

کاربرد روش سکانت - بوت استرپ جهت حل سینماتیک مستقیم یک روبات موازی انتقالی سه درجه آزادی

محمد رضا الهامی^۱ و امین امانی^۲

دانشگاه جامع امام حسین (ع)

(تاریخ دریافت: ۸۹/۰۱/۳۱؛ تاریخ پذیرش: ۹۰/۰۵/۱۰)

چکیده

مقاله حاضر، حل بسته سینماتیک مستقیم روبات موازی انتقالی سه درجه آزادی 3PRC را به کمک ترکیبی از روش بوت استرپ و تئوری سکانت که روش سکانت بوت استرپ نامیده می‌شود، مورد بررسی قرار می‌دهد. این روش برای حل معادلات غیرخطی سینماتیک ربات‌های سری استفاده می‌شود. برتری این روش نسبت به روش‌های حل عددی از جمله نیوتن-رافسون، دقت بالاتر، سرعت همگرایی بیشتر و یافتن همه جواب‌های معادله‌های غیرخطی چند مجهولی به‌طور هم‌زمان است، که در این مقاله به آن پرداخته شده است. در این تحقیق، برای اولین بار روش سکانت بوت استرپ برای حل معادلات غیرخطی سینماتیک روبات موازی انتقالی مورد استفاده قرار گرفته است. شیوه‌ی مذکور یک روش جدید است که اشکال‌ها و نواقص روش‌های عددی سنتی را بهبود می‌بخشد. تطابق بسیار خوب روش سکانت بوت استرپ با روش‌های عددی سنتی مانند روش نیوتن-رافسون، برتری این روش را در سرعت حل و همگرایی پاسخ تصدیق می‌کند.

واژه‌های کلیدی: سینماتیک مستقیم، روبات موازی انتقالی سه درجه آزادی، 3PRC، روش سکانت-بوت استرپ

Application of Secant-Bootstrap Method for Direct Kinematics of 3-DOF Translational Parallel Manipulator

M.R. Elhami and A. Amani

Imam Hossein Univ.

(Received: 20 April, 2010; Accepted: 1 August, 2011)

ABSTRACT

The current paper investigates the closed solution of direct kinematics of a 3-DOF translational parallel manipulator with fixed actuators called a 3-PRC TPM. This solution approach is a combination of Secant theory and Bootstrap method called Secant-Bootstrap method. This method is used for solution of nonlinear kinematics of serial robots. The advantages of this method with respect to the conventional numerical methods such as Newton-Raphson are higher accuracy, better convergence and finding of all possible solutions simultaneously. In this study, for the first time, the Secant-Bootstrap method has been used for the solution of nonlinear kinematics of translational parallel manipulator. The results of current approach show an excellent correspondence with of those traditional numerical methods such as Newton-Raphson with better convergence and higher precision of all solutions.

Keywords: Direct Kinematics, Translational Parallel Manipulator (TPM), 3PRS, Secant-Bootstrap Method

۱ - استادیار (نویسنده پاسخگو): melham@ihu.ac.ir

۲ - دانشجوی کارشناسی ارشد

فهرست علائم

α	زاویه محرک از ریل $M_i N_i$ تا تکیه‌گاه ثابت
φ_i	زاویه از محور x تا $\overline{OA_i}$ و از محور u تا $\overline{PB_i'}$
$^o a_i$	بردار موقعیت نقاط A_i نسبت به چهارچوب O
$^P b_i'$	بردار موقعیت نقطه B_i' نسبت به چهارچوب P
c	نشان‌دهنده کسینوس
c_i	محور مفصل استوانه‌ای
d_i	بیانگر جابه‌جایی خطی مفصل کشویی متحرک نام
d_{io}	بردار واحد در راستای ریل $M_i N_i$
d_{max}	نشان‌دهنده بیشترین حرکت کاراندازه‌های خطی
i_{io}	بردار واحد در امتداد $C_i B_i$
$O\{x, y, z\}$	دستگاه ثابت در مختصات کارترین
r_i	محور مفصل چرخشی
$^o R_P$	ماتریس دوران
$P\{u, v, w\}$	دستگاه متحرک در مختصات کارترین
s	نشان‌دهنده سینوس
S_{io}	بردار واحد موازی با محور مفاصل لولایی و استوانه‌ای برای پایه نام
S_i	نشان‌دهنده کورس مفصل استوانه‌ای نام
S_{max}	نشان‌دهنده بیشترین حرکت مفاصل استوانه‌ای

۱- مقدمه

مکانیزم روبات‌ها در ابتدا به صورت زنجیره‌های باز ارائه شده‌اند که این نوع از مکانیزم‌ها اگرچه دارای امکان دسترسی به فضای کاری بزرگ‌تر، مهارت در قابلیت مانور در فضاهای کوچک و توانایی در دسترسی به اهداف با فاصله زیاد را داراست، اما اتصال سری اعضا به یکدیگر باعث شده ظرفیت انتقال بار و همچنین سختی آنها پایین باشد، که همین امر

موجب دقت کم آنها در کنترل موقعیت خواهد شد. برای مقابله با این امر روبات‌های موازی با زنجیره‌های بسته معرفی شده‌اند.

نخستین روبات موازی توسط گاف^۱ و وایت هال^۲ در سال ۱۹۶۲ جهت تست تایر طراحی شد [۱]. سپس برای اولین بار استوارت^۳ در سال ۱۹۶۵ از آن جهت شبیه‌ساز پرواز استفاده کرده است [۲]. به‌طور کلی، یک روبات موازی شامل یک سکوی محرک است که به‌وسیله‌ی چندین ساق موازی به یک سکوی ثابت متصل می‌شود. شمارشی جامع از تعداد ساختارهای مکانیکی روبات‌های موازی و کاربردهای متنوع آنها به‌وسیله‌ی مرلت^۴ [۳] ارائه شده است.

