

## حل تحلیلی ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی همسانگرد

### عرضی بر اساس تئوری برشی مرتبه اول

علیرضا سعیدی<sup>۱</sup> و سید رسول آتشی‌پور<sup>۲</sup>

دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده فنی و مهندسی، بخش مهندسی مکانیک

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۷/۰۲/۱۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۸۷/۰۸/۲۶)

#### چکیده

در این مقاله، فرمول‌بندی جدیدی از معادلات حرکت ورق‌های همسانگرد عرضی<sup>۳</sup> بر پایه تئوری برشی مرتبه اول ارائه شده است. برخلاف دستگاه معادلات اصلی که شامل سه معادله دیفرانسیل جزئی وابسته هستند، معادلات تغییر شکل یافته جدید شامل دو معادله دیفرانسیل جزئی مستقل می‌باشند که حل آنها به مراتب ساده‌تر خواهد بود. سپس، برای تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های همسانگرد عرضی، معادلات مذکور در دو حالت حل شده‌اند. در حالت اول، با بهره‌گیری از بسط دوگانه فوریه، برای فرکانس‌های طبیعی ورق با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده، پاسخ بسته دقیق ارائه شده است. در حالت دوم، ارتعاشات آزاد ورق با شرایط مرزی دلخواه در دو لبه موازی بررسی شده است. به منظور ارضای شرایط مرزی در دو لبه موازی غیر تکیه‌گاه ساده، روابطی برای توابع مجهول دستگاه معادلات اصلی برحسب مجهولات دستگاه معادلات تغییرشکل یافته ارائه شده است. در پایان، ضمن ارائه نتایج عددی مربوط به شش حالت امکان‌پذیر از شرایط مرزی کلاسیک، برخی از نتایج مهم حاصل از این تحلیل برای ورق‌های همسانگرد عرضی بیان شده است. نتایج نشان می‌دهد که با وجود اندک بودن اختلاف مقادیر فرکانس‌های طبیعی در ورق‌های نازک همسانگرد و همسانگرد عرضی، اما این اختلاف برای ورق‌های ضخیم قابل توجه است. همچنین، تأثیر افزایش ضخامت بر مقادیر فرکانس‌های طبیعی، برای یک ورق همسانگرد عرضی بیشتر از ورق همسانگرد است.

**واژه‌های کلیدی:** همسانگرد عرضی، ارتعاشات آزاد، ورق مستطیلی ضخیم، پاسخ تحلیلی

## Analytical Solution of Free Vibration of Thick Transversely Isotropic Rectangular Plates, Based on First Order Shear Deformation Theory

A.R. Saidi and S.R. Atashipour

Mech. Eng. Dep't., School of Eng., Shahid Bahonar Univ. of Kerman

#### ABSTRACT

In this paper, a reformulation for equations of motion for transversely isotropic plates has been obtained based on first shear deformation theory. Unlike the three coupled original equations, this new reformulation consists of two decoupled partial differential equations which can be solved much easier. For free vibration analysis of transversely isotropic plates, the mentioned equations have been solved for two cases. In the first case, using double Fourier series, closed-form solution has been achieved for natural frequencies of simply supported plates. In the second case, free vibration of a plate with arbitrary boundary conditions in two parallel edges has been considered. In order to satisfy the arbitrary boundary conditions, some relations have been presented for unknown functions of the original system of equations in terms of the unknowns of the decoupled equations. Finally, numerical results for six possible cases of classical boundary conditions have been presented. Besides, some important results of the presented analysis have been presented for transversely isotropic plates. The results show that despite of the small differences between the natural frequencies of the thin isotropic and transversely isotropic plates, the differences are more significant for the natural frequencies of the thick plate. Also, effects of increasing thickness on the value of natural frequencies for transversely isotropic plates are more than the isotropic ones.

**Key Words:** Transversely Isotropic, Free Vibration, Thick Rectangular Plate, Analytical Solution

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): saidi@mail.uk.ac.ir

۲- کارشناس ارشد: atashipour@yahoo.com

## ۱- مقدمه

ورق‌های مستطیلی، از جمله سازه‌های متداولی هستند که در شاخه‌های مختلف مهندسی از جمله مهندسی سازه، دریا، مکانیک و هوافضا، کاربرد دارند. از این رو مطالعه رفتار ارتعاشات آزاد آنها و یافتن فرکانس‌های طبیعی، به‌عنوان مهم‌ترین عامل در طراحی دینامیکی سازه‌ها، ضرورت دارد. تاریخچه مطالعه ارتعاشات آزاد ورق به حدود دهه ۱۸۰۰ و تلاش چلادنی [۱] برای تحلیل ارتعاشات آزاد یک ورق مربعی با لبه‌های آزاد بر می‌گردد. تاکنون کارهای زیادی در مورد تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی منتشر شده است که بخش وسیعی از این مطالعات، به تحلیل ورق‌های نازک بر مبنای تئوری کلاسیک اختصاص دارد. از آنجا که در تئوری کلاسیک ورق از اثر تغییر شکل‌های برشی و اینرسی دورانی صرف‌نظر می‌شود، بنابراین حوزه اعتبار این تئوری برای ورق‌های نازک بوده و با افزایش ضخامت ورق بر مقدار این خطا افزوده می‌شود.

بخش عمده مطالعات صورت گرفته در تحلیل ارتعاشات ورق‌های ضخیم، بر پایه تئوری میندلین-رایزنر است. این تئوری که به تئوری برشی مرتبه اول مشهور است، توسط میندلین و رایزنر معرفی شد [۲-۴]. در این تئوری اثر تغییر شکل‌های برشی عرضی در نظر گرفته شده است و با احتساب اثر اینرسی دورانی در معادلات دینامیکی، نتایج بهبود داده شده است.

قوگال و شیمپی [۵] مروری از تئوری‌های اصلاح شده ورق ارائه نموده و ضمن بررسی نتایج آنها با تئوری الاستیسیته سه‌بعدی، مزایا و معایب هر یک را بررسی کردند. نور و بورتون [۶] نیز هشت تئوری مختلف ورق را با یکدیگر مقایسه نمودند و نقاط قوت و ضعف هر یک از تئوری‌ها را برای عوامل مختلف بررسی کردند. لیو و همکاران [۷]، مرور جامعی از مطالعات صورت گرفته بر روی ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی ارائه نمودند. باترا و جین [۸]، با استفاده از روش المان محدود، ارتعاشات ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند ناهمسانگرد را بر پایه تئوری برشی مرتبه اول مطالعه کردند. چاندراشخارا و آگاروال [۹] نیز رفتار ارتعاشات ورق‌های کامپوزیتی لایه‌ای را به روش المان محدود و براساس تئوری برشی مرتبه اول تحلیل کردند. از جمله مطالعات صورت گرفته بر روی ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی

همسانگرد، اورتوتروپیک و ناهمسانگرد لایه‌ای و ساندویچی با شرایط مرزی مختلف به روش المان محدود و بر پایه تئوری مرتبه بالای ردی می‌توان به کارهای لیو [۱۰]، و نایاک و همکاران [۱۱] اشاره کرد. لی و همکاران [۱۲]، با بهره‌گیری از سه دسته تابع متفاوت، ارتعاشات آزاد ورق‌های کامپوزیتی چند لایه متقارن را بر پایه تئوری برشی مرتبه اول با روش ترکیبی ریلی-ریتر و کانتورویچ تحلیل نمودند. پاپازوگلو و همکاران [۱۳]، و چونگ و چینگ [۱۴]، به ترتیب با بهره‌گیری از چند جمله‌ای لاگرانژ و چند جمله‌ای تابع تیر تیموشنکو، ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی همگن ناهمسانگرد به روش ریلی-ریتر مطالعه کردند. از جمله مطالعات صورت گرفته با روش استریپ محدود برای تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های کامپوزیتی چند لایه مستطیلی با شرایط مرزی مختلف بر پایه تئوری‌های برشی می‌توان به کارهای داو و وانگ [۱۵]، و اُخس و همکاران [۱۶] اشاره کرد. کیان و همکاران [۱۷]، ارتعاشات آزاد و اجباری ورق‌های ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند را بر پایه تئوری برشی مرتبه بالا و روش پتروف-گالرکین تحلیل کردند. خدیر و ردی [۱۸]، ارتعاشات گذرای ورق‌های ضخیم چند لایه نامتقارن با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده تحت بارگذاری دلخواه را مطالعه کردند.

