نشریه بین المللی علوم مهندسی دانشگاه علم و صنعت ایران، شماره ۲، جلد ۱۹، سال ۱۳۸۷، صفحه ۹۱-۸۲
مهندسی شیمی، ریاضی و کامپیوتر

A FINITE DIFFERENCE SCHEME TO CALCULATE THE OPTION PRICES IN STOCHASTIC VOLATILITY MODELS

Sh. Zamani & B. Zargari

Sharif University of Technology , zamani@sharif.edu

Abstract: In stochastic volatility models, European option prices are solutions to parabolic differential equations. In this paper we propose a finite difference scheme for solving these equations numerically. We prove the stability and convergence of this method in norm infinity. Then we use the ADL method to separate the operators, this allows us to apply Thomas algorithm to solve the corresponding linear systems in each step.

یک شمای تفاضل متناهی برای محاسبه قیمت اختیار در مدل تلاطم تصادفی

شیوا زمانی و بهناز زرگری

چکیده: در مدل تلاطم تصادفی، قیمت اختیارهای اروپایی جواب یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای سهموی است. در این مقاله شمای تفاضل متناهی ضمنی برای حل عددی این معادله ارائه کرده‌ایم. ثابت می‌کنیم که این روش در نرم بی‌نهایت، پایدار و همگراست. سپس از روش *ADI* برای جداسازی عملگرها استفاده می‌کنیم و این به ما امکان می‌دهد تا در هر مرحله، برای حل دستگاه خطی متناظر با آن از الگوریتم توماس استفاده کنیم.

واژه‌های کلیدی: اختیار معامله اروپایی، مدل هستون، روش تفاضل متناهی

۱. مقدمه

در بازارهای مالی علاوه بر خرید و فروش کالاهای پایه نظیر سهام و اوراق قرضه، قرادادهایی تحت عنوان کلی "مشتقات مالی" یا "مطالبات مشروط" نیز مورد معامله قرار می‌گیرند. یکی از معروف‌ترین انواع مشتقات مالی، اختیار خرید اروپایی است. یک اختیار خرید اروپایی با تاریخ سررسید T و قیمت توافقی K که در زمان $t = 0$ روی یک واحد از کالای پایه موردنظر منعقد می‌شود، قراردادی است با این ویژگی: دارنده قرارداد در زمان $t=T$ می‌تواند (ولی مجبور نیست) یک واحد کالای پایه را به قیمت K از فروشنده اختیار بخرد. به وضوح عایدی دارنده‌ی اختیار در زمان T، نامنفی است. پس برای "عادلانه" بودن این قراداد باید خریدار اختیار در زمان انعقاد قرارداد، مبلغی به فروشنده بپردازد. این مبلغ، قیمت اختیار خرید در زمان $t = 0$ نامیده می‌شود.

در حالت کلی، یک مطالبه مشروط اروپایی، قراردادی است که در تاریخ سررسید ($t=T$)، مبلغ تصادفی $H = H(S_T)$ را به دارنده قرارداد پرداخت می‌کند؛ به عنوان مثال در مورد اختیار خرید اروپایی $H = (S_T - K)^+$. در ابتدای دهه ۷۰، بلک و شولز[2] برای حل مسأله قیمت‌گذاری رهیافت جدیدی ارائه کردند که مبتنی بر مفهوم پوشش ریسک بود. آنها قیمت سهام را با یک حرکت براونی هندسی مدل‌سازی کردند و نرخ بهره را ثابت در نظر گرفتند:

تاریخ وصول: ۸۶/۸/۲۵
تاریخ تصویب: ۸۷/۱۰/۸

دکتر شیوا زمانی، دانشکده مدیریت و اقتصاد، دانشگاه صنعتی شریف.
zamani@sharif.edu
بهناز زرگری، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف.
behnaz_zargari@yahoo.com

[2] *M. Scholes & F. Black*

$$dB_t = rB_t dt \qquad\qquad 0 \le t \le T \qquad (۱)$$
$$dS_t = \mu\, S_t dt + \sigma\, S_t dW_t$$

ثابت σ، تلاطم[1] نامیده می‌شود و r نرخ بهره است. بلک و شولز نشان دادند که در یک بازار "ایده‌آل" می‌توان سبد سرمایه‌ای شامل سهام و ورق قرضه به‌گونه‌ای تشکیل داد که ارزش آن منطبق بر جریان نقدی حاصل از در دست داشتن اختیار خرید اروپایی باشد؛ یعنی بازار کامل است. سپس نتیجه گرفتند که اگر در بازار فرصت آربیتراژ وجود نداشته باشد، قیمت اختیار در هر لحظه برابر است با ارزش سبد سرمایه در آن لحظه. آنها در مقاله خود که در سال ۱۹۷۳ منتشر شد فرمول صریحی برای محاسبه قیمت اختیار خرید اروپایی استخراج کردند.

