

به کارگیری روش درونیابی مشتق تعمیم یافته جهت بررسی عملکرد یاتاقان‌های ژورنال غیرمدور دولب با روان کار میکروپلار

مهدی زارع مهرجردی^۱ و اصغر دشتی رحمت‌آبادی^۲

دانشکده فنی و مهندسی

دانشگاه یزد

(تاریخ دریافت: ۸۸/۴/۸؛ تاریخ پذیرش: ۹۰/۴/۱۹)

چکیده

روش درونیابی مشتق تعمیم یافته یک روش حل عددی مرتبه بالاست که در آن برخلاف سایر روش‌های عددی، از مقادیر تابع آزمایشی مورد استفاده بر روی تمامی نقاط نمونه درون دامنه مسأله، برای حدس مقادیر مشتق تابع مجهول اصلی استفاده می‌شود. لذا، این روش نسبت به سایر روش‌های عددی، نظیر روش‌های اجزاء محدود و تفاضل محدود، در دستیابی به نتایج سرعت هم‌گرایی بالاتری را با دقت یکسان دارد. این روش در حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر مسائل مختلف نیز توانایی بالایی دارد. در کار حاضر، مشخصه‌های عملکرد استاتیکی یاتاقان‌های ژورنال مدور و غیرمدور دولب، تحت شرایط روان کاری با سیال میکروپلار، با استفاده از روش درونیابی مشتق تعمیم یافته، مورد بررسی قرار گرفته و تأثیر پارامترهای هندسی مختلف، مانند ابعاد یاتاقان و پربلود، بر عملکرد این گروه از یاتاقان‌ها بررسی می‌شود. مقایسه نتایج در حالات مختلف برای یاتاقان ژورنال مدور نشان دهنده برقراری تطابق مناسب بین نتایج حاصل از روش درونیابی مشتق تعمیم یافته و سایر روش‌های عددی می‌باشد. همچنین، نتایج حاصل از بررسی یاتاقان‌های ژورنال غیرمدور دولب بیانگر افزایش قابلیت حمل بار یاتاقان، کاهش ضریب اصطکاک، زاویه وضعی و نشتی روان کار از یاتاقان با جایگزینی روان کار میکروپلار به جای انواع نیوتنی آن می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: روش درونیابی مشتق تعمیم یافته، روان کاری هیدرودینامیکی، روان کار میکروپلار، یاتاقان ژورنال مدور

Application of Generalized Differential Quadrature Method to Non-circular Two-lobe Journal Bearings' Performance Analysis

M. Zare-Mehrjardi and A. Dashti Rahmatabadi

Eng. Dep't.

Yazd Univ.

(Received: 29 June, 2009; Accepted: 10 July, 2011)

ABSTRACT

This paper presents the application of generalized differential quadrature (GDQ) method for analysis of circular and non-circular (two-lobe) journal bearings, lubricated with micro polar fluid. Generalized differential quadrature is a simple, efficient, and high-order numerical technique, which uses the information on all sample grid points to approach the derivatives of the unknown function. The effectiveness of the solution technique is verified by comparing the GDQ computed results with previous results of circular journal bearing. It is seen from the results that GDQ method can easily compete with existing methods of solution of lubrication problems for its analytical simplicity, less computer storage requirements, and capability of producing accurate results with a very high computational efficiency. Also, GDQ results for two-lobe journal bearing, lubricated with micro polar fluids, show an increase in load carrying capacity and decrease in the coefficient of friction, attitude angle, and side leakage for bearing in comparison with the same bearing lubricated with Newtonian fluid.

Keywords: GDQ Method, Hydrodynamical Lubrication, Micropolar Lubricator, Circular Journal Bearing

۱- دانشجوی دکتری: Mahdi_zare@stu.yazduni.ac.ir

۲- دانشیار (نویسنده پاسخگو): Dashti@yazduni.ac.ir

به اهمیت سرعت و دقت در انجام محاسبات مورد نیاز در تحلیل اکثر مسائل مهندسی از جمله مسائل حوزه روان کاری، محققین همواره در پی یافتن روش‌های حل عددی کاراتر، ساده‌تر و با سرعت همگرایی بالاتر جهت دستیابی به نتایج مورد نظر خود بوده‌اند. روش درون‌یابی مشتق روشی ساده، دقیق و کارا برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای خطی و غیرخطی همراه با شرایط اولیه و مرزی می‌باشد. این روش، اولین بار توسط بلمن^{۱۴} و کاستی^{۱۵} در سال ۱۹۷۱ معرفی شد [۱۶]. در ادامه نیز پژوهش‌های زیادی در راستای گسترش و تکامل این روش و تعمیم آن به شاخه‌های مختلف علوم مهندسی صورت گرفت. شو^{۱۶} و ریچارد^{۱۷} در سال ۱۹۹۲ موفق به استخراج یک رابطه بازگشتی جدید برای استخراج ضرایب وزنی در روش درون‌یابی مشتق شدند و روش خود را روش درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته^{۱۸} نامیدند [۱۷]. برت^{۱۹} و مالیک^{۲۰} در سال ۱۹۹۴ مسئله مربوط به روان کاری پایدار با استفاده از روان کار در حالات تراکم ناپذیر و تراکم پذیر را مورد بررسی قرار دادند [۱۸]. همچنین زانگ^{۲۱} و همکارانش در سال ۲۰۰۲ نیز تحلیل دسته خاصی از یاتاقان‌های ژورنال مدور هیدرودینامیکی را با استفاده از این روش انجام دادند [۱۹]. تحلیل‌های انجام گرفته در حوزه روان کاری یاتاقان‌های لغزشی و ژورنال مدور با استفاده از روش حل عددی مذکور، سادگی، سرعت و کارایی بالاتر آن را نسبت سایر روش‌های حل عددی مطرح به اثبات رسانید.

در پژوهش‌های انجام گرفته تاکنون نتایج حاصل از بررسی عملکرد یاتاقان‌های ژورنال غیر مدور هیدرودینامیکی با روان کار میکروپلار ارائه نگردیده‌اند. در کار حاضر تحلیل و بررسی‌ها حول محور عملکرد یاتاقان‌های ژورنال غیر مدور دولب^{۲۲} با روان کار میکروپلار توسط روش درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته شکل گرفته‌اند. نتایج حاصل تأثیر هر یک از پارامترهای ویژه مربوط به ساختار روان کار (نظیر طول