با توجه به پیچیدگی معادلات حرکت در تئوری‌های برشی، تقریباً همه کارهای منتشر شده در ارتباط با تحلیل ارتعاشات ورق‌های ضخیم، به روش‌های عددی و نیمه-تحلیلی اختصاص دارد. اگرچه حسینی‌هاشمی و ارسنجانی [۱۹]، برای ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی ضخیم، پاسخ تحلیلی دقیق ارائه کردند، با وجود این، این تحلیل به ورق‌های همسانگرد محدود می‌شد. بر مبنای مطالعات صورت گرفته، هیچ مطالعه تحلیلی دقیقی برای ورق‌های ضخیم کامپوزیتی با رفتار همسانگرد عرضی در منابع یافت نشد. بر این اساس، در تحلیل حاضر، یک مطالعه تحلیلی دقیق برای ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی ضخیم همسانگرد عرضی براساس تئوری برشی مرتبه اول صورت گرفته است. از آنجا که مواد همسانگرد، حالت خاصی از مواد همسانگرد عرضی محسوب می‌شوند، بنابراین با استفاده از این تحلیل، نتایج عددی ارتعاشات ورق‌های همسانگرد نیز ارائه شده است.

## ۲- تئوری برشی مرتبه اول

برخلاف تئوری کلاسیک ورق، در تئوری برشی مرتبه اول آثار مربوط به اینرسی دورانی و تغییرشکل‌های برشی منظور شده است. این تئوری که به تئوری ورق میندلین-رایزنر معروف است، بر اساس میدان تغییر مکان زیر است [۳-۴]:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3, t) &= u_0(x_1, x_2, t) + x_3 \psi_1(x_1, x_2, t), \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) &= v_0(x_1, x_2, t) + x_3 \psi_2(x_1, x_2, t), \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) &= w(x_1, x_2, t), \end{aligned} \quad (۱)$$

که در آن،  $u_0$ ،  $v_0$  و  $w$  مقادیر جابه‌جایی صفحه میانی ورق بوده و  $\psi_1$  و  $\psi_2$  توابعی مجهول از متغیرهای مکانی  $x_1$  و  $x_2$  و متغیر زمانی  $t$  می‌باشد. با فرض خمش خالص ورق، مقادیر جابه‌جایی صفحه میانی صفر خواهد بود. روابط کرنش-تغییر مکان برای تغییر شکل‌های کوچک چنین نوشته می‌شود [۲۰]:

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2. \quad (۲)$$

از جایگذاری رابطه (۱) در رابطه (۲) و سپس جایگذاری روابط حاصله در روابط تنش-کرنش خطی هوک در حالت دو بعدی، مولفه‌های میدان تنش برحسب مولفه‌های میدان تغییر مکان به دست خواهند آمد. برای استخراج معادلات حرکت ورق می‌توان از اصل همیلتون به شکل زیر استفاده نمود [۲۱]:

$$\delta(T - U - V) = 0, \quad (۳)$$

که در آن،  $\delta$  عملگر تغییرات است. همچنین،  $T$  انرژی جنبشی،  $U$  انرژی تغییر شکل و  $V$  انرژی پتانسیل بارهای خارجی بوده و به شکل زیر تعریف می‌شوند [۲۱]:

$$\begin{aligned} \delta T &= \iint \int_V \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i dV, \\ \delta U &= \iint \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \iint \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dx_3 dA, \end{aligned} \quad (۴)$$

$\delta V = \iint \int_s \sigma_i \delta u_i ds = \iint \int_A p(x_1, x_2, t) \delta w dA$ ، که در آن،  $\sigma_{ij}$  مولفه‌های میدان تنش بوده و  $p$  تابع بارگذاری عرضی است.  $\rho$ ،  $h$  و  $I$  نیز به ترتیب چگالی، ضخامت ورق و اینرسی دورانی بر واحد سطح ورق هستند. با استفاده از اصل همیلتون معادلات حرکت ورق چنین به دست می‌آیند [۲۱]:

$$\begin{aligned} \delta \psi_x : M_{11,1} + M_{12} - Q_{11} &= I \ddot{\psi}_1, \\ \delta \psi_y : M_{12} + M_{22,2} - Q_{22} &= I \ddot{\psi}_2, \\ \delta w : Q_{11,1} + Q_{22,2} + p(x_1, x_2, t) &= \rho h \ddot{w}, \end{aligned} \quad (۵) \quad (۱۰)$$

که در آن،  $Q_{11}$  و  $Q_{22}$  نیروهای برشی منتجه بر واحد طول بوده و  $M_{11}$ ،  $M_{22}$  و  $M_{12}$  مولفه‌های ممان ورق بر واحد طول می‌باشند و به ترتیب از روابط زیر به دست می‌آیند [۲۱]:

$$(Q_{11}, Q_{22}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{11}, \sigma_{22}) dx_3, \quad (۶)$$

$$(M_{11}, M_{22}, M_{12}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}) x_3 dx_3. \quad (۷)$$

با جایگذاری روابط بیان شده در معادلات حرکت (۵)، نهایتاً معادلات حاکم بر تئوری برشی مرتبه اول برای ورق-های ساخته شده از مواد با رفتار همسانگرد عرضی به صورت زیر نوشته می‌شوند [۲۲]:

$$\begin{aligned} D \psi_{1,11} + C \psi_{1,22} + (D - C) \psi_{2,12} \\ - K^2 A (\psi_1 + w_{,1}) &= I \ddot{\psi}_1, \\ D \psi_{2,22} + C \psi_{2,11} + (D - C) \psi_{1,12} \\ - K^2 A (\psi_2 + w_{,2}) &= I \ddot{\psi}_2, \end{aligned} \quad (۸)$$

$K^2 A (\psi_{1,1} + \psi_{2,2}) + K^2 A \nabla^2 w + p = \rho h \ddot{w}$ ، که در آن،  $\nabla^2$  عملگر لاپلاسین در حالت دو بعدی است. ضرایب  $A$ ،  $C$ ،  $I$  و همچنین  $D$  که سفتی خمشی ورق نام دارد، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} A = G_3 h ; C = \frac{1}{12} G h^3, \\ D = \frac{G h^3}{6(1-\nu)}, I = \frac{1}{12} \rho h^3, \end{aligned} \quad (۹)$$

که در آن،  $G$  و  $G_3$  نیز به ترتیب، مدول برشی صفحه‌ای و مدول برشی راستای ضخامت برای ورق همسانگرد عرضی هستند. ضریب  $K^2$  در معادلات حاکم (۸) نیز ضریب تصحیح برشی بوده و برابر با  $5/6$  در نظر گرفته می‌شود [۲].