مدل بلک- شولز مدل ساده‌ای است و وجود فرمول صریح برای اختیارهای متداول از مزایای آن به‌شمار می‌رود. اما کاستی‌های آن در هم‌خوانی با نتایج تجربی، بهایی است که باید بابت این سادگی بپردازیم. به‌همین دلیل به تدریج تعمیم‌هایی از این مدل ارائه شده‌اند که از بین آنها می‌توان به مدل‌های مبتنی بر جهش و پخش، فرآیندهای لوی[2] و تلاطم تصادفی اشاره کرد.

در مدل تلاطم تصادفی، تلاطم، خود یک فرآیند تصادفی است. تا کنون مدل‌های تلاطم تصادفی[3] مختلفی پیشنهاد شده‌اند، از جمله هال و وایت[4] (۱۹۹۸)، استین و استین[5] (۱۹۹۱) و هستون[6] (۱۹۹۳).

در مدل هستون فرض می‌شود که تلاطم یک پخش ایتو از نوع ککس- اینگرسل- راس[7] است که فرآیندی نامنفی و دارای خاصیت بازگشت به میانگین می‌باشد. همچنین فرآیندهای وینر[8] هدایت‌کننده قیمت سهام و تلاطم، همبسته در نظر گرفته می‌شوند.

همچنان که در فصل ۱۵ از [۲] بیان شده، هرگاه به فرآیند قیمت سهام در این مدل، جهش را هم بیافزاییم، مدل حاصل (که مدل بیتس[9] نامیده می‌شود) در عین سادگی، یکی از انعطاف‌پذیرترین مدل‌های قیمت‌گذاری اختیارها به شمار می‌رود. از این رو ما بر مدل هستون متمرکز خواهیم شد که در ادامه آن را توضیح خواهیم داد.

بر خلاف مدل بلک- شولز، در مدل‌های تلاطم تصادفی، بازار کامل نیست. در بازارهای ناکامل، ریسک را نمی‌توان کاملاً پوشش داد. در این مدل ابتدا باید معیاری برای اندازه‌گیری ریسک ارائه شود و سپس این ریسک (به مفهومی) می‌نیمم شود.

[1] volatility
[2] Levy processes
[3] Stochastic volatility
[4] Hull & White
[5] Stein & Stein
[6] Heston
[7] Cox- Ingersoll- Ross
[8] Wiener processes
[9] Bates

از میان روش‌های مختلف پوشش ریسک در بازارهای ناکامل، در مدل‌های تلاطم تصادفی به طور معمول از "روش‌های مجذوری" استفاده می‌شود؛ یعنی روش‌های پوشش میانگین- واریانس و می‌نیمم‌سازی (موضعی) ریسک. چرا که این روش‌ها اولاً به قیمت‌گذاری بدون آربیتراژ منتهی می‌شود و از این لحاظ تعمیم پوشش ریسک در بازارهای کامل به شمار می‌روند و ثانیاً تابع قیمت‌گذاری به دست آمده از آنها دارای نمایش مناسبی می‌باشد. در [۱] روش می‌نیمم‌سازی موضعی ریسک و نحوه استخراج فرمول قیمت‌گذاری در مدل تلاطم تصادفی بررسی شده است. در این مقاله یک شمای تفاضل متناهی برای حل عددی معادله دیفرانسیل پاره‌ای استخراج شده در [۱]، ارائه می‌کنیم.

۲ . معرفی مدل و استخراج فرمول‌های قیمت‌گذاری

در مدل‌های تلاطم تصادفی، تلاطم خود به عنوان یک فرآیند تصادفی مثبت در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر فرض بر این است که قیمت (تنزیل شده) کالای دارای ریسک در معادله دیفرانسیل تصادفی

$$dS_t = S_t\left(\mu_t dt + \sigma_t dW_t\right) \qquad t>0$$

صدق می‌کند که $\{(\sigma_t),\quad 0\le t\le T\}$ یک فرآیند تصادفی مثبت است و غالباً به گونه‌ای انتخاب می‌شود که دارای خاصیت بازگشت به میانگین باشد. تنوع مدل‌های تلاطم تصادفی از انتخاب‌های متفاوت برای (σ_t) ناشی می‌شود. مدل مورد استفاده ما حالتی از مدل هستون [۵] است که در آن $\sigma_t = \sqrt{Y_t}$ و $\sqrt{Y_t}$ یک پخش ایتو از نوع ککس- اینگرسل- راس است:

$$dS_t = S_t\left(\mu\sqrt{Y_t}\,dt + \sqrt{Y_t}\;\; dW_t\right) \qquad 0\le t\le T \qquad (۲)$$
$$dY_t = k(\eta - Y_t)\;\; dt + \upsilon\sqrt{Y_t}\;\; dW'_t$$

که μ یک عدد ثابت است و k و η، υ ثابت‌هایی مثبت‌اند. W_t و W'_t دو فرآیند وینر با همبستگی ثابت $\rho\in(-1,1)$ هستند؛ یعنی $d\langle W,W'\rangle_t = \rho dt$ که $\langle W,W'\rangle$ کوواریانس مجذوری W و W' است.