دادند [۶]. تحقیق روی مکانیک سیالاتی با ساختار میکرو، اولین بار توسط جفری^۱ در سال ۱۹۲۲ انجام شد [۷]. در اواسط دهه ۶۰ میلادی ارینگن^۲ مطالعات گسترده‌تری را در زمینه سیالات با ساختار میکرو انجام داد [۸]. تعریف ارینگن از سیال میکرو، محیط لزجی بود که رفتار و ویژگی‌های آن متأثر از حرکت محلی ذرات موجود در حجم معیارهای کوچک داخل آن بود. او این نوع از سیالات را با ۲۲ ضریب تعیین کننده اثر لزجت معرفی نمود. همچنین او شاخه‌ای از این سیالات که در آنها از تغییر شکل المان‌های زیرساختی سیال صرف‌نظر شده و تنها حرکات چرخشی و خطی میکرو ذرات مورد بررسی قرار می‌گرفتند را بررسی و این دسته از سیالات را تحت عنوان سیالات میکروپلار نام‌گذاری نمود [۹]. در سال ۱۹۸۹ خونساری^۳ و بریوو^۴ عملکرد یاتاقان‌های ژورنال ژورنال مدور هیدرودینامیکی با روان کار میکروپلار^۵ را مورد بررسی قرار دادند [۱۰]. وانگ و ژو^۶ در سال ۲۰۰۶ مشخصه‌های عملکرد یاتاقان‌های ژورنال مدور را با در نظر گرفتن تأثیرات حرارت و کاویتاسیون ایجاد شده در فیلم روان کار مورد بازنگری قرار دادند [۱۱]. نیر^۷ و سوکاماران^۸ در سال ۲۰۰۷ عملکرد یاتاقان‌های ژورنال بیضوی تحت روان کاری الاستوهیدرودینامیکی با روان کار میکروپلار را بررسی نمودند [۱۲]. دورانی^۹ و همکارانش در سال ۲۰۰۸ مسئله روان کاری در حالت پایا و گذرا با لحاظ اثرات دمایی را توسط ترکیبی از روش‌های حل عددی اجزاء محدود، حجم محدود و المان مرزی انجام دادند [۱۳]. در سال ۲۰۰۹ این نحوه بررسی، توسط ون استاید^{۱۰} و ون بیک^{۱۱} به یاتاقان‌های بیضوی تعمیم داده شد [۱۴]. در سال ۲۰۱۱ تحلیل یاتاقان‌های ژورنال تحت روان کاری میکروپلار با فیلم فشرده توسط نادووینامانی^{۱۲} و سانتوش^{۱۳} انجام گرفت [۱۵]. با توجه

- 1- Jeffery
- 2- Eringen
- 3- Khonsari
- 4- Brewe
- 5- Micropolar Lubricant
- 6- Wang & Zhu
- 7- Nair
- 8- Sukamaran
- 9- Durany
- 10- Van-ostayed
- 11- Van-beek
- 12- Naduvinamani
- 13- Santosh

- 14- Bellman
- 15- Casti
- 16- Shu
- 17- Richards
- 18- Generalized Differential Quadrature (GDQ) Method
- 19- Bert
- 20- Malik
- 21- Zhang
- 22- Two-Lobe

$$\Phi(X) = \frac{M(X)}{(X - X_k)M^{(1)}(X_k)} \quad k = 1, 2, \dots, N_x, \quad (2)$$

که در رابطه فوق:

$$M(X) = \prod_{k=1}^{N_x} (X - X_k). \quad (3)$$

همچنین، $M^{(1)}(X)$ مشتق مرتبه اول تابع $M(X)$ می‌باشد که از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$M^{(1)}(X) = \prod_{k=1, k \neq i}^{N_x} (X - X_k). \quad (4)$$

با جای‌گذاری رابطه (۲) در عبارت (۱) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$A_{ik}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(X_i)}{(X_i - X_k)M^{(1)}(X_k)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_x, \quad k = 1, 2, \dots, N_x, \quad (5)$$

$$A_{ii}^{(1)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^{N_x} A_{ik}^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_x, \quad i \neq k. \quad (6)$$

شو و ریچاردز^۴ در مقالات خود روش بازگشتی زیر را برای محاسبه ضرایب وزنی مربوط به مشتقات مراتب بالاتر یک تابع در راستای x پیشنهاد کردند [۱۷]:

$$A_{ik}^{(r)} = r \left(A_{ii}^{(r-1)} A_{ik}^{(1)} - \frac{A_{ik}^{(r-1)}}{X_i - X_k} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N_x, \quad k = 1, 2, \dots, N_x, \quad (7)$$

$$r = 1, 2, \dots, N_x - 1.$$

برای محاسبه درایه‌های قطر اصلی نیز رابطه زیر ارائه شد:

$$A_{ii}^{(r)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^{N_x} A_{ik}^{(r)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_x. \quad (8)$$

روش‌های مختلفی برای تعیین مکان نقاط نمونه بر روی دامنه مسئله وجود دارد که در بررسی حاضر از صفرهای جابه‌جا شده چندجمله‌ای چبیشف به صورت زیر استفاده شده است:

$$x_i = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{(2i-1)\pi}{2N_x} \right), \quad i = 2, 3, \dots, N_x - 1, \quad (9)$$

$$0 < x_i < 1.$$

مشخصه^۱ و عدد کوپلینگ^۲ و شکل هندسی (همانند میزان پریلود^۳) را بر وضعیت کارکرد یاتاقان‌های مورد بررسی نمایش می‌دهند. همچنین یافته‌ها، گویای توانمندی روش درونیابی مشتق در کاهش زمان محاسبات و افزایش سرعت هم‌گرایی تحلیل‌ها در حوزه مسائل مربوط به روان‌کاری یاتاقان‌های ژورنال هیدرودینامیکی غیر مدور می‌باشند.

۲- روش درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته

این روش، اغلب برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسائل با ابعاد بیش از یک و نیز با دامنه‌های هندسی غیرمنظم استفاده می‌شود. اما با توجه به شرایط حاکم بر مسئله حاضر، استفاده از این روش برای تحلیل معادله حاکم بر یک دامنه هندسی مربعی منظم $0 < x < 1$ و $0 < y < 1$ تشریح می‌شود. بر اساس قوانین روش درون‌یابی مشتق، مشتقات جزئی یک تابع در هر نقطه‌ای از راستای خاص توسط مجموع وزن‌دار مقادیر تابع در تمامی نقاط گرهی نمونه انتخاب شده در آن راستای خاص به دست می‌آید. بنابراین برای مشتق مرتبه n تابع مفروض $\psi = \psi(x, y)$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} \Big|_{x_i, y_j} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(n)} \psi(x_k, y), \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_x \quad \text{و} \quad j = 1, 2, \dots, N_y,$$

که در آن، N_x و N_y به ترتیب تعداد نقاط گرهی نمونه انتخاب شده در راستای محور x و محور y بوده و $A_{ij}^{(n)}$ نیز ماتریس ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبه n ام تابع $\psi(x, y)$ در راستای محور x و در نقطه $x = x_i$ است. برای تعیین ماتریس ضرایب وزنی باید از یک تابع تقریب آزمایشی تعریف شده روی دامنه مسئله استفاده نمود. تابع تقریب بایستی شروط کامل بودن و نیز مشتق‌پذیری تا بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله را به صورت هم‌زمان دارا باشد. برحسب نوع مسئله مورد بررسی می‌توان از توابع آزمایشی مختلفی چون توابع تقریب چند جمله‌ای یا هارمونیک استفاده نمود. در بررسی حاضر از توابع تقریب چند جمله‌ای استفاده گردیده است. چندجمله‌ای مورد استفاده، از توابع درون‌یابی لاگرانژ به شکل ذیل انتخاب شده است:

1- Characteristic Length

2- Coupling Number

3- Preload

حرکت محور در درون فضای یاتاقان سبب ایجاد فشار در لایه روان کار قرار گرفته بین سطوح می‌گردد. در یاتاقان‌های ژورنال هیدرودینامیکی، به علت ایجاد پدیده کاویتاسیون که در حین چرخش محور درون یاتاقان ایجاد می‌گردد، فشار در قسمتی از فیلم روان کار، مثبت (فیلم همگرا) و در قسمتی دیگر از فیلم روان کار، منفی (فیلم واگرا) می‌باشد. برای حل این مشکل، فرضیات متفاوتی برای حل مسئله یاتاقان ژورنال هیدرودینامیکی با روان کار تراکم ناپذیر ارائه گردیده که در کار حاضر، از روش شرط مرزی رینولدز برای حل مسئله استفاده می‌شود. استفاده از روش درون‌یابی مشتق، امکان جایگزینی معادلات دیفرانسیل همراه با شرایط مرزی و مقادیر اولیه را با یک دستگاه معادلات جبری خطی فراهم می‌آورد. حل دستگاه مذکور توأم با اعمال شرایط مرزی مسئله، توزیع فشار مجهول مورد نظر را در نقاط نمونه انتخاب شده روی دامنه مسئله به دست می‌دهد.