در سال‌های اخیر توسعه روبات‌های موازی افزایش یافته است، روبات‌های موازی دارای صلبیت بالاتر و در نتیجه فرکانس طبیعی بالاتر، توزیع همگن اینرسی، دقت بهتر برای خروجی، سرعت، مقاومت و ظرفیت بارگذاری بالا نسبت به روبات‌های سری هستند. به‌طور مثال نسبت نیرو به وزن در روبات‌های سری در حدود ۳٪ تا ۳۰٪ است، درحالی‌که در روبات‌های موازی به‌خاطر نوع اهرم‌بندی این مقدار به ۵ برابر هم می‌رسد [۴]. این مزیت‌ها باعث کاربرد وسیع آنها در زمینه روبات‌های صنعتی، شبیه‌سازهای پرواز، میکروروبات‌های ماهر و ماشین‌افزارهای موازی می‌شود، اگرچه بزرگ‌ترین مشکل روبات‌های موازی به محدودیت فضای کاری برمی‌گردد.

با توجه به مزایای ذکر شده، بیشتر روبات‌های موازی شش درجه آزادی بر اساس ساختار پلتفرم استوارت ساخته می‌شوند. اگرچه در بسیاری از حالات این شش درجه آزادی نیاز نیست. بنابراین در سال‌های اخیر روبات‌هایی که تعداد درجات آزادی آنها کاهش یافته، به‌دلیل مزیت ذاتی در تعمیر و نگهداری مکانیزم‌های موازی و کاهش هزینه‌های کلی در ساخت و عملکرد، مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است [۵-۸]. مسئله‌ی بسیار اساسی در مطالعه‌ی بازوهای مکانیکی ماهر، مسئله‌ی سینماتیک مستقیم است. این مسئله، در واقع مسئله هندسی-استاتیکی محاسبه مکان و جهت‌گیری

1- Gough
2- Whitehall
3- Stewart
4- Merlet

همچنین این روش برای مسئله سینماتیک بازوهای ماهر به کار برده شده است. وو [۱۵] حل معادله‌های غیرخطی یک مکانیزم چهار لینکی و یک مکانیزم لنگ - لغزنده^۶ در چند حالت را با کدنویسی روش هموتویی کانتینیوایشن در محیط نرم‌افزار Visual Basic انجام داده، به‌طوری‌که قابلیت شبیه‌سازی نیز در این کدنویسی در نظر گرفته شده است.

روش سنتی نیوتن-رافسون به‌وسیله‌ی تئوری سکانت^۷ و تکنیک‌های هموتویی کانتینیوایشن توسط وو [۱۶] بهبود یافته و برای حل معادلات سینماتیک روبات سری دو درجه آزادی مورد استفاده قرار گرفته است.

در این پژوهش، از روش سکانت-بوت استرپ^۸ یا سکانت-هموتویی کانتینیوایشن که یک روش پیشرفته‌تر و دقیق‌تر از روش هموتویی کانتینیوایشن است، برای اولین بار جهت حل معادله‌های سینماتیک مستقیم روبات موازی انتقالی 3PRC استفاده می‌شود.

۲- روش سکانت بوت استرپ

روش سکانت بوت استرپ برای اولین بار توسط وو [۱۶] در سال ۲۰۰۷ ارائه شد. در روش‌های معمول حل عددی معادله‌های غیرخطی، از جمله روش نیوتن-رافسون، هنگامی که توابع اختیاری نامناسبی انتخاب شود، به‌خوبی عمل نمی‌کند و تمام پاسخ‌های آن یافت نمی‌شود. اما تئوری سکانت می‌تواند برای بهبود این خطاها، همانند تکنیک‌های هموتویی کانتینیوایشن، پاسخ‌هایی با مسیرهای کنترل شده تولید کند. روش سکانت بوت استرپ ترکیبی از تئوری سکانت و هموتویی کانتینیوایشن است که می‌تواند نتیجه‌های بسیار مؤثرتری را به‌دست آورد.

در ارتباط با روش‌های حل عددی، همان‌گونه که بیان شد دو مشکل جدی وجود دارد: نخست اینکه، پیدا کردن حدس اولیه مناسب آسان نیست و دیگر اینکه، آیا روش به کار برده شده برای همگرایی جواب‌ها مفید است. روش سکانت بوت استرپ این کاستی‌ها را برطرف می‌کند.

همان‌طور که می‌دانیم دو نوع معادله‌های غیرخطی وجود

مجری نهایی بازوی مکانیکی ماهر است. همان‌طور که می‌دانیم سینماتیک مستقیم روبات‌های سری آسان است، در حالی که سینماتیک معکوس این روبات‌ها، پیچیده و نیازمند حل یک سیستم معادله‌های غیرخطی است. اما برعکس در مورد روبات‌های موازی، سینماتیک معکوس به نسبت آسان و سینماتیک مستقیم بسیار بحث برانگیز است.

سینماتیک مستقیم مکانیزم‌های موازی توسط بسیاری از محققان مورد توجه قرار گرفته و کاربردهای آن برای روبات‌ها و ماشین‌افزارها گسترش یافته است. از جمله روش‌های قدیمی برای حل معادله‌های غیرخطی روش نیوتن-رافسون است که به تدریج با روش هموتویی کانتینیوایشن^۱ در دهه‌ی ۱۹۳۰ جایگزین شده است. روش هموتویی کانتینیوایشن در دهه ۱۹۶۰ توسط سینماتیک پژوهان برای حل مکانیزم مرکب به کار برده شده و آخرین تغییرات برای بهبود این روش توسط مورگان^۲ [۹ و ۱۰] ارائه شده است.