## ۳- جداسازی دستگاه معادلات حاکمه

حل دستگاه معادلات (۸) به علت وابستگی معادلات آن، در حالت کلی مشکل است؛ از این رو، در این قسمت با استفاده از یک تابع تغییر متغیر، وابستگی معادلات حاکمه به کلی از بین رفته و یک دستگاه جدید حاصل می‌شود که شامل معادلات مستقل است. این تابع تغییر متغیر که اولین بار برای جداسازی و حل معادلات استاتیکی استفاده شد به صورت زیر است [۲۲]:

$$\varphi = \psi_{1,2} - \psi_{2,1}. \quad (۱۰)$$

#### ۴- حل معادلات تغییر شکل یافته برای تحلیل ارتعاشات آزاد

برای بررسی ارتعاشات آزاد ورق، شکل کلی توابع  $w$ ،  $\varphi$ ،  $\psi_1$  و  $\psi_2$  چنین در نظر گرفته می‌شود [۲۲]:

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, t) &= \tilde{w}(x_1, x_2) \exp(j\omega t), \\ \varphi(x_1, x_2, t) &= \tilde{\varphi}(x_1, x_2) \exp(j\omega t), \\ \psi_1(x_1, x_2, t) &= \tilde{\psi}_1(x_1, x_2) \exp(j\omega t), \\ \psi_2(x_1, x_2, t) &= \tilde{\psi}_2(x_1, x_2) \exp(j\omega t), \quad j = \sqrt{-1}, \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن،  $\tilde{w}$ ،  $\tilde{\varphi}$ ،  $\tilde{\psi}_1$  و  $\tilde{\psi}_2$  توابع معمولی از  $x_1$  و  $x_2$  بوده و  $\omega$  فرکانس زاویه‌ای است. جایگذاری روابط (۱۳) در معادلات تغییر فرم یافته (۱۱) در غیاب تابع بارگذاری چنین نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} D\nabla^4 \tilde{w} + \left(I + \frac{\rho h D}{K^2 A}\right) \omega^2 \nabla^2 \tilde{w} \\ - \rho h \omega^2 \left(1 - \frac{I \omega^2}{K^2 A}\right) \tilde{w} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$C\nabla^2 \tilde{\varphi} - (K^2 A - I \omega^2) \tilde{\varphi} = 0.$$

همچنین، از جایگذاری روابط (۱۳) در روابط (۱۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_i = \\ \frac{\left(K^2 A + \frac{\rho h D}{K^2 A} \omega^2 + D\nabla^2\right) \tilde{w}_i + (-1)^i C \tilde{\varphi}_{,3-i}}{K^2 A - I \omega^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

#### ۴-۱- ورق مستطیلی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده

برای یافتن فرکانس‌های طبیعی یک ورق مستطیلی به ابعاد  $a \times b$  با شرایط مرزی چهار لبه روی تکیه‌گاه ساده، توابع  $\tilde{\varphi}$  و  $\tilde{w}$  چنین تعریف می‌شوند [۲۲]:

$$\tilde{w} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \alpha_m x_1 \sin \beta_n x_2, \quad (16)$$

$$\tilde{\varphi} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn} \cos \alpha_m x_1 \cos \beta_n x_2,$$

که در آن،

$$\alpha_m = m\pi/a; \quad \beta_n = n\pi/b \quad (17)$$

بسط دوگانه مثلثاتی رابطه (۱۶) شرایط مرزی مربوط به تکیه‌گاه ساده را در لبه‌های  $x_1 = 0, a$  و  $x_2 = 0, b$  ارضا می‌کند. از جایگذاری روابط (۱۶) در معادلات (۱۴)،

با جایگذاری رابطه (۱۰) در معادلات دینامیکی (۸) و انجام عملیات جبری به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w - \left(I + \frac{\rho h D}{K^2 A}\right) \nabla^2 \ddot{w} + \rho h \ddot{w} + \frac{\rho h I}{K^2 A} \ddot{\ddot{w}} \\ = p - \frac{D}{K^2 A} \nabla^2 p + \frac{I}{K^2 A} \ddot{p}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$C\nabla^2 \varphi - K^2 A \varphi = I \ddot{\varphi}.$$

با دقت در رابطه (۱۱) مشاهده می‌شود که اولین معادله تغییر فرم یافته، همانند معادله حاکمه تئوری کلاسیک یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم برحسب خیز ورق و تابع بارگذاری عرضی می‌باشد. برای یافتن این معادله، از اولین و دومین معادله دستگاه (۸) به ترتیب نسبت به  $x_1$  و  $x_2$  مشتق گرفته و نتایج را با هم جمع می‌کنیم، سپس با استفاده از معادله حاصله، عبارت  $\psi_{1,1} + \psi_{2,2}$  را از سومین معادله دستگاه (۸) حذف می‌کنیم. برای یافتن دومین معادله رابطه (۱۱)، پس از مشتق‌گیری از اولین و دومین معادله دستگاه (۸) به ترتیب نسبت به  $x_1$  و  $x_2$  نتایج حاصله را از هم کم می‌کنیم.

برای حل مسائل ورق علاوه بر حل معادلات تغییر فرم یافته، لازم است که شرایط مرزی مربوط به هر مساله ارضا گردد. از آنجا که شرایط مرزی مسئله برحسب توابع مجهول دستگاه معادلات اصلی می‌باشد، به روابطی نیاز است که توابع  $\psi_1$  و  $\psi_2$  را برحسب توابع مجهول معادلات تغییر فرم یافته (یعنی  $w$  و  $\varphi$ ) بیان کند. با استفاده از تعریف تابع  $\varphi$  از رابطه (۱۰) و عملیات جبری روی روابط (۸)، به روابط زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} (K^2 A + I \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \psi_1 = +C \varphi_{,2} \\ - (K^2 A + D\nabla^2 - \frac{\rho h D}{K^2 A} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) w_{,1}, \\ (K^2 A + I \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \psi_2 = -C \varphi_{,1} \\ - (K^2 A + D\nabla^2 - \frac{\rho h D}{K^2 A} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) w_{,2}. \end{aligned} \quad (12)$$

## ۴-۲- ورق با شرایط مرزی دلخواه در دو لبه موازی

فرض کنید که یک ورق مستطیلی در دو لبه موازی (مثلاً در جهت  $x_1$ ) دارای تکیه‌گاه ساده بوده و در دو لبه دیگر دارای شرایط مرزی دلخواه باشد. در این حالت، روابط  $\tilde{w}$ ،  $\tilde{\varphi}$ ،  $\tilde{\psi}_1$  و  $\tilde{\psi}_2$  به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۲]:

$$\begin{aligned}\tilde{w} &= \sum_{m=1}^{\infty} W_m(x_2) \sin \alpha_m x_1, \\ \tilde{\varphi} &= \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x_2) \cos \alpha_m x_1, \\ \tilde{\psi}_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{1m}(x_2) \cos \alpha_m x_1, \\ \tilde{\psi}_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{2m}(x_2) \sin \alpha_m x_1,\end{aligned}\quad (21)$$

که در آن،  $\alpha_m$  با رابطه (۱۷) تعریف می‌شود. مشخص است که روابط (۲۱) شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده را در لبه‌های  $x_1 = 0, a$  ارضا می‌کنند. جایگذاری روابط  $\tilde{w}$  و  $\tilde{\varphi}$  از روابط (۲۱) به ترتیب در اولین و دومین معادله از معادلات (۱۴) به معادلات دیفرانسیل معمولی زیر می‌انجامد:

$$\begin{aligned}W_m^{(4)} - \left[ \alpha_m^2 - \left( \frac{I}{D} + \frac{\rho h}{K^2 A} \right) \omega^2 \right] W_m'' \\ - \left[ \alpha_m^4 + \left( \rho h + I \alpha_m^2 + \frac{\rho h (D \alpha_m^2 - I \omega^2)}{K^2 A} \right) \frac{\omega^2}{D} \right] W_m = 0, \\ \Phi_m'' - \left( \alpha_m^2 + \frac{K^2 A - I \omega^2}{C} \right) \Phi_m = 0.\end{aligned}\quad (22)$$

