارحمی، حسین، "مطالعه تحلیلی و شبیه سازی عددی شکست محفظه استوانه ای شیاردار"، پایان نامه کارشناسی ارشد، ۱۳۸۴، گروه مکانیک دانشگاه امام حسین(ع).

[۳] کارشناسان گروه شهید همت، "تست های میدانی سرچنگی های شدید/انفجار"، سازمان تحقیقات و خودکفایی نرسا، ۱۳۸۳.

[4] Lloyd, R.M., "Conventional Warhead Systems Physics and Engineering Design", AIAA, Vol. 179, 1998, PP. 21-28.

[5] Taylor, G.I., "The Fragmentation of Tubular Bombs", Science Papers of Taylor G.I., Cambridge University Press, London, 1963.

[6] Ivanov, A.G., "Strength Mater", Vol. 8, 1976, PP.1303-1314.

[7] Hoggat, C.R., Recht, R.F., "Fracture Behavior of Tubular Bombs", J. Appl. Phys., Vol. 39, 1968, PP. 1856-1862.

با مقایسه دو شکل تطابق نسبی خوبی بین هندسه ترکش‌ها به چشم می‌خورد. شکل ترکش‌های حاصله از تست‌های تجربی نیز مؤید میزان انبساطی در حدود ۳۰ درصد شعاع اولیه است که در مقایسه با نتایج عددی تطابق خوبی را نشان می‌دهد.

۶. نتیجه گیری

۱. مدل تیلور در پیش‌بینی رفتار فلز در فرآیند شکست تحت اثر بار انفجاری اگرچه از پاره‌ای مشخصات مادی صرف نظر نموده و اثرات نرخ کرنش، دما و ... در فرمولاسیون آن لحاظ نمی‌شود، با این وجود هنوز هم اغلب محققین در کارهای تحلیلی به آن مراجعه می‌نمایند. در این تحقیق نیز تقریب‌های خوبی از این مدل برای فرآیند شکست پوسته‌های استوانه‌ای شیاردار با اعمال ضریب تمرکز تنش ناشی از شیار در این مدل بدست آمد.

۲. مدل تحلیلی ارائه شده که در آن اثرات نرخ کرنش و کارسختی نیز در قیاس با مدل تیلور لحاظ شده است، نتایج قابل قبولی در مقایسه با نتایج حاصل از بسط مدل تیلور و نتایج شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهد.

۳. با افزایش ضخامت پوسته استوانه‌ای شیاردار نتایج تحلیلی و شبیه سازی عددی افزایش زمان شکست را نشان می‌دهند.

۴. اثرات سرعت و فشار چاپمن-جوینگت بعنوان دو مشخصه مهم ماده منفجره بر روی زمان شکست بگونه ای است که با افزایش هر یک از آنها زمان شکست پوسته کاهش می‌یابد. مواد منفجره قوی تر نظیر HMX کاهش بیشتری در زمان شکست پوسته را موجب می‌شوند.

۵. با افزایش تنش تسلیم فلز پوسته، زمان شکست افزایش می‌یابد.

۶. با افزایش ضخامت پوسته استوانه‌ای شیاردار سرعت پرتاب ترکش‌ها کاهش می‌یابد. معادله گارنی نیز چنین رفتاری را پیش‌بینی می‌نماید.

- [8] Al-Hassani, Johnson, W., "The Dynamics of the Fragmentation Process for Spherical Shells Containing Explosive", Int. J. Mech. Sci., Vol. 11, 1969, PP. 811-818.
- [9] Chongyang, G., Huiji, S., Zhenhan, y., Xiaohua, W., Chunhua, B., "Numerical Simulation Dynamic Fracture Criteria of Thin Cylindrical Shells Under Inner Explosive Loading", Tsinghua Science and Technology, Vol. 5, No.1, 2000, PP. 13-17 .
- [10] Chao, T.W., Shepherd, J.E., "Comparison of Fracture Response of Prefaced Tubes Under Internal Static and Detonation Loading", Journal of pressure vessel Technology, Vol. 5, 2003, PP. 66-73.
- [11] Singh, M., Suneja H.R., Bola, M.S., Prakash, S., "Dynamic Tensile Deformation and Fracture of Metal Cylinders at High Strain Rates", International Journal of Impact Engineering, Vol. 27, 2002, PP. 939-954.
- [11] Wilson, L.T., Reedal, D.R., Kuhns, L.D., Grady, D.E., Kipp, M.E., "Using A Numerical Fragmentation Model to Understand the Fracture and Regimentation of Naturally Fragmenting Munitions of Differing Materials and Geometries", 19th International Symposium on Ballistics, May 2001, Interlaken, Switzerland.
- [12] Qi Zhang, Chang-Qing Miao, Da-Chao Lin, Chun-Hua Bai; "Relation of Fracture with Air Shock Wave Intensity for Explosion in a Shell", International Journal of Impact Engineering, Vol. 28, 2003, PP. 1129-1141.
- [13] Kosmatka, J.B., Fries, R.H., Reinholcz, C.F., "Tension and Bending Stress Concentration Factors In Opposed U-V Notches", Depk. of Mechanical Blacksburg, 1996.
- [14] Johnson, W., "Impact Strength of Materials", Edward Arnold, 1972.
- [15] Carleone, J., "Tactical Missile Warhead", AIAA, Vol.155, 1993.
- [16] LS-DYNA Manual, Livermore Software Technology, 2001.