روش هموتویی کانتینیوایشن توسط وو [۱۱]^۳ برای جستجوی همه ریشه‌های مسئله سینماتیک معکوس یک روبات سری دو درجه آزادی و روبات فضایی شش درجه آزادی PUMA به کار برده شده است و نشان داده است که روش هموتویی کانتینیوایشن می‌تواند پاسخ‌هایی یکنواخت و همگرا را تضمین کند، بر خلاف روش نیوتن-رافسون^۴ که پاسخ‌های سیکلی نا معین را ارائه می‌داد. واردی^۵ و همکارانش [۱۲] نیز این روش را برای اولین بار جهت حل معادلات سینماتیک مستقیم و معکوس روبات موازی انتقالی 3UPU مورد استفاده قرار داده‌اند که مسئله سینماتیک مستقیم منجر به ۱۶ جواب حقیقی با دقت بسیار بالا شده است. در آن پژوهش نشان داده شده است که تغییر توابع اختیاری و حدس‌های اولیه هیچ تأثیری در به‌دست آوردن جواب نهایی نخواهند داشت و باز هم جواب‌های مسئله به وجود می‌آیند. همچنین وو [۱۳ و ۱۴] تکنیک‌های جدیدی را برای ترکیب روش نیوتن و روش هموتویی جهت اجتناب از واگرایی در حل معادله‌های غیر خطی، ارائه کرده است.

1- Homotopy Continuation Method

2- Morgan

3- Wu

4- Newton-Raphson Method

5- Varedi

6- Slider-Crank

7- Secant Theory

8- Secant-Bootstrap Method

$$\begin{bmatrix} \frac{f(x_{n-1}, y_n, \dots) - f(x_n, y_n, \dots)}{x_{n-1} - x_n} & \frac{f(x_n, y_{n-1}, \dots) - f(x_n, y_n, \dots)}{y_{n-1} - y_n} & \dots \\ \frac{g(x_{n-1}, y_n, \dots) - g(x_n, y_n, \dots)}{x_{n-1} - x_n} & \frac{g(x_n, y_{n-1}, \dots) - g(x_n, y_n, \dots)}{y_{n-1} - y_n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (۸)$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} - x_n \\ y_{n+1} - y_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_n, y_n, \dots) \\ -g(x_n, y_n, \dots) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

دو معادله بالا هنگامی بی‌نهایت می‌شود که $f(x_{n-1}) = f(x_n)$ باشد و یا تابع یکنواخت و یا ضریب تعیین شده در معادله (۸) صفر شود، بنابراین می‌توان روش هموتویی کانتینوایشن را برای بهبود این خطاها به کار برد.

دستگاه معادلاتی با n متغیر x_1, x_2, \dots, x_n را در نظر بگیرید. برای این معادله‌ها، با از بین بردن بعضی از ترم‌ها و یا اضافه کردن ترم‌های جدید در صورتی که دستگاه جدیدی از معادله‌ها وجود داشته باشد، ممکن است پاسخ‌ها به آسانی به دست آیند. سپس ضرایب این سیستم جدید را نسبت به ضرایب سیستم اصلی با مقدار افزایش جزئی تغییر داده تا پاسخ‌ها به دست آیند.

اگر پاسخ‌های معادله‌های (۱-۲) به دست آورده شوند، یک سیستم شروع جدید به نام تابع اختیاری هموتویی انتخاب می‌شود.

$$G(X) = 0. \quad (۹)$$

تابع اختیاری هموتویی باید شناخته شده و یا قابل کنترل، آسان و حل‌شونده باشد. تابع هموتویی کانتینوایشن به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$H(X, t) = tF(X) + (1-t)G(X) = 0. \quad (۱۰)$$

که در آن، t یک پارامتر اختیاری است و از صفر تا یک تغییر می‌کند، بنابراین دو شرط مرزی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} H(X, 0) &= G(X), \\ H(X, 1) &= F(X). \end{aligned} \quad (۱۱)$$

که این، روش مشهور بوت استرپ است. این روش همچنین به روش هموتویی کانتینوایشن یا روش پارامتر-پرتوریشن^۱ هم نامیده می‌شود که عمومیت ندارند.

هدف این روش حل $H(X, t) = 0$ به جای $F(X) = 0$ با تغییر دادن پارامتر t از صفر تا یک و در نتیجه ایجاد همگرایی

دارد که عبارت است از: معادله‌های غیرخطی معمولی و معادله‌های غیرخطی هم‌زمان. هر کدام به ترتیب به صورت معادله‌های زیر نشان داده شده است:

$$f(x) = 0, \quad (۱)$$

و

$$F(X) = 0 \quad i.e., \begin{cases} f(x, y, \dots, z) = 0 \\ g(x, y, \dots, z) = 0 \\ \vdots \\ h(x, y, \dots, z) = 0 \end{cases}. \quad (۲)$$

فرم تکرار نیوتن-رافسون این معادله‌ها به صورت زیر است:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (۳)$$

و

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_n, y_n, \dots)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_n, y_n, \dots)}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial g(x_n, y_n, \dots)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_n, y_n, \dots)}{\partial y} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} - x_n \\ y_{n+1} - y_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_n, y_n, \dots) \\ -g(x_n, y_n, \dots) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (۴)$$

اگر مشتق $f'(x)$ یا $\partial f / \partial x$ متفاوت باشد و یا موجود نباشد، این تکرارها مورد استفاده قرار نمی‌گیرند. سپس می‌توان تئوری سکانت را به کار برد:

$$f'(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_n} \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} \approx \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}, \quad (۵)$$

و

$$\frac{\partial f(x_n, y_n, \dots)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow x_n} \frac{f(x, y_n, \dots) - f(x_n, y_n, \dots)}{x - x_n} \approx \frac{f(x_{n-1}, y_n, \dots) - f(x_n, y_n, \dots)}{x_{n-1} - x_n}. \quad (۶)$$

با جای‌گذاری معادله‌های (۵-۶) در معادله‌های (۳-۴)، خواهیم داشت:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}, \quad (۷)$$

و

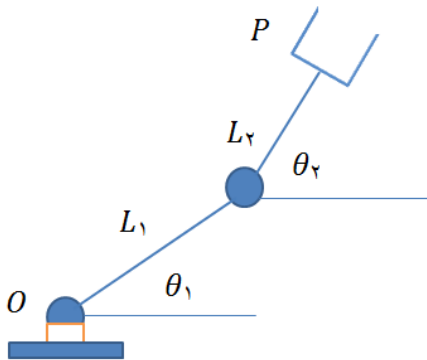
که در آن:

$$f_0 = L_1 C \theta_{10} + L_2 C \theta_{20} - Px = 0, \quad (18)$$

$$g_0 = L_1 S \theta_{10} + L_2 S \theta_{20} - Py = 0.$$

$$H_1 = tf + (1-t)f' = f + (1-t)(-f_0) = 0, \quad (19)$$

$$H_2 = tg + (1-t)g' = g + (1-t)(-g_0) = 0.$$



شکل (۱): روبات دو درجه آزادی [۱۱].