فرآیند Y در (۲) فرآیندی نامنفی می‌باشد. به بیان نادقیق، هرگاه $Y_t = 0$، ضریب پخش در معادله دیفرانسیل تصادفی متناظر با Y صفر می‌شود و ضریب رانش $k\eta$ سبب می‌شود که Y دوباره مثبت شود. فرض می‌کنیم $\frac{\upsilon^r}{r}\le k\eta$ (که تضمین می‌کند Y مثبت است)؛ اثبات این مطلب در بخش ۵ از [۷] موجود است. همچنین Y دارای خاصیت بازگشت به میانگین است، زیرا هرگاه $Y_t<\eta$،

ضریب رانش $k(\eta - Y_t)$ مثبت است و تمایل به افزایش مقدار Y دارد، و بالعکس هرگاه $Y_t > \eta$، این ضریب منفی است و تمایل به کاهش مقدار Y دارد.

گیریم H یک مطالبه‌ی مشروط اروپایی باشد؛ یعنی $H = H(S_T)$. فرض کنیم $v(t,s,y)$ قیمت این مطالبه مشروط در لحظه t باشد که با استفاده از روش می‌نیمم‌سازی ریسک به دست آمده است، و نیز فرض کنیم $S_0 = s$ و $Y_0 = y$. در [۱] نشان داده شده است که $v(t,s,y)$ روی $(0,T)\times(0,\infty)\times(0,\infty)$ در معادله پاره‌ای

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(k(\eta - y) - \rho\upsilon\mu\sqrt{y}\right)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{y}{2}\left(s^2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + 2rus\frac{\partial^2 v}{\partial s\partial y} + u^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = 0$$

با شرط پایانی $v(T,s,y) = H(s)$ صدق می‌کند. برای حذف مشتق آمیخته $\frac{\partial^2 v}{\partial s\partial y}$ از تغییر متغیر $x = \ln s - \frac{\rho}{\upsilon}y$ استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب تابع u_∞ با تعریف

$$u_\infty(t,x,y) = v\left(t, \exp\left(x + \frac{\rho}{\upsilon}y\right), y\right)$$

جواب معادله

$$\frac{\partial u_\infty}{\partial t} + \left(\rho^2\mu\sqrt{y} - \frac{\rho}{\upsilon}k(\eta - y) - \frac{y}{2}\right)\frac{\partial u_\infty}{\partial x} + \left(k(\eta - y) - \rho\upsilon\mu\sqrt{y}\right)\frac{\partial u_\infty}{\partial y} + \frac{y}{2}\left((1-\rho^2)\frac{\partial^2 u_\infty}{\partial x^2} + \upsilon^2\frac{\partial^2 u_\infty}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (۳)$$

$$(t,x,y)\in(0,T)\times G_\infty$$

$$u_\infty(T,x,y) = H\left(\exp\left(x + \frac{\rho}{\upsilon}y\right)\right)$$

$$(x,y)\in G_\infty$$

است که در آن $G_\infty = (-\infty,\infty)\times(0,\infty)$.

در معادله (۳)، G_∞ ناحیه بی‌کران است. در روش‌های عددی، دامنه u_∞ را به یک زیرمجموعه کراندار از G_∞ همچون $G = (X_{min}, X_{max})\times(0, Y_{max})$ محدود می‌کنیم. این عمل موضعی سازی نامیده می‌شود. در واقع u_∞ را با تابعی مثل u تقریب می‌زنیم که u جواب معادله پاره‌ای فوق روی ناحیه کراندار G می‌باشد و روی مرز G برابر صفر است؛ یعنی u جواب معادله زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\rho^2\mu\sqrt{y} - \frac{\rho}{\upsilon}k(\eta - y) - \frac{y}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(k(\eta - y) - \rho\upsilon\mu\sqrt{y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{y}{2}\left((1-\rho^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \upsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (۴)$$

$$(t,x,y)\in(0,T)\times G$$

$$u(t,x,y) = 0 \qquad (x,y)\in\partial G$$

$$u(T,x,y) = H\left(\exp\left(x + \frac{\rho}{\upsilon}y\right)\right) \qquad (x,y)\in G$$

توجه می‌کنیم که (۴) یک معادله با شرط مرزی (مصنوعی) است در حالی که معادله (۳) فاقد شرط مرزی است. (نماد ∂G در (۴) نشان‌دهنده مرز G است.)