هر یک از دو معادله دیفرانسیل رابطه (۲۲) را می‌توان مستقل از یکدیگر حل کرد. پاسخ اولین معادله چنین است:

$$W_m(x_2) = \begin{cases} C_{m1} \cosh \sqrt{\lambda_1} x_2 + C_{m2} \sinh \sqrt{\lambda_1} x_2 \\ + C_{m3} \cosh \sqrt{\lambda_2} x_2 + C_{m4} \sinh \sqrt{\lambda_2} x_2 \\ , \lambda_2 > 0 \\ C_{m1} \cosh \sqrt{\lambda_1} x_2 + C_{m2} \sinh \sqrt{\lambda_1} x_2 \\ + C_{m3} \cos \sqrt{-\lambda_2} x_2 + C_{m4} \sin \sqrt{-\lambda_2} x_2 \\ , \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 \\ C_{m1} \cos \sqrt{-\lambda_1} x_2 + C_{m2} \sin \sqrt{-\lambda_1} x_2 \\ + C_{m3} \cos \sqrt{-\lambda_2} x_2 + C_{m4} \sin \sqrt{-\lambda_2} x_2 \\ , \lambda_1 < 0,\end{cases}\quad (23)$$

که در آن،

معادلات زیر برای فرکانس‌های طبیعی یک ورق مستطیلی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در چهار لبه به دست می‌آید:

$$\frac{\rho h I}{K^2 A} \omega^4 - \left( I + \rho h + \frac{\rho h D}{K^2 A} \right) (\alpha_m^2 + \beta_n^2) \omega^2 + D (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 = 0, \quad (17)$$

$$I \omega^2 - C (\alpha_m^2 + \beta_n^2) - K^2 A = 0.$$

پاسخ معادلات بالا به صورت روابط زیر است:

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{aligned} \bar{\omega}_{mn}^{(1)} \\ \bar{\omega}_{mn}^{(2)} \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{h} \sqrt{\Gamma_1 \mp \sqrt{\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2}}, \\ \bar{\omega}_{mn}^{(3)} &= \frac{1}{h} \sqrt{\Gamma_3},\end{aligned}\quad (18)$$

$$\Gamma_1 = \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{K^2}{G} + \frac{2}{1-\nu} \right) [m^2 + (\eta n)^2] + \frac{6K^2}{h^2 G},$$

$$\Gamma_2 = \sqrt{\frac{2K^2}{(1-\nu)G}} \pi^2 [m^2 + (\eta n)^2],$$

$$\Gamma_3 = \frac{12K^2}{h^2 G} + \pi^2 [m^2 + (\eta n)^2].$$

در روابط فوق پارامترهای  $\bar{\omega}_{mn}$ ،  $\bar{h}$  و  $\eta$  و  $\bar{G}$  به ترتیب فرکانس طبیعی بی‌بعد، ضخامت بی‌بعد، نسبت اضلاع ورق و مدول برشی بی‌بعد برای ورق همسانگرد عرضی بوده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{\omega}_m = \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{G}} \omega; \quad \bar{h} = h/a; \quad (19)$$

$$\bar{G} = G/G_3; \quad \eta = \frac{a}{b}.$$

به سادگی می‌توان نشان داد که حد اولین دسته از فرکانس‌های طبیعی، یعنی  $\omega_{mn}^{(1)}$ ، هنگامی که ضخامت ورق به سمت صفر میل می‌کند با رابطه فرکانس‌های طبیعی ورق در تئوری کلاسیک [۲۱] یکسان خواهد بود. به عبارت دیگر:

$$\lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \bar{\omega}_{mn}^{(1)} = \bar{\omega}_{mn}^{cl} = \frac{\pi^2 [m^2 + (\eta n)^2]}{\sqrt{6(1-\nu)}}. \quad (20)$$

مشاهده می‌شود که بر طبق تئوری برشی مرتبه اول سه رابطه برای فرکانس‌های طبیعی ورق حاصل می‌شود، اما بر طبق تئوری کلاسیک تنها یک دسته از فرکانس‌های طبیعی به دست می‌آید، که البته دارای خطا بوده و مقدار این خطا با نازک شدن ورق، کاهش می‌یابد.

به صورت (SXS) نمایش داده شده است که نمایانگر شرط مرزی تکیه‌گاه ساده (S)، شرط دلخواه  $X$ ، تکیه‌گاه ساده (S) و شرط دلخواه  $Y$ ، به ترتیب در لبه‌های  $x_1 = 0$ ،  $x_2 = 0$ ،  $x_1 = a$  و  $x_2 = b$  می‌باشد. شرایط مرزی مورد بررسی در این مقاله، تکیه‌گاه ساده (S)، لبه گیردار (C) و لبه آزاد (F) می‌باشد. این شرایط مرزی با روابط زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} (S): W = M_{22} = \Psi_{1m} = 0, \\ (C): W = \Psi_{1m} = \Psi_{2m} = 0, \\ (F): M_{22} = M_{12} = Q_{22} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

برای بررسی صحت حل صورت گرفته، در جدول ۱، مقایسه‌ای بین نتایج عددی حاصل از تحلیل عددی لیو و همکاران [۲۳]، و تحلیل پاسخ‌بسته حسینی هاشمی و ارسنجانی [۱۹] و تحلیل حاضر برای ارتعاشات ورق‌های مستطیلی همسانگرد، با نسبت ضلع به ضخامت ورق برابر با ۱۰ صورت گرفته است. در جدول ۲ نیز چند فرکانس طبیعی اول برای یک ورق مربعی همسانگرد با مقادیر مشابه حاصل از مطالعات لی و هان [۲۴] و لی [۲۵] با استفاده از روش المان محدود مقایسه شده است. همخوانی خوب مقادیر عددی ارائه شده در این جداول، صحت تحلیل صورت گرفته را تأیید می‌کند.

در جدول ۳ مقادیر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد مربوط به ورق همسانگرد عرضی با نسبت مدول برشی صفحه‌ای به مدول برشی عرضی  $\bar{G} = 2/5$  ارائه شده است.  $\omega_m^{(i)}$ ،  $i$  امین ریشه معادله به دست آمده ناشی از شرط وابستگی ماتریس ضرایب است که بازای مقدار مشخصی از  $m$  به دست آمده است. اعداد طبیعی  $m$  و  $i$  به ترتیب، مربوط به وضعیت شکل مودهای ورق در راستای  $x_1$  و  $x_2$  می‌باشد. به منظور بررسی رفتار ارتعاشی ورق‌های همسانگرد عرضی و مقایسه با نتایج ورق‌های همسانگرد، در شکل ۱ نمودار تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب نسبت ضلع به ضخامت برای ورق مربعی با شرایط مرزی مختلف ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که برای ورق‌های نازک، مقادیر فرکانس‌های طبیعی مربوط به ورق همسانگرد و همسانگرد عرضی به هم نزدیک هستند. این موضوع بدین دلیل است که در این حالت تأثیر تغییرات خواص راستای ضخامت نسبت به خواص صفحه‌ای ناچیز است. همچنین، دیده می‌شود که تأثیر افزایش ضخامت بر مقادیر فرکانس-

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2a^2} [2(m\pi)^2 - \kappa_1 \bar{\omega}^2 \pm \bar{\omega} \sqrt{(\kappa_2 \bar{\omega})^2 + 24(1-\nu)}]. \quad (24)$$