با حل معادله به روش نیوتن-رافسون و تغییر زوایای θ_1 و θ_2 از ۰ تا ۳۶۰ درجه و پارامتر هموتوپی t از صفر تا ۱ (با $dt = 0.01$) نتیجه‌های جدول ۱ به دست می‌آید. با مطابقت خوب تابع هموتوپی کمکی، دو مجموعه جواب از ریشه‌های معادله بدون واگرایی به دست می‌آید:

$$(20) \quad (\theta_1, \theta_2) = (93/77, 209/71), \quad (153/61, 37/67)$$

با حل این مثال می‌توان نتیجه گرفت که هرچند روش نیوتن-رافسون به‌طور وسیع در معادله‌های غیرخطی به کار برده می‌شود اما این روش در مواقعی که معادله‌های غیرخطی دارای چندین جواب باشند، عمل نمی‌کند، در صورتی که روش سکانت بوت استرپ می‌تواند برای بهبود این خطاها به کار برده شود و درستی جواب‌های به دست آمده را تضمین کند. تاکنون از این روش در زمینه حل معادله‌های روبات، فقط در معادله‌های سینماتیکی روبات‌های سری دو درجه آزادی استفاده شده است. اما در این مقاله برای اولین بار از روش سکانت بوت استرپ جهت حل معادله‌های سینماتیکی روبات موازی سه درجه آزادی استفاده شده است که قابل تعمیم به شش درجه آزادی است.

همان‌طوری که در نتیجه‌های جدول ۱ مشاهده می‌شود،

است. از این رو می‌توان معادله‌های (۷-۸) را به این صورت نوشت:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{H(x_n, t)(x_{n-1} - x_n)}{H(x_{n-1}, t) - H(x_n, t)}, \quad (12)$$

و

$$\begin{bmatrix} \frac{H_1(x_{n-1}, y_{n-1}, \dots) - H_1(x_n, y_n, \dots)}{x_{n-1} - x_n} & \frac{H_1(x_{n-1}, y_{n-1}, \dots) - H_1(x_n, y_n, \dots)}{y_{n-1} - y_n} & \dots \\ \frac{H_2(x_{n-1}, y_{n-1}, \dots) - H_2(x_n, y_n, \dots)}{x_{n-1} - x_n} & \frac{H_2(x_{n-1}, y_{n-1}, \dots) - H_2(x_n, y_n, \dots)}{y_{n-1} - y_n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} - x_n \\ y_{n+1} - y_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_1(x_n, y_n, \dots) \\ -H_2(x_n, y_n, \dots) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

که همگرایی در معادله‌ی زیر اتفاق می‌افتد:

$$H(x_{n-1}, t) - H(x_n, t) = 0 \quad \text{or} \rightarrow 0, \quad (14)$$

و

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \frac{H_1(x_{n-1}, y_{n-1}, \dots) - H_1(x_n, y_n, \dots)}{x_{n-1} - x_n} & \frac{H_1(x_{n-1}, y_{n-1}, \dots) - H_1(x_n, y_n, \dots)}{y_{n-1} - y_n} & \dots \\ \frac{H_2(x_{n-1}, y_{n-1}, \dots) - H_2(x_n, y_n, \dots)}{x_{n-1} - x_n} & \frac{H_2(x_{n-1}, y_{n-1}, \dots) - H_2(x_n, y_n, \dots)}{y_{n-1} - y_n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = 0 \quad \text{or} \rightarrow 0 \quad (15)$$

برای ایجاد همگرایی، در مرجع [۱۶]، دو توابع اختیاری مفیدی را به صورت چند جمله‌ای و نمایی انتخاب کرده است. با تطابق مناسب تابع هموتوپی کمکی می‌توان جواب معادله‌های (۱-۲) را به دست آورد.

به منظور بررسی روش حل، مثال زیر به روش نیوتن-رافسون و سکانت بوت استرپ حل شده و نتیجه‌ها مقایسه شده‌اند. معادله‌های مربوط به یک بازوی ماهر مطابق شکل ۱ به صورت زیر است:

$$f = L_1 C \theta_1 + L_2 C \theta_2 - Px = 0, \quad (16)$$

$$g = L_1 S \theta_1 + L_2 S \theta_2 - Py = 0, \quad .$$

فرض می‌شود طول رابط‌های روبات $L_1 = 2$ و $L_2 = 1$ و محل گیرنده P به صورت $(P_x, P_y) = (1, 1/5)$ باشد. در این معادله باید زوایای θ_1 و θ_2 مربوط به لینک‌ها به کمک روش هموتوپی به دست آید. برای شروع:

$$f' = f - f_0, \quad (17)$$

$$g' = g - g_0.$$

بیشتری نسبت به روش‌های عددی سنتی دارد و همچنین سرعت همگرایی آن بالاتر است.

روش سکانت بوت استرپ نسبت به روش نیوتن-رافسون نتیجه‌های دقیق‌تری را نشان می‌دهد و هر دو جواب را به‌دست آورده است. شایان ذکر است که این روش دقت

جدول (۱): مقایسه نتیجه‌های روش نیوتن رافسون و روش سکانت بوت استرپ برای معادله (۱۶).