۳. شمای تفاضل متناهی

در بخش قبل دیدیم که قیمت اختیار معامله اروپایی (پس از موضعی‌سازی مسأله) در معادله (۴) صدق می‌کند که یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای با شرط پایانی است. با تبدیل t به $T - t$ می‌توان این معادله پاره‌ای را به یک معادله سهموی با شرط اولیه تبدیل کرد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\rho^2\mu\sqrt{y} - \frac{\rho}{\upsilon}k(\eta - y) - \frac{y}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(k(\eta - y) - \rho\upsilon\mu\sqrt{y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{y}{2}\left((1-\rho^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \upsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (۵)$$

$$(t,x,y)\in(0,T)\times G$$

$$u(t,x,y) = 0 \qquad (x,y)\in\partial G$$

$$u(0,x,y) = H_0(x,y) \qquad (x,y)\in\partial G$$

که در آن

$$H_0(x,y) = H\left(\exp\left(x + \frac{\rho}{\upsilon}y\right)\right)$$

در این بخش شمای تفاضل متناهی (ضمنی) موردنظر را ارائه می‌کنیم:

ابتدا $[X_{min}, X_{max}]\times[0, Y_{max}]$ را با شبکه‌ای متساوی‌الفاصله با سایز h جایگزین می‌کنیم. مجموعه گره‌هایی از شبکه را که متعلق به $G = (X_{min}, X_{max})\times(0, Y_{max})$ هستند با G_h و گره‌هایی را که روی مرز G واقع‌اند با ∂G_h نشان می‌دهیم. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم Y_{max} و $X_{max} - X_{min}$ مضارب صحیحی از h باشند؛

مثلاً $X_{max} - X_{min} = (N+1)h$ و $Y_{max} = (N+1)h$ به ازای $N_x, N_y \in \mathbb{N}$. بدین ترتیب

$$G_h = \{(x_i, y_j) \ : \ i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y\}$$

$$\partial G_h = \{(x_i, y_j) \ : \ i = 0 \ \text{یا} \ i = N_x + 1 \ \text{یا} \ j = 0 \ \text{یا} \ j = N_y + 1\}$$

با قرارداد

$$L := b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{a_{11}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{a_{22}}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

که در آن

$$\begin{aligned} b_1 &= b_1(y) = \rho^2 \mu \sqrt{y} - \frac{\rho}{\upsilon} k(\eta - y) - \frac{y}{2} \ , \\ b_2 &= b_2(y) = k(\eta - y) - \rho \upsilon \mu \sqrt{y} \ , \\ a_{11} &= a_{11}(y) = (1 - \rho^2) y \ , \\ a_{22} &= a_{22}(y) = \upsilon^2 y \ , \end{aligned}$$

معادله (۵) را به صورت

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = Lu && (t,x,y) \in (0,T) \times G \\ &u(t,x,y) = 0 && (x,y) \in \partial G \\ &u(0,x,y) = H_o(x,y) && (x,y) \in G \end{aligned} \qquad (۶)$$

می‌نویسیم. اگر $(x_i, y_j) \in G_h$، $u(t, x_i, y_j)$ را با $u_{ij}(t)$ نشان می‌دهیم. با این نمادگذاری از روابط زیر برای تقریب زدن مشتقات پاره‌ای u در راستای x و y استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_i, y_j) \approx \begin{cases} \partial_x u_{ij}(t) := \dfrac{u_{i+1,j}(t) - u_{ij}(t)}{h} \ ; & \text{اگر} \ b_1(y_j) \geq 0 \\ \bar{\partial}_x u_{ij}(t) := \dfrac{u_{i,j}(t) - u_{i-1,j}(t)}{h} \ ; & \text{اگر} \ b_1(y_j) < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x_i, y_j) \approx \bar{\partial}_x \partial_x u_{ij}(t) = \frac{u_{i+1,j}(t) - 2u_{ij} + u_{i-1,j}(t)}{h^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t, x_i, y_j) \approx \begin{cases} \partial_x u_{ij}(t) := \dfrac{u_{i,j+1}(t) - u_{ij}(t)}{h} ; & \text{اگر} \ b_2(y_j) \geq 0 \\ \bar{\partial}_x u_{ij}(t) := \dfrac{u_{i,j}(t) - u_{i,j-1}(t)}{h} ; & \text{اگر} \ b_2(y_j) < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x_i, y_j) \approx \bar{\partial}_y \partial_y u_{ij}(t) = \frac{u_{i,j+1}(t) - 2u_{ij} + u_{i,j-1}(t)}{h^2}$$