ضرایب  $\kappa_1$  و  $\kappa_2$  نیز با روابط زیر بیان می‌شوند:

$$\left\{ \begin{matrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{matrix} \right\} = \left( \frac{\bar{G}}{K^2} \pm \frac{1-\nu}{2} \right) \bar{h}^2. \quad (25)$$

پاسخ دومین معادله دیفرانسیل رابطه (۲۲) به صورت رابطه زیر است:

$$\Phi_m(x_2) = \begin{cases} C_{m5} \cosh \sqrt{\lambda_3} x_2 + C_{m6} \sinh \sqrt{\lambda_3} x_2, & \lambda_3 > 0 \\ C_{m5} \cos \sqrt{-\lambda_3} x_2 + C_{m6} \sin \sqrt{-\lambda_3} x_2, & \lambda_3 < 0, \end{cases} \quad (26)$$

که در آن،

$$\lambda_3 = \frac{1}{a^2} \left( (m\pi)^2 + \frac{12K^2}{\bar{h}^2 \bar{G}} - \bar{h}^2 \bar{\omega}^2 \right). \quad (27)$$

روابط (۲۳) و (۲۶) مجموعاً شامل شش ثابت مجهول هستند که از ارضای شرایط مرزی در دو لبه با شرایط مرزی دلخواه (لبه‌های  $x_2 = 0, b$ ) به دست می‌آیند. برای ارضای این شرایط مرزی به توابع  $\psi_1$  و  $\psi_2$  نیاز است. از این‌رو، با جایگذاری روابط (۲۱) در روابط (۱۵) خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{matrix} \Psi_{1m} \\ \Psi_{2m} \end{matrix} \right\} = \quad (28)$$

$$\Lambda_1 \left\{ \begin{matrix} \alpha_m W_m \\ W'_m \end{matrix} \right\} + \Lambda_2 \left\{ \begin{matrix} \alpha_m W''_m \\ W'''_m \end{matrix} \right\} + \Lambda_3 \left\{ \begin{matrix} \Phi'_m \\ \alpha_m \Phi_m \end{matrix} \right\},$$

که در آن،

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 2 \frac{\bar{h}^4 \bar{\omega}^2 \bar{G}^2 - a^2 \alpha_m^2 \bar{h}^2 \bar{G} K^2 + 6(1-\nu) K^4}{K^2 (1-\nu) (\bar{h}^4 \bar{\omega}^2 \bar{G} - 12K^2)}, \\ \Lambda_2 &= \frac{2a^2 \bar{h}^2 \bar{G}}{(1-\nu) (\bar{h}^4 \bar{\omega}^2 \bar{G} - 12K^2)}, \\ \Lambda_3 &= -\frac{a^2 \bar{h}^2 \bar{G}}{\bar{h}^4 \bar{\omega}^2 \bar{G} - 12K^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

## ۵- بحث و بررسی نتایج عددی

با ارضای شرایط مرزی دلخواه در دو لبه موازی غیر تکیه‌گاه ساده و اعمال شرط وابستگی دستگاه معادلات حاصله، مقادیر فرکانس‌های طبیعی ورق و شکل‌های مود مربوط به هر یک به دست می‌آید. برای سهولت، شرایط مرزی ورق

طبیعی مربوط به شرط مرزی لبه آزاد بوده و بیشترین مقادیر فرکانس‌های طبیعی مربوط به لبه گیردار می‌باشد. بر این اساس، می‌توان شرایط مرزی را از کمترین مقادیر فرکانس طبیعی تا بیشترین مقادیر به صورت SFSF، SSSF، SCSF، SSSS، SSSC و SCSC مرتب نمود.

در شکل ۲، شش شکل مود اول ارتعاشات یک ورق مستطیلی همسانگرد عرضی با نسبت اضلاع  $\eta = 0.5$ ، نسبت ضخامت به ضلع  $\bar{h} = 0.1$  و نسبت مدول برشی  $\bar{G} = 2/5$  با شرایط مرزی مختلف ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که تغییرات چند شکل مود اول مربوط به راستای ضلع بزرگتر ورق بوده و به ازای شرایط مرزی مختلف، سه شکل مود اول به ترتیب، به صورت (۱و۱)، (۱و۲) و (۱و۳) می‌باشد. دیده می‌شود که برای ورق‌هایی که شرایط مرزی اضلاع کوچکتر به صورت دو لبه آزاد و یا یک لبه آزاد و یک لبه روی تکیه‌گاه ساده است، شکل مود چهارم به صورت (۱و۴) می‌باشد. اما برای سایر شرایط مرزی که در آنها حداقل یکی از لبه‌های کوتاه‌تر گیردار بوده و یا هر دو لبه کوتاه‌تر روی تکیه‌گاه ساده قرار گرفته‌اند، تغییر شکل ورق در راستای ضلع کوتاه‌تر، شکل مود چهارم به صورت (۲و۱) می‌باشد.

های طبیعی، برای یک ورق همسانگرد عرضی بیشتر از ورق همسانگرد است. این مساله به دلیل تأثیر بیشتر خواص مکانیکی راستای ضخامت ورق، برای ورق‌های ضخیم است. از این رو، مقدار خطای ناشی از تحلیل دینامیکی ورق‌های غیرهمسانگرد بر پایه تئوری کلاسیک به مراتب بیشتر از ورق‌های همسانگرد است. در کل مقادیر فرکانس‌های طبیعی ورق همسانگرد، نسبت به ورق همسانگرد عرضی با نسبت مدول برشی  $\bar{G} = 2/5$  اندکی بیشتر است زیرا ورق همسانگرد عرضی انتخاب شده نسبت به ورق مشابه همسانگرد، در راستای ضخامت، سفتی برشی کمتری دارد. با مقایسه مقادیر عددی جدول ۲ دیده می‌شود که این اختلاف برای فرکانس‌های طبیعی بالاتر بیشتر می‌شود. نکته مهم دیگری که از مقایسه مقادیر فرکانس‌های عددی جدول ۲ به دست می‌آید، این است که افزایش ضخامت ورق‌های همسانگرد عرضی می‌تواند موجب جابه‌جا شدن مودهای ارتعاشی مشخصی گردد. این وضعیت در مورد ورق‌هایی که دارای حداقل یک لبه گیردار هستند کاملاً مشهود است. این مساله برپایه تئوری کلاسیک دیده نمی‌شود. لازم به ذکر است که قبلاً پدیده جابه‌جایی مودهای ارتعاشی، برای ورق‌های همسانگرد گزارش شده است [۱۹]. در شکل ۱ دیده می‌شود که کمترین فرکانس

جدول (۱): مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  یک ورق مربعی همسانگرد.

B.Cs.	Method	Mode Sequences					
		1 <sup>st</sup>	2 <sup>nd</sup>	3 <sup>rd</sup>	4 <sup>th</sup>	5 <sup>th</sup>	6 <sup>th</sup>
SFSF	Ref. [23]	9.4403	15.3897	33.8597	36.3576	42.7926	62.1499
	Ref. [19]	9.4406	15.3892	33.8599	36.3569	42.7926	62.1466
	Present	9.4406	15.3893	33.8599	36.3570	42.7927	62.1467
SSSF	Ref. [23]	11.3727	26.1545	38.2862	53.2465	55.6231	78.3686
	Ref. [19]	11.3731	26.1544	38.2860	53.2462	55.6233	78.3663
	Present	11.3731	26.1545	38.2861	53.2462	55.6234	78.3664
SCSF	Ref. [23]	12.2492	30.4083	38.6346	55.8018	62.7263	78.5285
	Ref. [19]	12.2492	30.4086	38.6342	55.8017	62.7259	78.5265
	Present	12.2492	30.4086	38.6343	55.8017	62.7260	78.5265
SSSS	Ref. [23]	19.0651	45.4831	45.4831	69.7939	85.0385	85.0385
	Ref. [19]	19.0649	45.4826	45.4826	69.7943	85.0380	85.0380
	Present	19.0650	45.4827	45.4827	69.7944	85.0380	85.0380
SSSC	Ref. [23]	22.3882	47.1037	52.1500	74.1049	85.8764	93.2273
	Ref. [19]	22.3886	47.1039	52.1496	74.1051	85.8759	93.2267
	Present	22.3886	47.1039	52.1496	74.1051	85.8759	93.2268
SCSC	Ref. [23]	26.6687	49.1131	59.2097	78.8127	86.8436	101.3720
	Ref. [19]	26.6683	49.1129	59.2101	78.8129	86.8440	101.3717
	Present	26.6683	49.1129	59.2102	78.8130	86.8440	101.3717

جدول (۲): مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد  $\omega a \sqrt{\rho/G}$  یک ورق مربعی با نتایج عددی المان محدود.