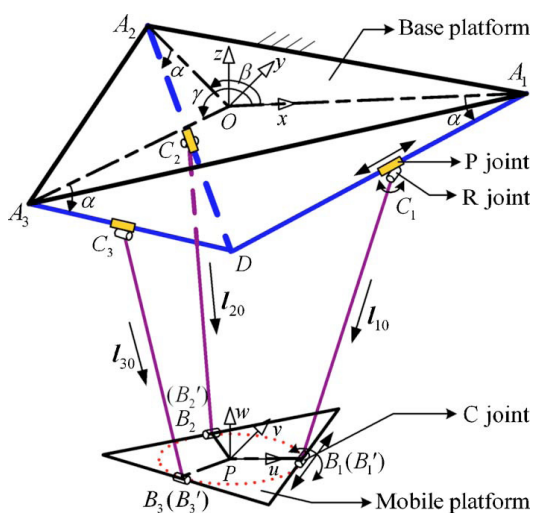
$(\theta_{20}, \theta_{20})v(\theta_{22}, \theta_{22})$	(f', g')	نیوتن-رافسون	سکانت بوت استرپ
$(0,0)v(0+e,0+e)$	$(\tilde{f}-f_0, \tilde{g}-g_0)$ $(\sin \theta_1, \cos \theta_2)$	Singular	Singular
$(30,30)v(30+e,30+e)$	$(\sin \theta_1, \cos \theta_2)$ $(\tilde{f}-f_0, \tilde{g}-g_0)$	Singular	Singular
$(30,30.1)v(30+e,30.1+e)$	$(\sin \theta_1, \cos \theta_2)$ $(\tilde{f}-f_0, \tilde{g}-g_0)$	$(153/61, 37/67)$	$(153/61, 37/67)$ $(93/77, 209/71)$

با توجه به ساختار این روبات، برخی شرایط هندسی خاص در آن برقرار است، از جمله [۱۷]:
الف) محور دوران مفصل لولایی و محور دوران مفصل استوانه‌ای در هر ساق موازی بردار واحد s_{i0} هستند و
ب) ترتیب قرارگیری ساق‌ها به‌گونه‌ای است که برای هر ساق بردار واحد مستقل وجود دارد، یعنی s_{i0} برای $(i=1, 2, 3)$ و معادل سه بردار واحد می‌باشد.

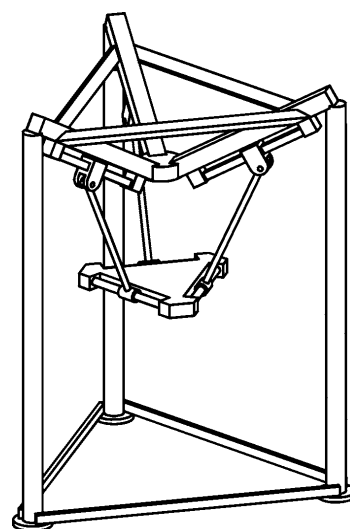
دستگاه ثابت در مختصات کارتزین به مرکز $O\{x, y, z\}$ و دستگاه متحرک در مختصات کارتزین به مرکز $P\{u, v, w\}$

۳- مدل سینماتیکی روبات موازی انتقالی 3PRC

نمای کلی روبات موازی سه درجه آزادی و دارای حرکت انتقالی 3PRC و نمایش شماتیک جزئیات آن به ترتیب در شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده شده که شامل سکوی متحرک، تکیه‌گاه ثابت و سه ساق مشابه هم است. هر ساق که اتصال‌دهنده تکیه‌گاه و سکوی متحرک است، شامل یک مفصل کشویی، یک مفصل لولایی و یک مفصل استوانه‌ای است. حرکت روبات توسط محرک‌هایی که روی مفصل کشویی در هرساق نصب شده‌اند، ایجاد می‌شود.



شکل (۳): نمایش شماتیک روبات 3PRC [۱۷].



شکل (۲): نمای کلی روبات 3PRC [۱۷].

پیش‌بالانویس‌ها، نشان‌دهنده چارچوب مختصات نسبت به جایی که بردار بیان می‌شود، است. برای اختصار، پیش‌بالا نویس‌ها را هنگامی که چهارچوب مختصات، چهارچوب ثابت باشد، مانند ${}^O a_i = a_i$ ، حذف می‌کنیم. به صورت عمومی، موقعیت کلی یک جسم در فضا (بردار مکان و دوران) را می‌توان نسبت به دستگاه ثابت به صورت بردار موقعیت $\mathbf{p} = [p_x p_y p_z]^T = \overline{OP}$ و یک ماتریس دوران ${}^O \mathbf{R}_p$ ، 3×3 نشان داد. اما از آنجایی که سکوی متحرک روبات 3PRC تنها حرکت انتقالی دارد، بنابراین ماتریس دوران ${}^O \mathbf{R}_p$ تبدیل به یک ماتریس واحد می‌شود، و در نتیجه خواهیم داشت ${}^P b'_i = b'_i$. با توجه به شکل ۳ می‌توان معادله زیر را برای پایه نام نوشت:

$$\mathbf{l}_{i0} = \mathbf{L}_i - d_i \mathbf{d}_{i0}, \quad (23)$$

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{p} + \mathbf{b}'_i + s_i s_{i0} - \mathbf{a}_i. \quad (24)$$

که در آن، \mathbf{l}_{i0} بردار واحد در امتداد $C_i B_i$ است و \mathbf{d}_{i0} نشان‌دهنده جابه‌جایی خطی مفصل کشویی متحرک نام و \mathbf{d}_i بردار واحد در راستای ریل $M_i N_i$ و s_{i0} بردار واحد موازی با محور مفاصل لولایی و استوانه‌ای برای پایه نام است که به صورت زیر است:

$$s_{i0} = [-s \varphi_i \quad c \varphi_i \quad 0]^T. \quad (25)$$

که در آن، c نشان‌دهنده کسینوس و s نشان‌دهنده سینوس است. با جایگزینی معادله‌ی (۲۴) در معادله‌ی (۲۳) و ضرب طرفین معادله در s_{i0} که از s_i به صورت زیر استنتاج می‌شود:

$$s_i = -s_{i0}^T \mathbf{p}, \quad (26)$$

خواهیم داشت:

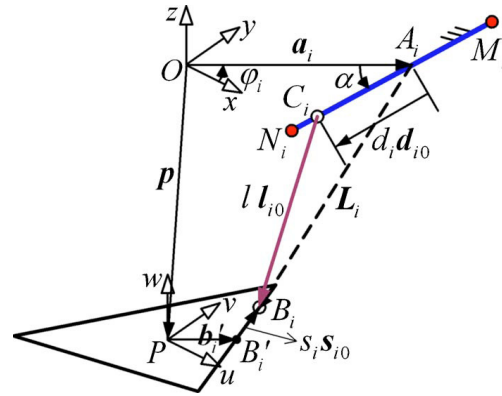
$$d_i^2 - 2d_i \mathbf{d}_{i0}^T \mathbf{L}_i + \mathbf{L}_i^T \mathbf{L}_i - l^2 = 0. \quad (27)$$

حل معادله‌ی (۲۷) منجر به حل مسئله سینماتیک معکوس خواهد شد (حل به روش Δ')، و مقادیر d_i را می‌توان با وارد کردن اندازه \mathbf{L}_i ها به دست آورد. در نتیجه:

$$d_i = \mathbf{d}_{i0}^T \mathbf{L}_i \pm \sqrt{(\mathbf{d}_{i0}^T \mathbf{L}_i)^2 - \mathbf{L}_i^T \mathbf{L}_i + l^2}. \quad (28)$$

در این کار برای تعیین درستی نتیجه‌های حاصل از تحلیل سینماتیک مستقیم، از معادله فوق به عنوان رابطه‌ای برای

بر روی سکوی متحرک در شکل ۴ نشان داده شده است که محورهای w و z عمود بر سطوح متحرک و ثابت هستند. به علاوه پایه نام به طول l در شکل ۴ با $(i=1,2,3)$ $C_i B_i$ و محل اتصال آن با سکوی متحرک B_i نشان داده شده است.



شکل (۴): هندسه نمونه یکی از ساق‌های 3PRC [۱۷].

لغزنده‌ی مفصل کشویی C_i محدود به حرکت در طول ریل میان نقاط M_i و N_i است. محور مفصل کشویی عمود به محور مفاصل استوانه‌ای و لولایی در عضو نام است. زاویه α نیز از ریل $M_i N_i$ تا تکیه‌گاه ثابت به نام زاویه محرک تعریف می‌شود. برای حالت‌های مختلف α ، در طراحی می‌توان از محدودده ۰ تا ۹۰ درجه در نظر گرفت. زاویه φ_i نیز از محور x تا $\overline{OA_i}$ و از محور u تا $\overline{PB'_i}$ در دستگاه متحرک تعریف می‌شود. بدون تغییر خاصی در تعاریف اولیه، محور x در راستای $\overline{OA_i}$ و جهت محور u در امتداد $\overline{PB'_i}$ در نظر گرفته می‌شود. با این تعاریف $\varphi_i = 0^\circ$ خواهد شد. هم‌چنین برای d_{\max} و s_{\max} که به ترتیب نشان‌دهنده بیشترین حرکت کاراندازهای خطی و مفاصل استوانه‌ای است، خواهیم داشت:

$$-\frac{d_{\max}}{2} \leq d_i \leq \frac{d_{\max}}{2}, \quad (21)$$

$$-\frac{s_{\max}}{2} \leq s_i \leq \frac{s_{\max}}{2}. \quad (22)$$

که در آن، d_i بیانگر جابه‌جایی خطی مفصل کشویی متحرک نام و s_i نشان‌دهنده کورس مفصل استوانه‌ای نام است.

همان‌طور که در شکل‌های ۳ و ۴ نشان داده شده است، بردار موقعیت نقاط A_i و B'_i به ترتیب نسبت به چهارچوب‌های O و P را می‌توان به صورت ${}^O a_i$ و ${}^P b'_i$ نوشت که

$$\begin{aligned} & (p_x \cos^2 \varphi_3 + p_y \cos \varphi_3 \sin \varphi_3 - \\ & (-a \sin 30 + b \sin 30 + d_3 \sin 30 \cos \alpha))^2 + \\ & (p_x \cos \varphi_3 \sin \varphi_3 + p_y \sin^2 \varphi_3 - \\ & (-a \cos 30 - b \cos 30 - d_3 \cos 30 \cos \alpha))^2 + \\ & (p_z + d_3 \sin \alpha)^2 = l^2. \end{aligned} \quad (34)$$

این دستگاه معادله‌ها، غیرخطی و بر حسب سه پارامتر مجهول (p_x, p_y, p_z) است. معادله‌های به‌دست آمده را به کمک روش سکانت بوت استرپ و در حالت $[d_1 = d_2 = d_3 = 0]$ با توجه به مرجع [۱۷] حل می‌کنیم. توابع سکانت بوت استرپ به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$[(p_x - 0.3)^2 + (p_z)^2 - 0.25] \times t + (1+t) \times G_1 = 0, \quad (35)$$

$$[(0.25p_x^2 + 0.75p_y^2 + 0.3p_x - 0.52p_y - 0.866p_x p_y - 0.16 + (p_z)^2] \times t + (1+t) \times G_2 = 0, \quad (36)$$

$$[(0.25p_x^2 + 0.75p_y^2 + 0.3p_x - 0.52p_y - 0.866p_x p_y - 0.16 + (p_z)^2] \times t + (1+t) \times G_3 = 0. \quad (37)$$

تغییرات پارامتر t از ۰ تا $dt = 0.0001$ و حدس اولیه برای پارامترهای مجهول مسئله $(1, 1, 1) = (p_x, p_y, p_z)$ است. باید با انتخاب توابع اختیاری مناسب و با بهره‌گیری از روش ارائه شده، به جستجو برای پیدا کردن پاسخ‌های مسئله پرداخت.

حل این دستگاه با روش سکانت بوت استرپ نتیجه‌های جدول ۴ را به وجود می‌آورد. این معادله‌ها دارای دو پاسخ حقیقی و شش پاسخ موهومی است. شش جواب موهومی مفهوم فیزیکی ندارند. همان‌طور که قبلاً بیان شد، با تغییر حدس اولیه، در جواب‌های روش سکانت بوت استرپ تغییری به وجود نمی‌آید. توابع اختیاری به کار برده شده برای پیدا کردن همه جواب‌های دستگاه معادله‌های غیرخطی فوق در جدول زیر آمده است:

جدول (۳): جواب‌های پارامتری دستگاه معادله‌های غیر خطی.