۳-۱- معادلات حاکم بر روان کاری میکروپلار

برای سیال میکروپلار، علاوه بر معادلات بقاء مومنتوم خطی و پیوستگی، به کارگیری معادله بقاء مومنتوم زاویه‌ای نیز برای دست‌یابی به فرم نهایی معادله رینولدز لازم است. با توجه به تئوری سیال میکروپلار ارینگن و در غیاب نیروهای حجمی، معادله بقاء مومنتوم خطی به فرم زیر نوشته می‌شود [۹]:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + (\lambda_0 + \mu + \mu_r) \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) + (\mu + \mu_r) \nabla \vec{v} + 2\mu_r (\nabla \times \vec{w}), \quad (11)$$

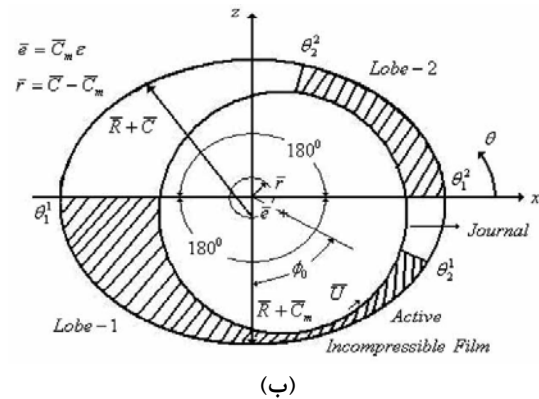
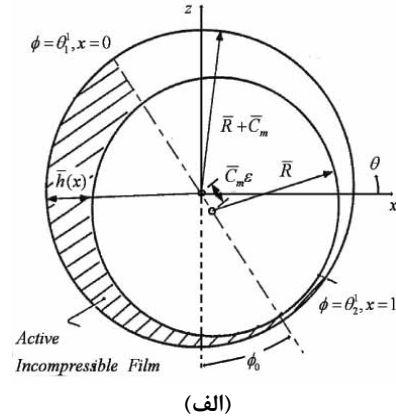
که در آن، \vec{v} بردار سرعت، \vec{w} بردار سرعت چرخش جزئی (سرعت زاویه‌ای چرخش ذرات معلق در سیال)، ρ چگالی، μ لزجت دینامیکی، λ_0 ضریب دوم لزجت دینامیکی و μ_r لزجت دینامیکی چرخشی ذرات معلق در سیال (لزجت دینامیکی میکروروپیشن) است. معادله پیوستگی برای سیال تراکم ناپذیر را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\nabla \cdot (\vec{v}) = 0. \quad (12)$$

همچنین، معادله بقاء مومنتوم زاویه‌ای که حرکت ذرات معلق درون حجم معیار میکرو را تشریح می‌کند، با صرف‌نظر از ممان حجمی با معادله ذیل بیان می‌شود:

$$x_i = 0 \quad \text{for } i = 1 \quad x_i = 1 \quad \text{for } i = N_x. \quad (10)$$

با اندکی تغییر می‌توان دامنه نقاط نمونه فوق را به هر دامنه دیگری تعمیم داد.



شکل (۱): (الف) یاتاقان ژورنال مدور

(ب) یاتاقان ژورنال غیر مدور دولب.

۳- کاربرد

وجود برخی از شرایط ویژه نظیر تقاضا برای به کارگیری یاتاقان در سرعت‌های بالاتر، وجود مسائل ارتعاشی به علت کارکرد در سرعت‌های بحرانی، نامتعادل بودن و ایجاد شرایط ناپایداری بعضاً سبب می‌گردد تا نیاز به استفاده از یاتاقان‌های ژورنال با اشکال هندسی متفاوت با نوع ساده آن در انواع سیستم‌های مکانیکی دارای اجزاء دوار احساس گردد. بر اساس شرایط کاری مختلف تاکنون یاتاقان‌های ژورنال غیرمدور در اشکال مختلف طراحی و مورد استفاده قرار گرفته‌اند. شکل ۱ یاتاقان ژورنال مدور و غیر مدور دولب مورد بررسی در کار حاضر را نشان می‌دهد. در این یاتاقان‌ها،

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\bar{\psi}(N, \bar{\Lambda}, \bar{h})}{\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right] + \bar{R}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[\frac{\bar{\psi}(N, \bar{\Lambda}, \bar{h})}{\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right] = 6\bar{R}\bar{U} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta}, \quad (21)$$

$$\bar{\psi}(N, \bar{\Lambda}, \bar{h}) = \bar{h}^3 + 12\bar{\Lambda}^2 \bar{h} - 6N\bar{\Lambda} \bar{h}^2 \coth \left(\frac{N\bar{h}}{2\bar{\Lambda}} \right). \quad (22)$$

در روابط فوق، ضرایب مرتبط با لزجت و ماده سیال در قالب دو پارامتر N و $\bar{\Lambda}$ ظاهر شده‌اند، این دو پارامتر که بیانگر ویژگی‌های سیال میکروپلار و متمایزکننده آن از سیال نیوتنی هستند، به ترتیب، عدد کوپلینگ و طول مشخصه نامیده می‌شوند. عدد کوپلینگ (N) پارامتر بی‌بعدی است که همبستگی معادلات بقاء مومنتوم خطی و زاویه‌ای را نشان داده و می‌تواند به صورت نسبت نیروهای لزجت چرخشی به نیروهای لزجت نیوتنی سیال ($N^2 = \mu_r / (\mu + \mu_r)$) در نظر گرفته شود. با توجه به ملاحظات ترمودینامیکی، مقدار پارامتر N بین صفر و یک محدود می‌شود. طول مشخصه ($\bar{\Lambda}$)، بیانگر حالت سیال میکروپلار و نشان‌دهنده کنش بین سیال میکروپلار و ضخامت فیلم روان کار ($\bar{\Lambda}^2 = (c_a + c_d) / 4\mu$) است. این پارامتر با بعد طول، تابعی از اندازه مولکول‌ها و یا زیرساخت‌های سیال است. در این مورد نیز در صورتی که مقدار ($\bar{\Lambda}$) به سمت صفر برود، سیال رفتاری نیوتنی خواهد داشت و معادله رینولدز به‌دست آمده به معادله رینولدز کلاسیک تبدیل می‌شود. کمیت‌ها نیز به صورت زیر بی‌بعد می‌شوند:

$$l_m = \frac{\bar{C}_m}{\bar{\Lambda}}, x = \frac{\theta}{\phi}, h = \frac{\bar{h}}{\bar{C}_m}, y = \frac{\bar{y}}{\bar{L}}, p = \frac{\bar{p}\bar{C}_m^2}{\bar{\mu}UR}. \quad (23)$$