همانطور که خواهیم دید، نحوه خاص تعریف مشتقات مرتبه اول در اثبات"پایداری" روش، مفید خواهد بود. با جایگذاری روابط فوق در تعریف L، عملگر تفاضلی

$$L_h := b_1^+ \ \partial_x - b_1^- \ \bar{\partial}_x + b_2^+ \ \partial_y - b_2^- \ \bar{\partial}_y + \frac{a_{11}}{2}\bar{\partial}_x \partial_x + \frac{a_{22}}{2}\bar{\partial}_y \partial_y \qquad (۷)$$

بدست می‌آید که در آن b_1^+, b_1^- به ترتیب قسمت‌های مثبت و منفی b هستند. انتظار می‌رود که $u_{ij}(t)$ به‌طور تقریبی در معادله $\frac{du_{ij}(t)}{dt} \approx L_h u_{ij}(t)$ صدق کند. فرض کنیم $U_{ij}(t)$ جواب دقیق این معادله باشد؛ یعنی برای $i = 1, \dots, N_x$ و $j = 1, \dots, N_y$،

$$\frac{dU_{ij}(t)}{dt} = L_h U_{ij}(t) \qquad t \in (0, T) \qquad (۸)$$

که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی است و برای حل آن می‌توان از روش یک مرحله‌ای اویلر استفاده کرد:

افراز $0 < k < 2k < \dots < Nk = T$ از بازه $[0, T]$ را در نظر می‌گیریم. با استفاده از خلاصه‌نویسی $U_{ij}^{(n)} = U_{ij}(nk)$ و به ازای $\theta \in [0, 1]$، دستگاه (۸) را با

$$\frac{U_{ij}^{(n+1)} - U_{ij}^{(n)}}{k} = L_h\left(\theta U_{ij}^{(n+1)} + (1-\theta) U_{ij}^{(n)}\right); \quad i = 1, \dots, N_x \ , \ j = 1, \dots, N_y$$

برای $n = 0, 1, \dots, N-1$ تقریب می‌زنیم. این روش، "روش θ" نامیده می‌شود.

در صورتی که $\theta = 0$ داریم $U_{ij}^{(n+1)} = (1 + kL_h) U_{ij}^{(n)}$؛ یعنی جواب هر مرحله با انجام یک ضرب ماتریسی، از جواب مرحله قبل بدست می‌آید و به همین علت، روش صریح نامیده می‌شود. برای"پایدار" بودن این روش باید k نسبت به h بسیار کوچک (از مرتبه h^2) باشد که باعث افزایش تعداد تکرارها (یعنی N) و در نتیجه طولانی شدن زمان محاسبه می‌شود.

در صورتی که $\theta = 1$ داریم؛ $(1 - kL_h) U_{ij}^{(n+1)} = U_{ij}^{(n)}$ یعنی جواب هر مرحله با حل یک دستگاه معادلات خطی، از جواب مرحله قبل بدست می‌آید و به همین سبب روش ضمنی نامیده می‌شود. این روش (به مفهومی که در بخش آینده بیان می‌کنیم) پایدار است. از این رو ما روش ضمنی را در پیش خواهیم گرفت.

الگوریتم ۱ روش ضمنی

مقدار دهی اولیه

- اگر $i\in\{1,\dots,N_x\}$ و $j\in\{1,\dots,N_y\}$ قرار بده $U_{ij}^{(0)}=H_0(x_i,y_j)$.
- اگر $i\in\{0,N_x+1\}$ و $j\in\{0,N_y+1\}$ قرار بده $U_{ij}^{(0)}=0$.

تکرار: برای هر $n=0,1,\dots,N-1$

- دستگاه $(1-kL_h)U_{ij}^{(n+1)}=U_{ij}^{(n)}$، $i\in\{1,\dots,N_x\}$ و $j\in\{1,\dots,N_y\}$، را حل کن.
- شرایط مرزی $U_{ij}^{(n+1)}=0$، $i\in\{0,N_x+1\}$ یا $j\in\{0,N_y+1\}$ را اعمال کن.

۴. همگرایی

این بخش به اثبات همگرایی روش ضمنی در نرم بی‌نهایت اختصاص دارد.

ابتدا مفاهیم سازگاری و پایداری را معرفی می‌کنیم:

تعریف ۱. می‌گوییم شمای تفاضل متناهی، با معادله (۶) سازگار (سراسری نسبت به نرم بی‌نهایت) است هرگاه برای هر تابع آزمون $\varphi\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)$ با میل کردن h,k به سمت صفر، مقدار

$$\max_{i,j}\left|\frac{\varphi(nk,x_i,y_j)-\varphi(nk-k,x_i,y_j)}{k}-L_h\varphi(nk,x_i,y_j)-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-L_\varphi\right)(nk,x_i,y_j)\right|$$

به صفر همگرا شود.