No.	(p_x, p_y, p_z)
۱	$[\pm p_x, \pm p_y, \pm p_z]$
۲	$[\pm p_x^2 i, \pm p_y^2 i, \pm p_z^2 i]$
۳	$[\pm (ap_x^2 \pm b)i \pm c, \pm (dp_y^2 \pm e)i \pm f, \pm (gp_z^2 \pm h)i \pm k]$

سینماتیک معکوس بهره برده شده است.

برای تعیین معادلات سینماتیک مستقیم از ترکیب معادله‌های (۲۳-۲۴) و مرتب‌سازی، خواهیم داشت:

$$\mathbf{p} + s_i s_{io} - \mathbf{e}_i = \mathbf{l}_{io}, \quad (29)$$

که

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i + d_i \mathbf{d}_{io} - \mathbf{b}'_i = \begin{bmatrix} e_{ix} & e_{iy} & e_{iz} \end{bmatrix}^T. \quad (30)$$

خواهد بود. با ضرب داخلی معادله‌ی (۲۹) در خودش و در نظر گرفتن معادله‌های (۳۰ و ۲۶-۲۵)، معادله زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & (p_x c^2 \varphi_i + p_y c \varphi_i s \varphi_i - e_{ix})^2 + (p_x c \varphi_i s \varphi_i + \\ & p_y s^2 \varphi_i - e_{iy})^2 + (p_z - e_{iz})^2 = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

با در نظر گرفتن (۳ و ۲ و ۱)، معادله فوق به صورت سه معادله غیرخطی برای توصیف سینماتیک مستقیم تبدیل می‌شود. برای حل این معادله‌ها به مقادیر پارامترهای هندسی روبات نیاز است، این پارامترها در جدول ۲ داده شده است.

جدول (۲): پارامترهای هندسی روبات 3PRC [۱۷].

پارامتر	مقدار (متر)	پارامتر	مقدار (درجه)
a	۰/۶	α	۴۵
b	۰/۳	φ_1	۰
l	۰/۵	φ_2	۱۲۰
d_{\max}	۰/۴	φ_3	۲۴۰
s_{\max}	۰/۲		

با توجه به روابط موجود می‌توان معادله (۳۱) را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & (p_x \cos^2 \varphi_1 + p_y \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 - \\ & (a - b - d_1 \cos \alpha))^2 + (p_x \cos \varphi_1 \cos \varphi_1 + \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & p_y \sin^2 \varphi_1)^2 + (p_z + d_1 \sin \alpha)^2 = l^2, \\ & (p_x \cos^2 \varphi_2 + p_y \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 - \\ & (a \sin 30 + b \sin 30 + d_2 \sin 30 \cos \alpha))^2 + \\ & (p_x \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 + p_y \sin^2 \varphi_2 - \\ & (a \cos 30 - b \cos 30 - d_2 \cos 30 \cos \alpha))^2 + \\ & (p_z + d_2 \sin \alpha)^2 = l^2, \end{aligned} \quad (33)$$

تأیید صحت پاسخ‌ها از درستی کاربرد این روش در حل سینماتیک مستقیم اطمینان حاصل شد.

جدول (۴): هشت پاسخ روبات 3PRC.

راه حل	نتیجه‌های (p_x, p_y, p_z)
۱	$(0, 0, 0/4000)$
۲	$(0, 0, -0/4000)$
۳	$(-0/6000, 1/0392, 0/7483i)$
۴	$(-0/6000, -1/0392, -0/7483i)$
۵	$(1/2568, 0, 0/7483i)$
۶	$(1/2568, 0, -0/7483i)$
۷	$(-0/6000, 1/0392, -0/7483i)$
۸	$(-0/6000, -1/0392, 0/7483i)$

۴- نتیجه‌گیری

در این تحقیق روش سکانت بوت استرپ برای حل معادله‌های سینماتیک مستقیم روبات موازی انتقالی سه درجه آزادی 3PRC به کار گرفته شده است. تئوری سکانت می‌تواند برای بهبود خطاهای ناشی از روش نیوتن-رافسون همانند تکنیک‌های هموتوپي کانتینوایشن به کار برده شود. با استفاده از روش سکانت بوت استرپ، مسئله سینماتیک مستقیم منجر به پیدا کردن همه هشت جواب معادله‌ها حاکم شد که در جدول ۴ نشان داده شده است. اما با روش نیوتن-رافسون یافتن کلیه جواب‌های معادله غیرخطی امکان‌پذیر نیست. از مزیت‌های این روش نسبت به روش‌های سنتی را می‌توان سرعت همگرایی بالا، آسان بودن الگوریتم و کاهش زمان محاسبات نام برد. همچنین این روش برای حدس‌های اولیه نامناسب، برخلاف روش نیوتن-رافسون که واگرا می‌شود، جواب‌های همگرا می‌دهد. آخرین مزیت این روش، به‌دست آوردن همه ریشه‌های یک دستگاه معادله‌های غیرخطی است. در پایان، نتایج این روش در حل سینماتیک مستقیم با استفاده از جواب‌های به‌دست آمده در سینماتیک معکوس مورد راستی آزمایشی قرار گرفته و از درستی کاربرد این روش نیز اطمینان حاصل گردید.

که در آن a, b, c, d, e, f, g, h و k اعداد ثابتی هستند. نتیجه‌های به‌دست آمده از کاربرد این توابع اختیاری، به‌خوبی با نتیجه‌های حاصل از مرجع [۱۷] که به‌روش هموتوپي کانتینوایشن است، مطابقت دارند.

این روش قابلیت یافتن هم‌زمان همه جواب‌ها دارد و همان‌طوری که در جدول ۴ دیده می‌شود هشت پاسخ معادله غیرخطی به‌طور هم‌زمان به‌دست آمده است که در دیگر روش‌ها چنین امکانی وجود ندارد.