معادله رینولدز مناسب جهت روان کاری میکروپلار برای مسئله مورد بررسی به صورت بی‌بعد عبارت است از:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\psi(N, l_m, h) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \left(\frac{\bar{R}\phi}{\bar{L}} \right)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\psi(N, l_m, h) \frac{\partial p}{\partial y} \right] = 6\phi \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (24)$$

$$\psi(N, l_m, h) = h^3 + \frac{12h}{l_m^2} - \frac{6Nh^2}{l_m} \coth \left(\frac{Nhl_m}{2} \right). \quad (25)$$

با توجه به اینکه در تحلیل انجام شده از شرط مرزی رینولدز استفاده شده، پارامتر ϕ در رابطه فوق، نقطه انتهایی فیلم فشاری همگرا (مثبت) را درون فیلم سیال برای هر یک از

$$\rho j \frac{d\bar{w}}{dt} = (c_o + c_d - c_a) \nabla(\nabla \cdot \bar{w}) + (c_d + c_a) \nabla \bar{w} + 2\mu_r (\nabla \times \bar{v} - 2\bar{w}), \quad (13)$$

که در آن، j ثابت اینرسی و c_o, c_d, c_a ضرایب ویسکوزیته زاویه‌ای هستند. بردار سرعت و بردار سرعت میکروروتیشن با توجه به شکل ۱ به صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{v} = (v_x, v_y, 0), \quad (14)$$

$$\bar{w} = (w_x, w_y, 0).$$

در یاتاقان ژورنال با توجه به کوچک بودن ضخامت فیلم سیال نسبت به شعاع ژورنال می‌توان از انحنای فیلم سیال صرف نظر کرده و جریان را بر روی سطح تخت در نظر گرفت. به این ترتیب معادله بقاء مومنتوم خطی در جهات x و y با توجه به پایدار بودن جریان، به صورت زیر ساده می‌شود:

$$(\mu + \mu_r) \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + 2\mu_r \frac{\partial w_y}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (15)$$

$$(\mu + \mu_r) \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} - 2\mu_r \frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (16)$$

مؤلفه‌های معادله بقاء مومنتوم زاویه‌ای نیز به صورت زیر کاهش می‌یابند:

$$(c_a + c_d) \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} - 2\mu_r \frac{\partial v_y}{\partial z} - 4\mu_r w_x = 0, \quad (17)$$

$$(c_a + c_d) \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2} - 2\mu_r \frac{\partial v_x}{\partial z} - 4\mu_r w_y = 0. \quad (18)$$

شرایط مرزی سرعت، بر روی سطح در حال چرخش ژورنال ($z = 0$) درون یاتاقان و پوسته ثابت یاتاقان ($z = h$) به صورت زیر می‌باشد:

$$v_x|_{y=0} = \bar{U}, \quad v_y|_{z=0} = w_x|_{z=0} = w_y|_{z=0} = 0, \quad (19)$$

$$v_x|_{z=h} = v_y|_{z=h} = w_x|_{z=h} = w_y|_{z=h} = 0. \quad (20)$$

انتگرال گیری از معادلات ساده شده مومنتوم خطی و زاویه‌ای با لحاظ کردن شرایط مرزی فوق، مؤلفه‌های سرعت خطی و میکروروتیشن را به دست می‌دهد. با جای گذاری مؤلفه‌های سرعت در معادله پیوستگی و انتگرال گیری از معادله حاصله در عرض فیلم روان کار، معادله رینولدز اصلاح شده برای سیال میکروپلار با فرض دمای متوسط به صورت زیر حاصل می‌شود [۲۱]:

۳-۳- پارامترهای عملکرد یاتاقان

پارامترهای عملکرد یاتاقان ژورنال تحت روان کاری میکروپلار در حالت بی بعد به صورت زیر قابل محاسبه هستند:

الف- مؤلفه های قابلیت حمل بار توسط یاتاقان

۱- مؤلفه بار در امتداد محور x

$$W_x = \phi \int_0^1 \int_0^1 p \cos \theta dx dy, \quad (30)$$

۲- مؤلفه بار در امتداد محور z

$$W_z = -\phi \int_0^1 \int_0^1 p \sin \theta dx dy. \quad (31)$$

بار کلی قابل حمل توسط یاتاقان را می توان از رابطه $W = \sqrt{W_x^2 + W_z^2}$ به دست آورد. با محاسبه بار کلی قابل حمل توسط یاتاقان ژورنال، عدد مشخصه (عدد سامرفیلد) یاتاقان از رابطه $S = (1/\pi W)$ قابل محاسبه می باشد.

ب- زاویه وضعی در یاتاقان

$$\theta_0 = \tan^{-1}(W_z/W_x), \quad (32)$$

ج- آهنگ نشتی روان کار از یاتاقان

$$Q_s = (6\bar{L}\bar{q}_s/\bar{C}_m\bar{U}\bar{R}^2) = \int_0^1 (-\phi\psi(N, l_m, h) \frac{\partial p}{\partial y}) dx, \quad (33)$$

د- نیروی اصطکاک تولید شده در یاتاقان

$$F = (\bar{f}_f \bar{C}_m / \bar{\mu} \bar{U} \bar{R}) = \int_0^1 \int_0^1 A \phi dx dy + \int_0^{2\pi} A \frac{h(\theta)}{h(\phi)} d\theta dy, \quad (34)$$

که در آن مقدار A به صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$A = \frac{h}{2\phi} \frac{\partial p}{\partial x} + 1 \left/ \left(h - \frac{2N}{l_m} \left[\frac{\cosh(Nl_m h) - 1}{\sinh(Nl_m h)} \right] \right) \right. \quad (35)$$

با توجه به روابط فوق، متغیر ضریب اصطکاک در یاتاقان را می توان با استفاده از رابطه $f(\bar{R}/\bar{C}_m) = F/W$ محاسبه نمود. برای انجام محاسبات مربوط به یاتاقان های ژورنال غیر مدور دولب می بایست هر یک از لبها در ابتدا به صورت مجزا مورد بررسی قرار گرفته و در نهایت با استفاده از جمع برداری و یا اسکالر بر حسب نوع پارامتر، برآیند کلی آن کمیت برای یاتاقان کلی محاسبه گردد. از این رو می توان از جمع برداری، فشار روی لبهای یاتاقان جهت یافتن فشار منتجه و یا جمع جبری مؤلفه های بار در راستای محورهای مختصات جهت یافتن بار منتجه استفاده نمود. همچنین نیروی اصطکاک و

لبهای یاتاقان نشان می دهد. به عبارت دیگر برای هر یک از لبهای یاتاقان غیر مدور $\phi = \theta_0^i$ خواهد بود. شرایط مرزی موجود برای مسئله نیز به صورت زیر می باشند:

$$p(0, y) = p(x, 0) = p(x, 1) = p(1, y) = 0, \quad (26)$$

$$(dp/dx)_{(1,y)} = 0. \quad (27)$$

ضخامت فیلم سیال در فضای لقی بین محور و هر یک از لبهای یاتاقان با فرض موازی بودن راستای محور و یاتاقان و حرکت محور به تنهایی به صورت ذیل محاسبه می شود:

$$h_i = \frac{1}{\delta} - \varepsilon \sin \varphi_0 \cos \theta + \varepsilon \cos \theta_0 \sin \theta + \left(\frac{1}{\delta} - 1 \right) \cos(\theta - \theta_0^i), \quad (28)$$

که در آن، $\delta = \bar{C}_m/\bar{C}$ پریلود یاتاقان، θ_0^i زاویه بین محور x و خط واصل مراکز یاتاقان و لب i می باشند. معادله (۲۴)، یک معادله دیفرانسیل جزئی بیضوی است که در حالت کلی حل آن به صورت تحلیلی امکان پذیر نیست. لذا از روش های حل عددی جهت تحلیل این معادله استفاده می شود تا دست یابی به توزیع فشار سیال روان کار ممکن گردد.