تعریف ۲. شمای تفاضل متناهی را (در نرم بی‌نهایت) پایدار می‌نامیم هرگاه برای هر شرط اولیه کراندار، $U_{ij}^{(n)}$ به‌طور یکنواخت در تمام نقاط شبکه و مستقل از h و k، کراندار باشد؛ یعنی

$$\exists C>0,\ \forall k>0,\ h>0,\ n\in\{0,\dots,N\}:\quad \max_{i,j}\left|U_{ij}^{(n)}\right|\le C.$$

تعریف ۳. می‌گوییم شمای تفاضل متناهی (در نرم بی‌نهایت) همگراست هرگاه برای هر $n\in\{0,\dots,N\}$، با میل کردن h و k به سمت صفر مقدار $\max_{i,j}\left|U_{ij}^{(n)}-u_{ij}(nk)\right|$ به سمت صفر همگرا شود.

بنابر قضیه هم ارزی لکس[1]، اگر معادله (۶) "خوش حالت" باشد، یک تقریب تفاضل متناهی سازگار با این معادله تنها و تنها وقتی همگراست که پایدار باشد.

در مورد مسأله ما، خوش حالت بودن به این معناست که معادله (۶) جواب یکتا داشته باشد. ما فرض می‌کنیم که این شرط یکتایی برقرار باشد.

دو گزاره بعد به اثبات سازگاری و پایداری روش ضمنی اختصاص دارند. با وجود این دو گزاره، همگرایی روش ضمنی، نتیجه مستقیم قضیه لکس خواهد بود.

گزاره ۱. الگوریتم ۱ با معادله (۶) سازگاراست.

برهان. فرض کنیم $\varphi\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)$، با استفاده از بسط تیلور φ تا مرتبه دوم، به ازای یک $\xi_0\in(nk-k,nk)$،

$$\left|\frac{\varphi(nk,x_i,y_j)-\varphi(nk-k,x_i,y_j)}{k}-\frac{\partial\varphi}{\partial t}(nk,x_i,y_j)\right|=\left|\frac{k}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(\xi_0,x_i,y_j)\right|\le\frac{k}{2}\left\|\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right\|_\infty$$

و به ازای یک $\xi_l\in(x_{i-1},x_i)$ و $\xi_r\in(x_i,x_{i+1})$،

$$\left|\left(b_i^+\,\partial_x\varphi-b_i^-\,\bar\partial_x\varphi-b_i\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)(nk,x_i,y_j)\right|\le\left|b_i(nk,x_i,y_j)\right|\left(\left|\frac{h}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(nk,\xi_l,y_j)\right|+\left|\frac{h}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(nk,\xi_r,y_j)\right|\right)\le h\|b_i\|_\infty\left\|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right\|_\infty$$

که $\|\ \|_\infty$، نرم ماکزیمم روی $\bar G$ (بستار G) است.

با استفاده از بسط تیلور u تا مرتبه چهارم، به ازای یک $\xi_r\in(x_{i-1},x_i)$ و $\xi_r\in(x_i,x_{i+1})$،

$$\left|\left(\frac{a_{11}}{2}\bar\partial_x\partial_x\varphi-\frac{a_{11}}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)(nk,x_i,y_j)\right|\le\left|\frac{a_{11}}{2}(nk,x_i,y_j)\right|\left(\left|\frac{h^2}{24}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}(nk,\xi_r,y_j)\right|+\left|\frac{h^2}{24}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}(nk,\xi_r,y_j)\right|\right)\le\frac{h^2}{24}\|a_{11}\|_\infty\left\|\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}\right\|_\infty$$

در مورد جملات مربوط به مشتقات پاره‌ای نسبت به y نیز روابط مشابهی برقرارند که روی هم رفته نتیجه می‌دهند:

$$\max_{i,j}\left|\frac{\varphi(nk,x_i,y_j)-\varphi(nk-k,x_i,y_j)}{k}-L_h\varphi(nk,x_i,y_j)-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-L\varphi\right)(nk,x_i,y_j)\right|=O(h+k)$$

گزاره ۲. الگوریتم ۱ پایدار است.

[1] Lax

برهان. با استقراء نشان می‌دهیم که به ازای هر n، $\max_{i,j}\left|U_{ij}^{(n)}\right| \le \|H_\circ\|_\infty$.