(m,i)	Ref. [24] 4-node (consistent mass)	Ref. [24] 9-node (consistent mass)	Ref. [24] 9-node (lumped mass)	Ref. [25]-a 4-node (consistent mass)	Ref. [25]-b 4-node (lumped mass)	Present
(1,1)	0.9487	0.9303	0.9303	0.9327	0.9289	0.93028
(2,1)	2.2878	2.2198	2.2195	2.2394	2.2165	2.21933
(2,2)	3.4896	3.4064	3.4054	3.4381	3.3820	3.40562
(3,1)	4.3352	4.1542	4.1510	4.2364	4.1502	4.14943

جدول (۳): فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد  $\bar{\omega}(m,i)$  ورق مستطیلی همسانگرد عرضی با شرایط مرزی مختلف.

B.Cs.	$\eta$	$\bar{h}$	Mode Sequences				
			1 <sup>st</sup>	2 <sup>nd</sup>	3 <sup>rd</sup>	4 <sup>th</sup>	5 <sup>th</sup>
SSSS	1	1/100	9.6242 (1,1)	24.0321 (1,2)	24.0321 (2,1)	38.4063 (2,2)	47.9704 (1,3)
		1/50	9.6016 (1,1)	23.8923 (1,2)	23.8923 (2,1)	38.0518 (2,2)	47.4200 (1,3)
		1/10	8.9605 (1,1)	20.4745 (1,2)	20.4745 (2,1)	30.3949 (2,2)	36.3613 (1,3)
		1/5	7.5987 (1,1)	15.2875 (1,2)	15.2875 (2,1)	21.0766 (2,2)	24.3496 (1,3)
	2	1/100	24.0321 (1,1)	38.4063 (2,1)	62.2887 (3,1)	81.3281 (1,2)	95.5692 (2,2)
		1/50	23.8923 (1,1)	38.0518 (2,1)	61.3674 (3,1)	79.7724 (1,2)	93.4360 (2,2)
		1/10	20.4745 (1,1)	30.3949 (2,1)	44.5629 (3,1)	54.4077 (1,2)	61.1499 (2,2)
		1/5	15.2875 (1,1)	21.0766 (2,1)	28.6821 (3,1)	33.7094 (1,2)	37.0786 (2,2)
SCSC	1	1/100	14.0959 (1,1)	26.6342 (2,1)	33.6784 (1,2)	45.9057 (2,2)	49.6508 (3,1)
		1/50	14.0057 (1,1)	26.4078 (2,1)	33.2431 (1,2)	45.1962 (2,2)	48.9986 (3,1)
		1/10	11.9004 (1,1)	21.6312 (2,1)	24.8680 (1,2)	32.8950 (2,2)	36.8304 (3,1)
		1/5	8.9058 (1,1)	15.6193 (2,1)	16.4832 (1,2)	21.6149 (2,2)	24.4475 (3,1)
	2	1/100	46.1278 (1,1)	56.0229 (2,1)	75.5582 (3,1)	105.6311 (4,1)	121.9859 (1,2)
		1/50	45.1132 (1,1)	54.6661 (2,1)	73.5249 (3,1)	102.3142 (4,1)	116.4913 (1,2)
		1/10	29.4497 (1,1)	35.6232 (2,1)	47.2024 (3,1)	60.5962 (1,2)	62.4772 (4,1)
		1/5	17.8962 (1,1)	22.2194 (2,1)	29.1430 (3,1)	34.2939 (1,2)	37.2799 (4,1)
SFSF	1	1/100	4.6957 (1,1)	7.8424 (1,2)	17.8266 (1,3)	18.9633 (2,1)	22.7176 (2,2)
		1/50	4.6883 (1,1)	7.8033 (1,2)	17.6927 (1,3)	18.8662 (2,1)	22.5506 (2,2)
		1/10	4.5136 (1,1)	7.2437 (1,2)	15.6047 (1,3)	16.5882 (2,1)	19.3248 (2,2)
		1/5	4.1014 (1,1)	6.2534 (1,2)	12.4265 (1,3)	12.8509 (2,1)	14.6133 (2,2)
	2	1/100	4.6375 (1,1)	13.3009 (1,2)	18.7531 (2,1)	31.2133 (2,2)	42.4004 (3,1)
		1/50	4.6301 (1,1)	13.1524 (1,2)	18.6524 (2,1)	30.8053 (2,2)	41.9311 (3,1)
		1/10	4.4613 (1,1)	11.4693 (1,2)	16.4056 (2,1)	25.0138 (2,2)	32.8424 (3,1)
		1/5	4.0655 (1,1)	9.0646 (1,2)	12.7510 (2,1)	18.0872 (2,2)	22.4985 (3,1)
SSSC	1	1/100	11.5226 (1,1)	25.1555 (2,1)	28.5283 (1,2)	41.8561 (2,2)	48.7229 (3,1)
		1/50	11.4764 (1,1)	24.9822 (2,1)	28.2696 (1,2)	41.3532 (2,2)	48.1300 (3,1)
		1/10	10.2873 (1,1)	21.0073 (2,1)	22.6814 (1,2)	31.6223 (2,2)	36.5846 (3,1)
		1/5	8.2238 (1,1)	15.4478 (2,1)	15.9113 (1,2)	21.3473 (2,2)	24.3977 (3,1)
	2	1/100	33.6784 (1,1)	45.9057 (2,1)	67.9415 (3,1)	99.9288 (4,1)	100.5593 (1,2)
		1/50	33.2431 (1,1)	45.1962 (2,1)	66.6053 (3,1)	97.3309 (4,1)	97.4115 (1,2)
		1/10	24.8680 (1,1)	32.8950 (2,1)	45.8257 (3,1)	57.7288 (1,2)	61.7912 (4,1)
		1/5	16.4832 (1,1)	21.6149 (2,1)	28.9051 (3,1)	34.0673 (1,2)	37.1775 (4,1)
SCSF	1	1/100	6.1783 (1,1)	16.0695 (1,2)	20.2959 (2,1)	30.6016 (2,2)	35.1510 (1,3)
		1/50	6.1583 (1,1)	15.9529 (1,2)	20.1759 (2,1)	30.2892 (2,2)	34.7421 (1,3)
		1/10	5.7832 (1,1)	13.7671 (1,2)	17.5335 (2,1)	24.5222 (2,2)	27.0976 (1,3)
		1/5	5.0550 (1,1)	10.5660 (1,2)	13.4251 (2,1)	17.5169 (2,2)	18.6805 (1,3)
	2	1/100	11.0779 (1,1)	24.6333 (2,1)	47.8978 (3,1)	48.3045 (1,2)	63.8116 (2,2)
		1/50	10.9947 (1,1)	24.3904 (2,1)	47.2211 (3,1)	47.4279 (1,2)	62.3200 (2,2)
		1/10	9.6704 (1,1)	20.2199 (2,1)	33.4449 (1,2)	35.7478 (3,1)	42.2642 (2,2)
		1/5	7.7488 (1,1)	14.9475 (2,1)	21.4487 (1,2)	24.0159 (3,1)	26.8366 (2,2)
SSSF	1	1/100	5.6930 (1,1)	13.4996 (1,2)	20.0540 (2,1)	28.7076 (2,2)	30.0672 (1,3)
		1/50	5.6794 (1,1)	13.4293 (1,2)	19.9425 (2,1)	28.4679 (2,2)	29.8184 (1,3)
		1/10	5.4108 (1,1)	12.1446 (1,2)	17.4143 (2,1)	23.7139 (2,2)	24.8592 (1,3)
		1/5	4.8312 (1,1)	9.9220 (1,2)	13.3840 (2,1)	17.2955 (2,2)	18.1212 (1,3)
	2	1/100	7.8424 (1,1)	22.7176 (2,1)	36.5380 (1,2)	46.6100 (3,1)	53.7174 (2,2)
		1/50	7.8033 (1,1)	22.5506 (2,1)	36.1634 (1,2)	46.0245 (3,1)	52.8634 (2,2)
		1/10	7.2437 (1,1)	19.3248 (2,1)	29.4499 (1,2)	35.3838 (3,1)	39.6880 (2,2)
		1/5	6.2535 (1,1)	14.6133 (2,1)	21.0002 (1,2)	23.9227 (3,1)	26.5313 (2,2)