۳-۲- روش GDQ و معادلات حاکم

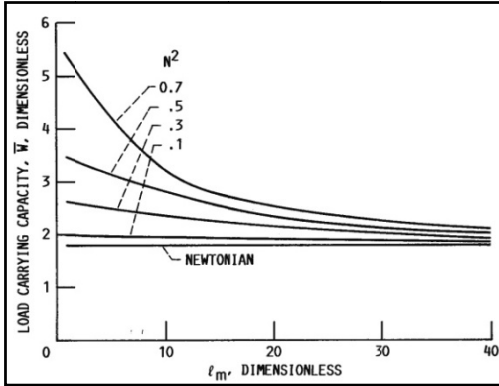
با اعمال قوانین روش درون یابی مشتق تعمیم یافته روی معادله (۲۴) رابطه زیر حاصل می گردد:

$$\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_i \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(1)} p_{kj} + (\psi)_i \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(2)} p_{kj} \right] \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (29)$$

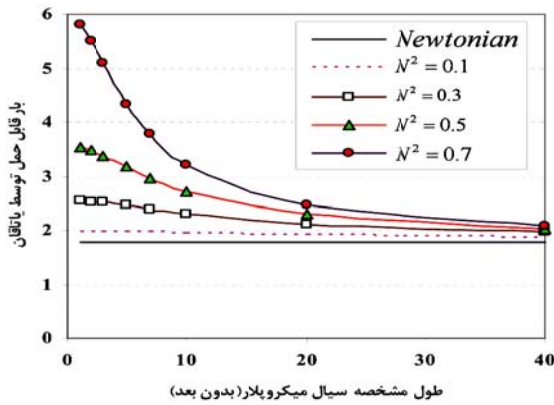
$$+ \left(\frac{\bar{R}\phi}{\bar{L}} \right)^2 \left[(\psi)_i \sum_{l=1}^{N_x} B_{jl}^{(2)} p_{il} \right] = 6\phi \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_i \quad j = 1, 2, \dots, N_y$$

که در آن، $A_{ij}^{(1)}$ و $A_{ij}^{(2)}$ به ترتیب ماتریس های ضرایب وزنی مربوط به مشتقات مراتب اول و دوم تابع ψ در جهت محور x و $B_{ij}^{(2)}$ ماتریس ضرایب وزنی مربوط به مشتق دوم تابع مذکور را در جهت محور y نشان می دهند. همچنین متغیرهای i و j مربوط به مکان نقطه نمونه (x_i, y_j) روی دامنه مسئله می باشد. تحلیل معادله فوق با در نظر گرفتن شرایط مرزی موجود در روابط (۲۶-۲۷) امکان دست یابی به نتایج مورد نظر برای پارامترهای عمل کرد یاتاقان ژورنال مدور و غیرمدور دولب را تحت روان کاری میکروپلار فراهم می آورد.

نتایج، کاهش میزان عدد سامرفیلد و زاویه وضعی در یاتاقان ژورنال مدور را با افزایش میزان خروج از مرکزی (ε) در مقادیر ثابت نسبت طول به قطر (λ)، نمایش می‌دهند.



(الف): نتایج از مرجع [۱۰].



(ب): نتایج حاصل از برنامه (روش GDQ)، طول مشخصه سیال میکروپولار (بدون بعد)

شکل (۲): تغییرات W بر حسب l_m ،

یاتاقان ژورنال مدور ($\delta = 1.0$)، ($\varepsilon = 0.5$ و $L/D = 0.5$).

شکل ۲ نشان‌دهنده افزایش قابلیت حمل بار در یاتاقان ژورنال مدور با تغییر ویژگی‌های روان‌کار از حالت نیوتنی به میکروپولار می‌باشد. همچنین افزایش قابلیت حمل بار برای یاتاقان ژورنال تحت روان‌کاری میکروپولار با افزایش N^2 در l_m ثابت و کاهش قابلیت حمل بار در یاتاقان با افزایش l_m به ازای N^2 ثابت به وضوح در شکل ۲ قابل تشخیص می‌باشد.

دبی نشتی کلی یاتاقان نیز از جمع جبری مقادیر آنها بر روی هر یک از لب‌ها قابل ارزیابی می‌باشند.

۴- بحث و بررسی

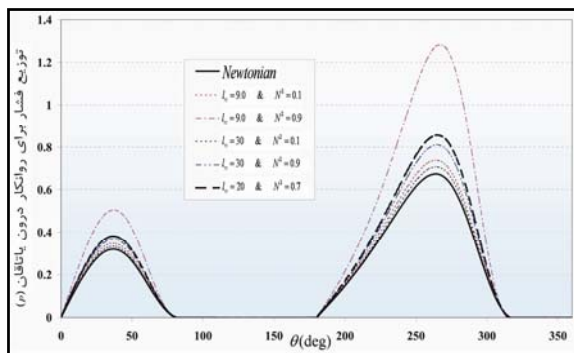
در ابتدا برای تایید صحت عمل‌کرد برنامه آماده شده جهت اعمال روش درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته روی مسئله یاتاقان ژورنال مدور و غیر مدور دولب، نتایج حاصل برای نمونه‌ای از پارامترهای عملکرد یاتاقان ژورنال مدور با نتایج مشابه موجود در مراجع، مقایسه شده‌اند. جدول ۱ و شکل ۲ گویای تطابق مناسب بین نتایج حاصل از کدنویسی انجام شده برای روش درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته و نتایج گزارش شده در مراجع [۱۰ و ۱] بوده و کارکرد صحیح برنامه را تأیید می‌نمایند. در جدول ۱ نتایج حاصل برای عدد سامرفیلد و زاویه وضعی در یاتاقان ژورنال مدور تحت روان‌کاری تراکم‌ناپذیر با روان‌کار نیوتنی در نسبت‌های مختلف طول به قطر برای یاتاقان از روش‌های تفاضل محدود [۱] و درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته ارائه شده‌اند.

جدول (۱): عدد سامرفیلد و زاویه وضعی در یاتاقان

ژورنال مدور با طول محدود، $N_x = 11$ و $N_y = 7$.