برای $n=0$ (با توجه به مقداردهی اولیه الگوریتم ۱) $\max_{i,j}\left|U_{ij}^{(0)}\right| = \|H_\circ\|_\infty$. فرض کنیم نامساوی فوق برای n برقرار باشد ولی برای $n+1$ برقرار نباشد. در این صورت به ازای یک $i_\circ$ در $\{1,\dots,N_x\}$ و یک $j_\circ$ در $\{1,\dots,N_y\}$،

$$\left|U_{i_\circ,j_\circ}^{(n+1)}\right| = \max_{i,j}\left|U_{i,j}^{(n)}\right| > \|H_\circ\|_\infty \tag{۹}$$

با قراردادن

$$C_1 = \left(\frac{k}{h^2}\frac{a_{11}}{2} + \frac{k}{h}b_1^-\right)(nk, x_{i_o,j_o})$$
$$C_2 = \left(\frac{k}{h^2}\frac{a_{11}}{2} + \frac{k}{h}b_1^+\right)(nk, x_{i_o,j_o})$$
$$C_3 = \left(\frac{k}{h^2}\frac{a_{11}}{2} + \frac{k}{h}b_2^-\right)(nk, x_{i_o,j_o})$$
$$C_4 = \left(\frac{k}{h^2}\frac{a_{11}}{2} + \frac{k}{h}b_2^+\right)(nk, x_{i_o,j_o})$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\max_{i,j}\left|U_{ij}^{(n+1)}\right| &= \left|U_{i_o,j_o}^{(n+1)}\right| \\
&= -C_1\left|U_{i_o,j_o}^{(n+1)}\right| - C_2\left|U_{i_o,j_o}^{(n+1)}\right| + \\
&\quad + (1 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4)\left|U_{i_o,j_o}^{(n+1)}\right| + \\
&\quad - C_3\left|U_{i_o,j_o}^{(n+1)}\right| - C_4\left|U_{i_o,j_o}^{(n+1)}\right| \\
&\le -C_1\left|U_{i_o-1,j_o}^{(n+1)}\right| - C_2\left|U_{i_o+1,j_o}^{(n+1)}\right| + \\
&\quad + (1 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4)\left|U_{i_o,j_o}^{(n+1)}\right| + \\
&\quad - C_3\left|U_{i_o-1,j_o}^{(n+1)}\right| - C_4\left|U_{i_o+1,j_o}^{(n+1)}\right| \\
&\le \left|U_{i_o,j_o}^{(n)}\right| \le \|H_o\|_\infty
\end{aligned}$$

که با (۹) در تناقض است.

در اثبات گزاره ۱ دیدیم که مرتبه سازگاری الگوریتم ۱، $O(h+k)$ است. با توجه به این که ما سازگاری را به صورت سراسری تعریف کردیم، مرتبه همگرایی الگوریتم هم $O(h+k)$ خواهد بود.

نتیجه ۱. روش ضمنی در نرم بی‌نهایت از مرتبه $O(h+k)$ همگراست

۵. روش ADI[1]

در بخش قبل دیدیم که در هر مرحله از روش ضمنی نیازمند حل دستگاه معادلات

$$(1 - kL_h)U_{ij}^{(n+1)} = U_{ij}^{(n)} \quad ;$$
$$i \in \{1,\dots,N_x\},\ j \in \{1,\dots,N_y\}$$

هستیم که $1-kL_h$ ماتریسی $N_xN_y \times N_xN_y$ است.

در دسته‌ای از روش‌ها که تحت عنوان جداسازی عملگرها شناخته شده‌اند، می‌توان هر مرحله از چنین الگوریتم‌هایی را به چند زیر مرحله تفکیک کرد که در هر زیر مرحله تنها یکی از راستاهای مکان (در اینجا x و y) به طور ضمنی ظاهر می‌شوند. بنابراین می‌توان ترتیبی داد که در هر زیر مرحله ماتریس ضرایب دستگاه معادلات، سه قطری باشد و به ما امکان می‌دهد که برای حل دستگاه از الگوریتم توماس استفاده کنیم. از معروف‌ترین انواع روش‌های جداسازی عملگرها، روش ADI است. با توجه به رابطه (۷) داریم $L_h = L_x + L_y$ که در آن

$$L_x = b_1^+\ \partial_x - b_1^-\ \bar{\partial}_x + \frac{1}{2}a_{11}\bar{\partial}_x\partial_x\ ,$$
$$L_y = b_2^+\ \partial_y - b_2^-\ \bar{\partial}_y + \frac{1}{2}a_{22}\bar{\partial}_y\partial_y\ ,$$

در روش ADI هر گام از روش ضمنی به دو نیم گام تفکیک می‌شود؛ فرض کنیم در مرحله n ام روش ضمنی باشیم. در نیم گام اول $U_{ij}^{(n)}$ معلوم است. برای هر $j \in \{1,\dots,N_y\}$، از حل دستگاه معادلات $N_x \times N_x$

$$\frac{U_{ij}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} - U_{ij}^{(n)}}{\frac{1}{2}k} = L_xU_{ij}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} + L_yU_{ij}^{(n)}$$
$$i = 1,2,\dots,N_x$$