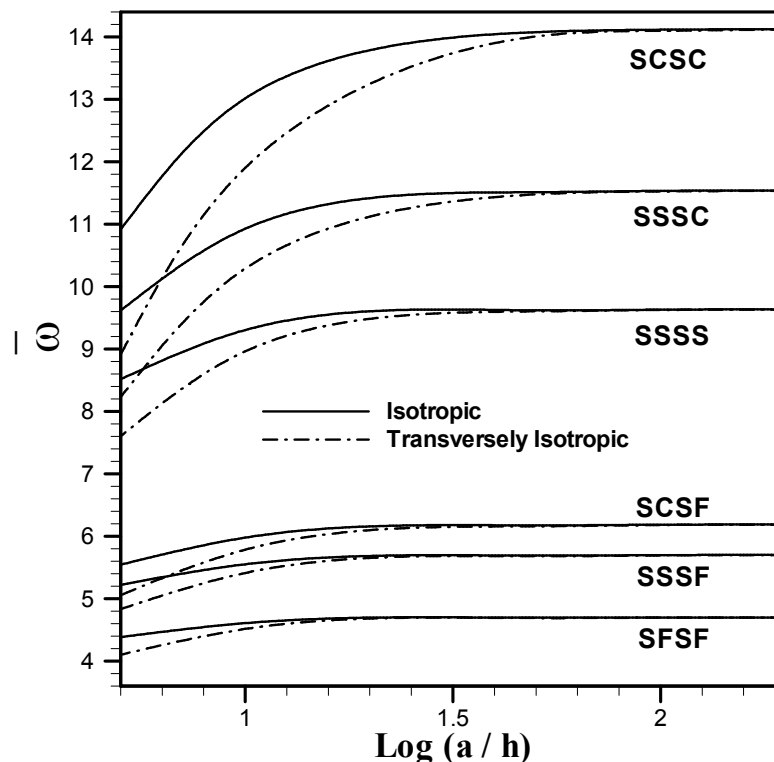


## ۶- نتیجه‌گیری

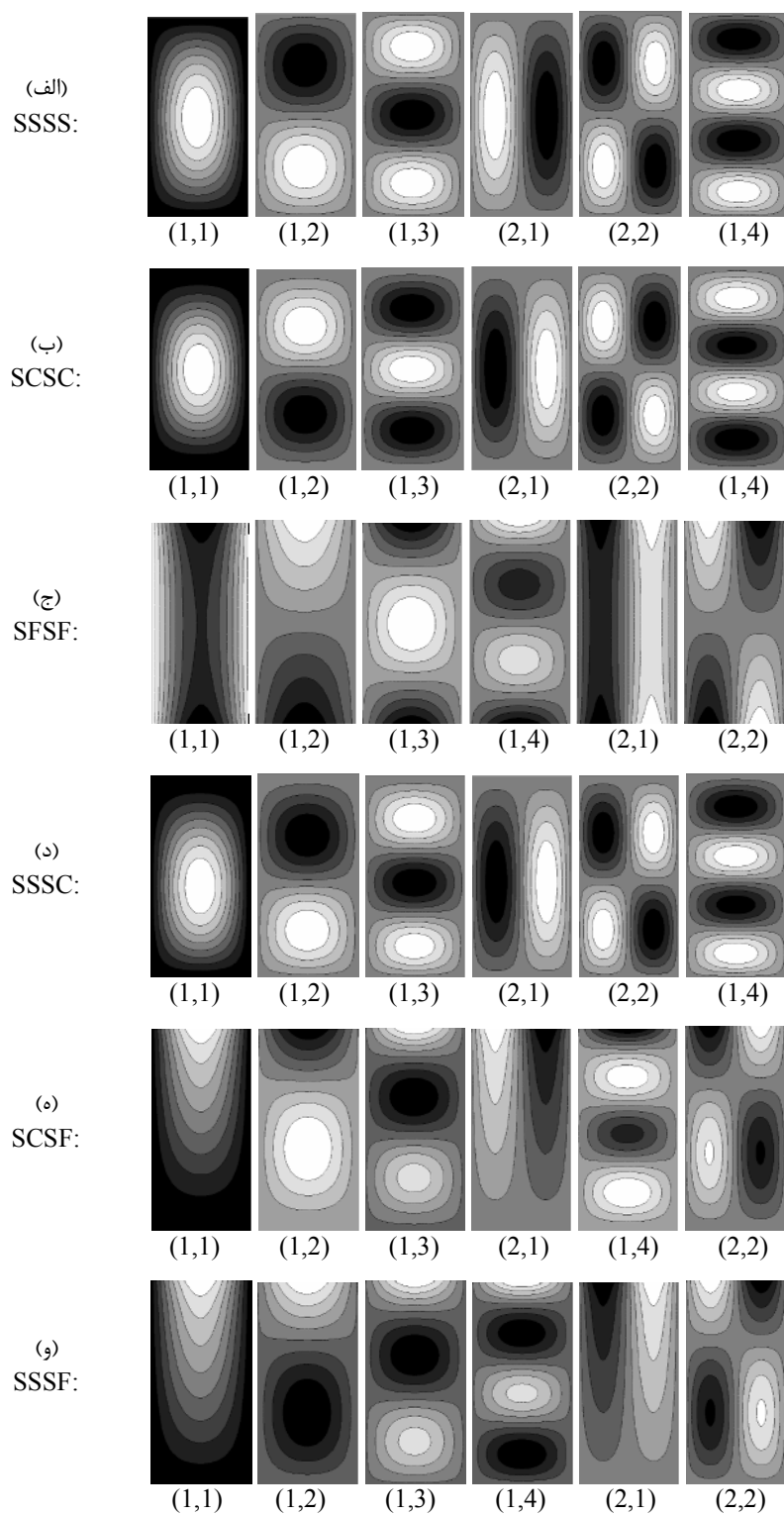
بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی از موضوعاتی است که از دیرباز مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است. در سالیان گذشته تلاش‌های زیادی برای تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم برپایه تئوری‌های برشی صورت گرفته است. اکثر تحلیل‌های صورت گرفته با استفاده از روش‌های عددی و تقریبی صورت گرفته است. کارهای تحلیلی معدودی در این زمینه وجود دارد که همگی به بررسی ورق‌های همسانگرد محدود می‌شوند. در تحلیل حاضر، برای ورق‌های کامپوزیتی با رفتار همسانگرد عرضی، بر پایه تئوری برشی مرتبه اول، پاسخ تحلیلی دقیق ارائه شد. برخی از مهم‌ترین نتایج حاصل از این تحلیل به صورت زیر می‌باشد:

▪ تأثیر افزایش ضخامت بر مقادیر فرکانس‌های طبیعی، برای یک ورق همسانگرد عرضی بیشتر از ورق ایزوتروپیک است،

- برای ورق‌های نازک، مقادیر فرکانس‌های طبیعی مربوط به ورق همسانگرد و همسانگرد عرضی به هم نزدیک هستند،
- مقدار خطای ناشی از تحلیل دینامیکی ورق‌های غیر همسانگرد بر پایه تئوری کلاسیک به مراتب بیشتر از ورق‌های همسانگرد است،
- مقادیر فرکانس‌های طبیعی یک ورق همسانگرد عرضی که مدول برشی راستای ضخامت کمتر از مدول برشی صفحه‌ای باشد، به علت سفتی برشی کمتر نسبت به ورق مشابه همسانگرد اندکی کمتر است،
- افزایش ضخامت ورق می‌تواند موجب جابه‌جا شدن مودهای ارتعاشی مشخصی گردد. این وضعیت در مورد ورق‌هایی که دارای حداقل یک لبه گیردار هستند بیشتر دیده می‌شود و
- اختلاف مقادیر فرکانس‌های طبیعی ورق همسانگرد عرضی نسبت به ورق مشابه همسانگرد برای فرکانس‌های طبیعی بالاتر بیشتر می‌شود.



شکل (۱): نمودار تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب نسبت ضلع به ضخامت برای ورق مربعی با شرایط مرزی مختلف.



شکل (۲): شکل موده‌های ارتعاشات یک ورق مستطیلی ایزوتروپیک عرضی با شرایط مرزی مختلف.

## مراجع

- Naval Architects of Korea, Vol. 29, No. 3, pp. 140-148, 1992.
15. Dawe, D.J. and Wang, S. "Spline Finite Strip Analysis of the Buckling and Vibration of Rectangular Composite Laminated Plates", *International J. Mechanical Sciences*, Vol. 37, No. 6, pp. 645-667, 1995.
  16. Akhras, G., Cheung M.S., and LI, W. "Vibration and Stability Analysis of Thick Anisotropic Composite Plates by Finite Strip Method", *Computer and Structures*, Vol. 49, No. 6, pp. 963-967, 1993.
  17. Qian, L.F., Batra, R.C., and Chen, L.M. "Static and Dynamic Deformations of Thick Functionally Graded Elastic Plates by Using Higher-Order Shear and Normal Deformable Plate Theory and Meshless Local Petrov-Galerkin Method", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 35, No's. 6-8, pp. 685-697, 2004.
  18. Khdeir, A.A. and Reddy, J.N. "Dynamic Response of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Plates Subjected to Arbitrary Loading", *J. Sound and Vibration*, Vol. 126, No. 3, pp. 437-445, 1988.
  19. Hashemi, S.H. and Arsanjani, M. "Exact Characteristic Equations for Some of Classical Boundary Conditions of Vibrating Moderately Thick Rectangular Plates", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 42, No. 4, pp. 819-853, 2005.
  20. Reddy, J.N. "An Introduction to Continuum Mechanics", Cambridge Univ. Press, New York, 2006.
  21. Reddy, J.N. "Energy and Variational Methods in Applied Mechanics", John Wiley & Sons, New York, 1984.
  ۲۲. سعیدی، ع.، "بررسی پدیده لایه مرزی در ورقهای چند لایه مستطیلی تحت بارگذاری استاتیکی بر طبق تئوریهای برشی"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۷۵
  23. Liew, K.M., Xiang, Y., and Kitipornchai, S. "Transverse Vibration of Thick Rectangular Plates, I. Comprehensive Sets of Boundary Conditions", *Computers and Structures*, Vol. 49, No. 2, pp. 1-29, 1993.
  24. Lee, S.J. and Han, S.E. "Free-Vibration Analysis of Plates and Shells with a Nine-Node Assumed Natural Degenerated Shell Element", *J. Sound and Vibration*, Vol. 241, No. 4, pp. 605-633, 2001.
  25. Lee, S.J. "Free Vibration Analysis of Plates by Using a Four-node Finite Element Formulated with Assumed Natural Transverse Shear Strain", *J. Sound and Vibration*, Vol. 278, No. 1, pp. 657-684, 2004.
  1. Chladni, E.F.F. "Die Akustik", Leipzig, 1802.
  2. Reissner, E. "On the Theory of Bending of Elastic Plates", *J. Mathematics and Physics*, Vol. 23, No. 2, pp. 184-191, 1944.
  3. Mindlin, R.D. "Influence Rotatory Inertia and Shear in Flexural Motion of Isotropic, Elastic Plates", *ASME J. Applied Mechanics*, Vol. 18, No. 2, pp. 31-38, 1951.
  4. Mindlin, R.D., Schacknow, A., and Deresiewicz, H. "Flexural Vibration of Rectangular Plates", *ASME J. Applied Mechanics*, Vol. 23, No. 2, pp. 430-436, 1956.
  5. Ghugal, Y.M. and Shimpi, R.P. "A Review of Refined Shear Deformation Theories of Isotropic and Anisotropic Laminated Plates" *J. Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 21, No. 9, pp. 775-813, 2002.
  6. Noor, A.K. and Burton, W.S. "Assesment of Computational Models for Multilayered Anisotropic Plates", *Composite Structures*, Vol. 14, No. 3, pp. 233-265, 1990.
  7. Liew, K.M., Xiang, Y., and Kitipornchai, S. "Research on Thick Plate Vibration: A Literature Survey", *J. Sound and Vibration*, Vol. 180, No. 1, pp. 163-176, 1995.
  8. Batra R.C. and Jin, J. "Natural Frequencies of a Functionally Graded Anisotropic Rectangular Plate", *J. Sound and Vibration*, Vol. 282, No's. 1-2, pp. 509-516, 2005.
  9. Chandrashekhara, K. and Agarwal, A.N. "Active Vibration Control of Laminated Composite Plates, Using Piezoelectric Devices: A Finite Element Approach", *J. Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 4, No. 4, pp. 496-508, 1993.
  10. Liu, S. "A Vibration Analysis of Composite Laminated Plates", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 9, No. 4, pp. 295-307, 1991.
  11. Nayak, A.K., Moy, S.S.J., and Shenoi, R.A. "Free Vibration Analysis of Composite Sandwich Plates Based on Reddy's Higher Order Theory", *Composites Part B: Eng.*, Vol. 33, No 7, pp. 505-519, 2002.
  12. Lee, J.M., Chung, J.H., and Chung, T.Y. "Free Vibration Analysis of Symmetrically Laminated Composite Rectangular Plates", *J. Sound Vibration*, Vol. 199, No. 1, pp. 71-85, 1997.
  13. Papazoglou, V.J., Tsouvalis, N.G., and Lazaridis, A.G. "A Non-destructive Evaluation of the Material Properties of a Composite Laminated Plate", *Applied Composite Materials*, Vol. 3, No. 5, pp. 321-334, 1996.
  14. Chung, J.H. and Chung, T.Y. "Vibration Analysis of Symmetrically Laminated Composite Rectangular Plates", *J. Society of*