λ	ε	S		θ_0	
		FDM	GDQ	FDM	GDQ
۱/۰	۰/۲	۰/۶۳۱	۰/۶۳۲	۷۴/۰۲	۷۳/۹۲۳
	۰/۴	۰/۲۶۴	۰/۲۶۱	۶۳/۱۰	۶۲/۶۴۹
	۰/۶	۰/۱۲۱	۰/۱۲۱	۵۰/۵۸	۵۰/۶۱۹
	۰/۸	۰/۰۴۴۶	۰/۰۴۴۶	۳۶/۲۴	۳۶/۲۸۵
	۰/۹۷	۰/۰۰۴۷	۰/۰۰۴۷	۱۵/۴۷	۱۵/۵۰۷
۰/۵۰	۰/۲	۲/۰۳	۲/۰۳	۷۴/۹۴	۷۵/۱۵۲
	۰/۴	۰/۷۷۹	۰/۷۸۶	۶۱/۴۵	۶۱/۸۰۵
	۰/۶	۰/۳۱۹	۰/۳۲۰	۴۸/۱۴	۴۸/۰۸۵
	۰/۸	۰/۰۹۲۳	۰/۰۹۱۸	۳۳/۳۱	۳۲/۹۷۹
	۰/۹۷	۰/۰۰۶۰۹	۰/۰۰۶۱۸	۱۳/۷۵	۱۳/۸۳۸

در ادامه، نتایج حاصل از روش درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته برای توزیع فشار و پارامترهای عمل‌کرد یاتاقان ژورنال دولب تحت روان‌کاری با سیال میکروپلار ارائه شده‌اند. شکل ۵ گویای تأثیر تغییر در پارامترهای مشخصه روان‌کار میکروپلار بر توزیع فشار درون یاتاقان ژورنال دولب می‌باشد. با توجه به شکل آشکار است که با افزایش میزان N^2 در l_m ثابت برای روان‌کار میکروپلار، پروفیل فشار هم‌گرایی در هر یک از لب‌های یاتاقان تشکیل می‌گردد. همچنین افزایش مقدار l_m برای روان‌کار میکروپلار با N^2 مشخص، سبب کاهش هم‌گرایی در پروفیل فشار روی لب‌های یاتاقان و نزدیکی پروفیل فشار منتهی به حالت روان‌کاری نیوتنی در یاتاقان می‌شود.



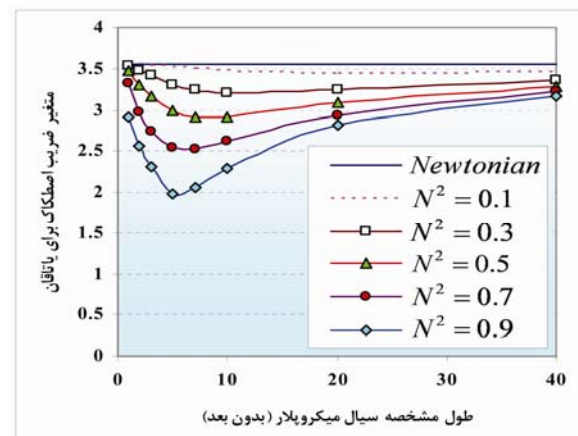
شکل (۵): منحنی توزیع فشار بی‌بعد در صفحه میانی (p) یاتاقان ژورنال دولب، روان‌کار نیوتنی و میکروپلار.

شکل ۶ تأثیر تغییر در پارامترهای مشخصه روان‌کار میکروپلار بر قابلیت حمل بار در یاتاقان دولب را نشان می‌دهد. نتایج، گویای افزایش و کاهش قابلیت حمل بار در یاتاقان به ترتیب با افزایش میزان N^2 در l_m ثابت و افزایش میزان l_m در N^2 ثابت می‌باشند.

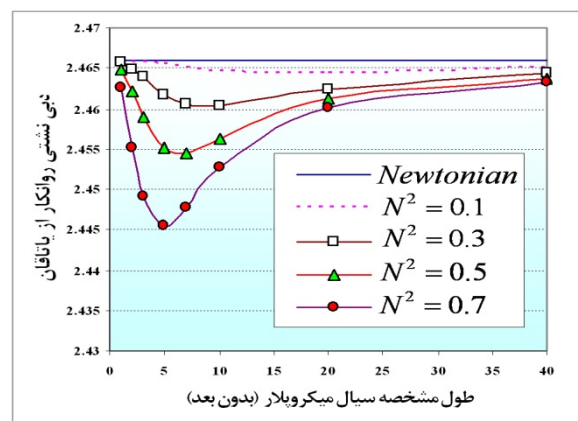
در شکل ۷، تغییرات زاویه وضعی یاتاقان ژورنال دولب با تغییر در خصوصیات سیال روان‌کار میکروپلار ارائه شده است. نمودارها، گویای کاهش میزان زاویه وضعی در یاتاقان با تغییر روان‌کار از حالت نیوتنی به میکروپلار می‌باشد.

در شکل ۸ اثر تغییر خواص سیال روان‌کار میکروپلار بر روی متغیر ضریب اصطکاک در یاتاقان ژورنال دولب نشان داده شده است. نتایج به‌طور کلی بیانگر پایین‌تر بودن میزان

در شکل‌های ۳-۴ اثر تغییر در پارامترهای مشخصه سیال روان‌کار میکروپلار نسبت به روان‌کار نیوتنی برای متغیر ضریب اصطکاک و نشتی روان‌کار در یاتاقان ژورنال مدور ارائه شده است. با توجه به این شکل‌ها، به وضوح روشن است که با تغییر روان‌کار مورد استفاده در یاتاقان از حالت نیوتنی به میکروپلار، مقدار متغیر ضریب اصطکاک و نیز نشتی روان‌کار از یاتاقان کاهش خواهد یافت. همچنین با توجه به نتایج، امکان انتخاب سیال روان‌کار میکروپلار خاص جهت دست‌یابی به شرایط ایده‌آل برای میزان متغیر ضریب اصطکاک و نشتی درون یاتاقان فراهم می‌باشد.



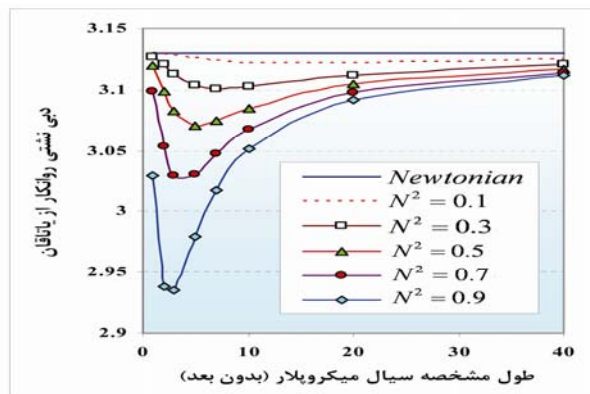
شکل (۳): تغییرات $f(\bar{R}/\bar{C})$ بر حسب l_m یاتاقان مدور، سیال میکروپلار ($\varepsilon = 0.5$ و $L/D = 0.5$).



شکل (۴): تغییرات Q_s بر حسب l_m یاتاقان ژورنال مدور، سیال میکروپلار ($\varepsilon = 0.5$ و $L/D = 0.5$).

با توجه به شکل فوق می‌توان بیان نمود که با افزایش میزان N^2 در l_m ثابت و همچنین افزایش میزان l_m در N^2 ثابت، دستیابی به مقادیر پایین‌تر برای متغیر ضریب اصطکاک در یاتاقان مورد بررسی، امکان‌پذیر خواهد بود.