مقادیر $U_{ij}^{(n+\frac{1}{2})}$ برای $i \in \{1,\dots,N_x\}$ تعیین می‌شوند. در نیم گام دوم $U_{ij}^{(n+\frac{1}{2})}$ معلوم است و برای $i \in \{1,\dots,N_x\}$، از حل دستگاه معادلات $N_y \times N_y$

$$\frac{U_{ij}^{(n+1)} - U_{ij}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{\frac{1}{2}k} = L_xU_{ij}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} + L_yU_{ij}^{(n+1)}$$
$$j = 1,2,\dots,N_y$$

مقادیر $U_{ij}^{(n+1)}$ برای $j \in \{1,\dots,N_y\}$ تعیین می‌شوند. به طور خلاصه در هر گام روش ضمنی یک دستگاه $N_xN_y \times N_xN_y$ را حل می‌کنیم در حالی که در هر گام روش ADI، N_y دستگاه سه قطری $N_x \times N_x$ و N_x دستگاه قطری $N_y \times N_y$ را حل می‌کنیم.

---
[1] *Alternating Direction Implicit Method*

الگوریتم ۲ روش *ADI*

مقداردهی اولیه

- اگر $i \in \{1,\dots,N_x\}$ و $j \in \{1,\dots,N_y\}$ قرار بده $U_{ij}^{(0)} = H_{\cdot}(x_i, y_j)$.
- اگر $i \in \{0, N_x+1\}$ و $j \in \{0, N_y+1\}$ قرار بده $U_{ij}^{(0)} = 0$.

تکرار: برای هر $n = 0, 1, \dots, N-1$

- برای هر $j = 1, 2, \dots, N_y$.
  - دستگاه
  $$\left(1-\frac{k}{2}L_x\right)U_{ij}^{(n+\frac{1}{2})} = \left(1+\frac{k}{2}L_y\right)U_{ij}^{(n)}$$
  را برای $i \in \{1,\dots,N_x\}$ با الگوریتم توماس حل کن.
  - شرایط مرزی $U_{ij}^{(n+\frac{1}{2})} = 0$ $i \in \{0, N_x+1\}$ یا $j \in \{0, N_y+1\}$ را اعمال کن.
- برای هر $i = 1, 2, \dots, N_x$
  - دستگاه
  $$\left(1-\frac{k}{2}L_y\right)U_{ij}^{(n+1)} = \left(1+\frac{k}{2}L_y\right)U_{ij}^{(n+\frac{1}{2})}$$
  را برای $j \in \{1,\dots,N_y\}$ با الگوریتم توماس حل کن.
  - شرایط مرزی $U_{ij}^{(n+1)} = 0$، $i \in \{0, N_x+1\}$ یا $j \in \{0, N_y+1\}$ را اعمال کن.

مراجع

[۱] بهناز زرگری، بیژن ظهوری زنگنه، شیوا زمانی، راما کنت، *"استخراج فرمول قیمت‌گذاری امتیاز در مدل هستون"*، گزارش ششمین سمینار معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی، ۱۳۸۳.

[2] Black, F., Scholes M., *"The Pricing of Options and Corporate Liabilities"*, Journal of Political Economy, 3, 1973, pp. 637-654.

[3] Cont, R., Tankov P., "*Financial Modeling With Jump Processes*", Chapman & Hall / CRC Press,2003.

[4] Cont, R., Voltchkova, E., "*Finite Difference Methods for Option Pricing in Jump-Diffusion and Exponential Levy Model"* Rapport Interne 513, CMAP, Ecole Polytechnique, 2003.

[5] Heath, D., Platen, E., Schweizer, M., "*A Comparison of Two Quadratic Approaches to Hedging in Incomplete Markets*", Mathematical finance, 11 (4), 2001, pp. 385-413.

[6] Heston, S., "*A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Option"*, Rev. Fin. Studies, 6, 1993, pp.327-343.

[7] Heston, S., *"A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options"*, Review of Financial Studies, 6, 1993, pp. 327–343.

[8] Hull, J. and White, A., "*The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*", J. Finance 42, 1987, pp. 281–300.

[9] Marchuk, G., "*Splitting and Alternating Direction Methods"*, in Lions, J. and Ciarlet, P., eds., Handbook of Numerical Analysis, Vol. 1: Finite Difference Methods (Part 1), Elsevier science publishers, 1989, pp.197-462

[10] Rogers, L. C.G., Williams, D., Diffusions, Markov Processes, Martingales, Vol. 2. Ito Calculus, Cambridge University Press: Cambridge, 2000.

[11] Thomee, V., "*Finite Difference Methods for Linear Parabolic Equation*", in Lions, J. Ciarlet and P., eds., Handbook of numerical Analysis, Vol. 1: Finite Difference Methods (Part 1), Elsevier Science Publishers, 1989, pp. 5-196.

[12] Stein, E., Stein J., "*Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: an Analytical Approach*", Rev. Fin. Studies. **4,** 1991, pp. 727–752.