برای راستی آزمایشی، جواب‌های به‌دست آمده از حل معادله‌ها، با استفاده از معادله سینماتیک معکوس (معادله (۲۸)) مورد بررسی قرار گرفته‌اند که با دقت قابل قبول 0.001 همان d_1, d_2, d_3 به‌دست آمده است.

لازم به‌ذکر است که اخیراً محققین دانشگاه ایالتی میشیگان نرم‌افزاری به‌نام HOM4PS-2.0 برای حل دستگاه معادله‌ها با استفاده از روش هموتوپي کانتینوایشن ارائه کرده‌اند [۱۸] که با حل معادله‌ها به روش‌های PHCM^۱ و PHOM^۲ مورد مقایسه قرار گرفته‌اند که با توجه به شباهت زیاد این روش با سکانت بوت استرپ، بررسی نتیجه‌های به‌دست آمده نشان‌دهنده سرعت بالای این نوع روش‌های جدید تا ۷۰۰ برابر برای حل دستگاه معادله‌های غیرخطی است که از برتری‌های این روش نسبت به روش‌های سنتی است. همچنین بیشترین تعداد درجات معادله‌های قابل حل در ۱۲ ساعت کار CPU رایانه نیز برای این سه روش مقایسه شده است. با توجه به اینکه روش سکانت بوت استرپ، ترکیبی از روش سکانت و هموتوپي کانتینوایشن است، ویژگی‌ها و دقت روش هموتوپي را داراست که در واقع می‌توان روش سکانت بوت استرپ را روش تعمیم یافته آن دانست.

از سوی دیگر در روش‌های حل سینماتیک مستقیم در این مقاله اولین بار از روش سکانت بوت استرپ استفاده شده است و جهت بررسی صحت پاسخ‌ها با نتیجه‌های روش هموتوپي کانتینوایشن مقایسه شده است. شایان ذکر است که روش بوت استرپ از نظر دقت حل، سرعت همگرایی پاسخ و یافتن هم‌زمان کلیه جواب‌ها، از سایر روش‌ها برتر است و با

1- Polynomial Homotopy Continuation Method

2- Polyhedral Homotopy Continuation Method

- مراجع**
12. Varedi, S.M., Daniali, H.M., and Ganji, D.D. "Kinematics of an Offset 3-UPU Translational Parallel Manipulator by the Homotopy Continuation Method", *Nonlinear Analysis: Real World Appl.*, Vol. 10, No.1, pp. 1767-1774, 2009.
 13. Wu, T.M. "A Study of Convergence on the Newton-Homotopy Continuation Method", *Appl. Math. Comput.*, Vol. 168, No. 2, pp. 1169-1174, 2005.
 14. Wu, T.M. "Solving the Nonlinear Equations by the Newton-Homotopy Continuation Method with Adjustable Auxiliary Homotopy Function", *Appl. Math. Comput.*, Vol. 173, No. 1, pp. 383-388, 2006.
 15. Wu, T.M. "Non-Linear Solution of Function Generation of Planar Four-Link Mechanisms by Homotopy Continuation Method", *J. Appl. Sci.*, Vol. 5, No. 4, pp. 724-728, 2005.
 16. Wu, T.M. "The Secant-Homotopy Continuation Method", *Chaos, Solutions and Fractals*, Vol. 32, No.2, pp. 888-892, 2007.
 17. Li, Y. and Xu, Q. "Kinematic Analysis and Design of a New 3-DOF Translational Parallel Manipulator", *J. Mech. Des.*, Vol. 128, No. 1, pp. 729-737, 2006.
 18. Lee, T.L., Li, T.Y., and Tsai, C.H. "HOM4PS-2.0: A Software Package for Solving Polynomial Systems by the Polyhedral Homotopy Continuation Method", *Computing*, Volume 83, No. 2-3, pp 109-133, Springer Verlag Pub, 2008.
 1. Gough, V.E. and Whitehall, S.G. "Universal Tyre Test Machine", *Proc. 9th Int. Tech. Cong. F.I.S.I.T.A.*, Vol. 117, No. 1, pp. 117-137, 1962.
 2. Stewart, D. "A Platform with Six Degrees of Freedom", *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 180, No. 15, pp. 371-386, 1965.
 3. Merlet, J.P. "Parallel Robots", Kluwer Academic Pub., London, 2000.
 4. Hunt, K.H. and Prismo, E.J.F. "Assembly Configuration of Some in Parallel Actuated manipulators", *Mech. Mach. Theory.*, Vol. 28, No. 1, pp. 31-42, 1993.
 5. Su, H.J., Dietmaier, P., and McCarthy, J.M. "Trajectory Planning for Constrained Parallel Manipulators", *ASME J. Mech. Des.*, Vol. 125, No. 4, pp. 709-716, 2003.
 6. Angeles, J. "The Qualitative Synthesis of Parallel Manipulators", *ASME J. Mech. Des.*, Vol. 126, No. 4, pp. 617-624, 2004.
 7. Huang, Z. and Li, Q.C. "Type Synthesis of Symmetrical Lower-Mobility Parallel Mechanisms Using the Constraint-Synthesis Method", *Int. J. Robot. Res.*, Vol. 22, No. 1, pp. 59-79, 2003.
 8. Dasgupta, B. and Mruthyunjaya, T.S. "The Stewart Platform Manipulator: A Review", *Mech. Mach. Theory*, Vol. 35, No. 1, pp. 15-40, 2000.
 9. Morgan, AP. "Solving Polynomial Systems Using Continuation for Engineering and Scientific Problems", Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Book Company, 1987.
 10. Morgan, AP. "A Method for Computing All Solutions to Systems of Polynomial Equations", *GM Res. Pub.*, GMR 3651, 1981.
 11. Wu, T.M. "Searching All the Roots of Inverse Kinematics Problem of Robot by Homotopy Continuation Method", *J. Appl. Sci.*, Vol. 5, No. 4, pp. 666-673, 2005.