شکل ۹ بیانگر تغییرات دبی نشی روان کاری از یاتاقان بر حسب پارامترهای مشخصه روان کار میکروپلار مورد استفاده می‌باشد. براساس نتایج، تغییر خواص روان کار از حالت نیوتنی به میکروپلار به‌طور کلی سبب کاهش میزان نشی روان کار از یاتاقان می‌شود که این امر، به افزایش گرانروی سیال روان کار، با افزایش کمی خصوصیات میکروپلاریته آن اشاره دارد. لذا با افزایش میزان N^2 در l_m ثابت، از مقدار دبی روان کار نشی از یاتاقان کاسته می‌گردد. برای مقادیر ثابت N^2 با افزایش میزان l_m ، مقادیر حاصل برای دبی نشی منحنی در ابتدا نزولی بوده و در ادامه حالت صعودی به خود می‌گیرد.

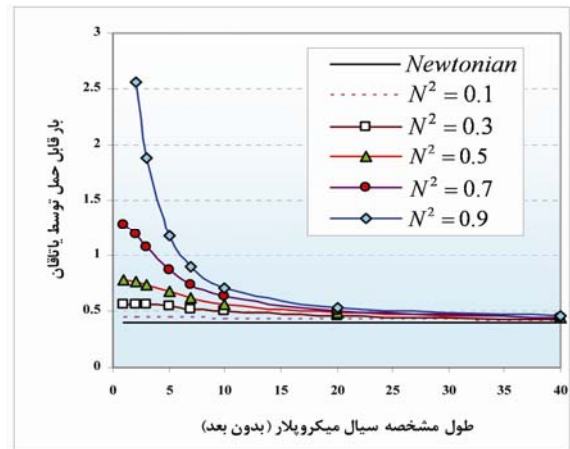


شکل (۹): Q_s بر حسب l_m ، یاتاقان ژورنال دولب روان کار میکروپلار ($\varepsilon = 0.5$ و $L/D = 0.5$ و $\delta = 0.5$).

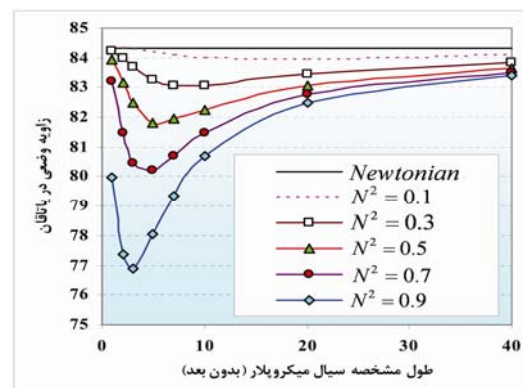
در تحلیل‌های فوق با استخراج معادله رینولدز مناسب جهت دستیابی به نتایج با استفاده از روش GDQ ، از کدنویسی در محیط نرم‌افزار $MATLAB$ استفاده شده‌است. برنامه رایانه‌ای نهایی تدوین شده نیز با استفاده از رایانه‌ای با پردازشگر $CPU\ 2.4GHz$ و $RAM\ 512Mb$ اجرا شده‌است.

برای انجام محاسبات در هر دو راستای x و y از توابع چند جمله‌ای استفاده شده‌است. نقاط نمونه روی دامنه مسئله نیز با توجه به صفرهای جابه‌جا شده چند جمله‌ای چبیشف

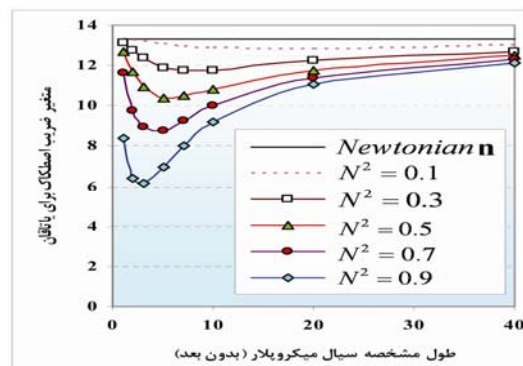
متغیر ضریب اصطکاک برای یاتاقان‌های ژورنال دولب روان کاری شونده با سیال میکروپلار نسبت به حالت روان کاری نیوتنی است.



شکل (۶): W بر حسب l_m ، یاتاقان ژورنال دولب سیال میکروپلار ($\varepsilon = 0.5$ و $L/D = 0.5$ و $\delta = 0.5$).



شکل (۷): θ_0 بر حسب l_m ، یاتاقان ژورنال دولب سیال میکروپلار ($\varepsilon = 0.5$ و $L/D = 0.5$ و $\delta = 0.5$).



شکل (۸): $f(\bar{R}/\bar{C})$ بر حسب l_m یاتاقان ژورنال دولب روان کار میکروپلار ($\varepsilon = 0.5$ و $L/D = 0.5$ و $\delta = 0.5$).

۵- نتیجه‌گیری

در بررسی حاضر با به کارگیری روش حل عددی درون‌یابی مشتق‌تعمیم یافته تأثیرات استفاده از روان‌کار میکروپلار به جای روان‌کار نیوتنی در یاتاقان‌های ژورنال مدور و غیرمدور دولب مورد بررسی قرار گرفته‌است. نتایج حاصل، بیانگر نکات زیر می‌باشند:

۱- نتایج حاصل از اجرای برنامه در حالات مختلف بر سرعت هم‌گرایی و دقت بالای روش GDQ در دست‌یابی به نتایج مشابه حاصل از سایر روش‌های حل عددی در حوزه یاتاقان‌های ژورنال مدور دلالت دارد. انتخاب تعداد نقاط نمونه اندک به کاهش زمان محاسبات با استفاده از روش GDQ در کلیه حالات می‌نماید،

۲- بررسی‌ها نشان می‌دهند که با توجه به نحوه بازنویسی معادلات و اجرای مراحل محاسباتی، حل روش GDQ از نظر سادگی عبارات نسبت به سایر روش‌های حل رایج در مسائل روان‌کاری، ارجحیت دارد. همچنین به علت مجزا بودن نقاط روی دامنه مسئله از یکدیگر، این روش نسبت به سایر روش‌های عددی که در آنها بایستی بررسی نقاط به صورت همزمان انجام گیرد، نیازمند برنامه‌نویسی ساده‌تری می‌باشد. علت این امر، تابعیت تک‌بعدی ماتریس‌های ضرایب وزنی محاسبه شده در این روش به محل قرارگیری نقاط نمونه روی دامنه مسئله می‌باشد،

۳- مقایسه نتایج حاصل از این روش برای تحلیل یاتاقان‌های ژورنال مدور و غیر مدور دولب روان‌کاری شونده با روان‌کار نیوتنی و میکروپلار نشان‌دهنده هم‌گرایی بیشتر توزیع فشار ایجاد شده در فیلم روان‌کار، افزایش قابلیت حمل بار، کاهش زاویه وضعی، کاهش متغیر ضریب اصطکاک و کاهش ناشی روان‌کار از یاتاقان ژورنال غیر مدور با تغییر حالت روان‌کار از نیوتنی به میکروپلار دارد و

۴- از نقطه نظر حل عددی، بررسی انجام شده گویای آن است که با توجه به ویژگی مسائل مربوط به یاتاقان‌های ژورنال مدور و غیر مدور، روش درون‌یابی مشتق‌تعمیم‌یافته با توجه به خصوصیات نظیر سرعت، دقت و سادگی می‌تواند به عنوان روشی مناسب و جایگزین در حوزه تحلیل مسائل مذکور به کار گرفته شود.

انتخاب شده‌اند. برای تحلیل مسئله در یاتاقان، در هر دو حالت مدور و غیر مدور دولب از شبکه‌ای با ابعاد $N_x = 12$ و $N_y = 7$ بر روی دامنه مسئله استفاده شده‌است. یافتن مکان انتهایی فیلم فشاری مثبت در یاتاقان ژورنال مدور و هر یک از لب‌های یاتاقان برای حالت غیرمدور دولب نیز با استفاده از روش تکرار جهت برقراری شرط مرزی رینولدز انجام گرفته‌است. با توجه به اجرای برنامه در شرایط متنوع ورودی ملاحظه می‌گردد که با انتخاب دقیق عبارت تعیین‌کننده، تعداد تکرار مسئله برای نسبت‌های مختلف خروج از مرکزی محور درون یاتاقان در هر دو حالت مدور و غیر مدور می‌توان تعداد تکرارها را به راحتی تا حد ممکن کاهش داده و نتایج را در زمان کوتاه‌تری از خروجی برنامه دریافت نمود.

در جدول ۲ زمان اجرای برنامه جهت دستیابی به نتایج مربوط به عمل‌کرد یاتاقان ژورنال مدور و غیرمدور توسط روش‌های حل عددی مختلف با هم مقایسه شده‌اند. بررسی‌ها گویای قابلیت همگرایی سریعتر به نتایج با دقت مشابه، در صورت استفاده از روش حل عددی درون‌یابی مشتق می‌باشند.

جدول (۲): مقایسه زمان لازم جهت استخراج نتایج.

نوع یاتاقان	روانکار	نتایج	روش حل	زمان اجرا
ژورنال مدور	نیوتنی	جدول (۱)	Trigonometric Series	۰/۷
			FDM	۰/۸
			FEM	۰/۷۵
			GDQ	۰/۴
	میکروپلار	شکل‌های (۴-۲)	FEM	۲/۳
			GDQ	۱/۱
ژورنال غیرمدور دو لب	نیوتنی	شکل‌های (۹-۵)	FEM	۳۴/۸
			GDQ	۱۳/۹
	میکروپلار	شکل‌های (۹-۵)	FEM	۱۰۳/۲
			GDQ	۲۹/۷

Bearings”, Int. Conf. on Advanced Tribology, Vol. 42, No. 1, pp. 23-32, 2009.

15. Naduvnamani, N.B. and Santosh, S. “Micropolar Fluid Squeeze Film Lubrication of Finite Porous Journal Bearing”, Int. Conf. on Advanced Tribology, Vol. 44, No. 4, pp. 409-416, 2011.
16. Bellman, R. and Casti, J. “Differential Quadrature and Long-term Integration”, J. Math. Analysis Appl., Vol. 34, No. 1, pp. 235-238, 1971.
17. Shu, C. and Richards, B.E. “Application of Generalized Differential Quadrature to Solve Two-dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations”, Int. J. Num. Methods in Fluids, Vol. 15, No. 7, pp. 791-798, 1992.
18. Bert, C.W. and Malik, M. “Differential Quadrature Solutions for Steady-state Incompressible and Compressible Lubrication Problems”, J. Tribology, Vol. 116, No. 2, pp. 296-302, 1994.
19. Zhang, Q., Guo, G., and Winoto, S.H. “Analysis of Hydrodynamic Journal Bearing with GDQ Method”, Magnetic Recording Conf., Digest of the Asia-Pacific, Singapore, 2002.
20. Shu, C. and Richards, B.E. “Parallel Simulation of Incompressible Viscose Flows by Generalized Differential Quadrature”, Comput. Syst. in Eng. Vol. 3, No. 4, pp. 271-281, 1992.
21. Prakash, J. and Sinha, P. “Lubrication Theory of Micropolar Fluid and Its Application to a Journal Bearing”, Int. J. Eng. Sci., Vol. 13, No. 3, pp. 217-232, 1975.

مراجع

1. Raimondi, A.A. and Boyd, J. “A Solution for the Finite Journal Bearing and Its Application to Analysis and Design”, ASLE Trans., Vol. 1, No. 1, pp. 159-209, 1958.
2. Kato, T. and Hori, Y. “A Fast Method for Calculating Dynamic Coefficients of a Finite Width Journal Bearing with Quasi Reynolds Boundary Condition”, ASME J. Tribology, Vol. 110, No. 3, pp. 387-393, 1988.
3. Pinkus, O. “Analysis of Elliptical Bearings”, Trans. ASME, Vol. 78, No. 16, pp. 965-976, 1956.
4. Malik, M. “A Comparative Study of Some Two-lobed Journal Bearing Configurations”, ASLE Trans., Vol. 26, No. 1, pp. 118-125, 1983.
5. Chandra, M., Malik, M., and Sinhasan, R. “Comparative Study of Four Gas Lubricated Non-circular Journal Bearing Configurations”, Tribology Int., Vol. 16, No. 2, pp. 26-31, 1983.
6. Attia-Hili, M., Bouaziz, S., Maatar, M., Fakhfakh, T., Haddar, M., and Jeffery, G.B. “Hydrodynamic and Elasto-Hydrodynamic Studies of a Cylindrical Journal Bearing”, J. Hydrodynamics, Ser. B, Vol. 22, No. 2, pp. 155-163, 2010.
7. Jeffery, G.B. “The Motion of Ellipsoidal Particles Immersed in a Viscous Fluid”, Royal Society of London, Se. A, Vol. 102, No. 715, pp. 161-179, 1922.
8. Eringen, A. “Simple Micro Fluids”, Int. J. Eng. Sci., Vol. 2, No. 2, pp. 205-217, 1964.
9. Eringen, A. “Theory of Micropolar Fluids”, J. Math. & Mech., Vol. 16, No. 1, pp. 1-18, 1966.
10. Khonsari, M.M. and Brewster, D.E. “On the Performance of Finite Journal Bearing Lubricated with Micropolar Fluids”, Tribology Trans., Vol. 32, No. 2, pp. 155-150, 1989.
11. Wang, X. and Zhu, K. “Numerical Analysis of Journal Bearing Lubricated with Micropolar Fluid Including Thermal and Cavitating Effects”, Tribology Int., Vol. 39, No. 3, pp. 227-237, 2006.
12. Prabhakaran, K., Sukamran, V.P., and Jayadas, N.H. “Static and Dynamic Analysis of Elastohydrodynamic Elliptical Journal Bearing with Micropolar Lubricant”, Int. Conf. on Advanced Tribology, Vol. 40, No. 2, pp. 297-305, 2007.
13. Durany, J., Pereira, J., and Varas, F. “Numerical Solution to Steady and Transient Problems in Thermo-hydrodynamic Lubrication, Using a Combination of Finite Element, Finite Volume and Boundary Element Methods”, J. Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 44, No. 11, pp. 686-695, 2008.
14. Van-ostayed, R. and Van-beek, A. “Thermal Modeling of the Lemon-bore Hydrodynamic