

## تحلیل ارتعاشات غیرخطی و پایداری دینامیکی میکروورق ویسکوالاستیک نانو کامپوزیتی تحت میدان الکتروستاتیک

امیر جلالی<sup>۱</sup> و سیامک اسماعیل زاده خادم<sup>۲</sup>

دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا

دانشگاه تربیت مدرس

(تاریخ دریافت: ۸۹/۱۱/۰۴؛ تاریخ پذیرش: ۹۱/۴/۱۸)

### چکیده

در این مقاله، ارتعاشات غیرخطی و پایداری دینامیکی یک میکروورق ویسکوالاستیک کامپوزیتی تقویت شده با نانو تیوب کربن مورد بررسی قرار گرفته است. میکروورق مورد بررسی، یک میکرو ورق مربعی تحت میدان الکتروستاتیک بوده و شرایط مرزی آن در چهار لبه، تکیه‌گاه ساده، غیرقابل حرکت، در نظر گرفته شده است. به منظور استخراج خواص مکانیکی مواد، از روش اشلبی-موری-تاناکا استفاده شده است. معادلات حرکت غیرخطی میکروورق با استفاده از روش نیوتن و تئوری وون-کارمن استخراج شده و با به کارگیری ترکیبی از روش گالرکین و تئوری مقیاس‌های چندگانه این معادله‌ها حل شده‌اند. در این مقاله نشان داده شده است که استفاده از میکروورق نانو کامپوزیتی موجب افزایش فرکانس طبیعی و دامنه‌ی ارتعاش میکروورق می‌شود. اما به واسطه‌ی میرایی بالای مواد ویسکوالاستیک، رفتار دینامیکی و ارتعاشی آن به شدت محدود می‌شود. علاوه بر بالا بودن ضریب میرایی ویسکوالاستیک، خاصیت میرایی در این مواد به ازای افزایش ولتاژ الکتروستاتیک نیز متغیر است که امری نامطلوب به‌شمار می‌رود. همچنین به ازای درصد‌های مختلف نانوتیوب کربن در میکروورق ویسکوالاستیک، رفتار غیرخطی ورق کاملاً متفاوت بوده است و می‌تواند به ازای یک مقدار مشخص ولتاژ، رفتاری سخت‌شونده و یا نرم‌شونده داشته باشد که این موضوع، می‌بایست در طراحی میکرو ادوات و به‌ویژه میکرو رزونانورها مورد توجه قرار گیرد.

**واژه‌های کلیدی:** نانو کامپوزیت، ویسکوالاستیک، ارتعاشات غیرخطی، میدان الکتروستاتیک

### Nonlinear Vibration and Dynamic Stability Analysis of a Nanocomposite Viscoelastic Microplate Under an Electrostatic Actuation

A. Jalali and S.E. Khadem

Mech. and Aerospace Eng. Dep't  
Tarbiat Modares Univ.

(Received: 24, January, 2011; Accepted: 8, July, 2012)

### ABSTRACT

In this paper, nonlinear vibration and dynamic stability analysis of a CNT- reinforced nanocomposite viscoelastic microplate under an electrostatic actuation are investigated. The microplate is assumed as a square immovable simply supported microplate and an electrostatic actuation is applied on it. In order to obtain material properties of the nanocomposite microplate, the Eshelby-Mori-Tanaka method is implemented. The nonlinear equations of motion of the microplate are derived and, using the Galerkin method and multiple scale method, these equations are solved. It is shown that nanocomposite viscoelastic microplate increases the natural frequency and deflection of the microplate simultaneously, but, there are some limitations because of high values of viscoelastic damping of the nanocomposite materials. Furthermore, the damping of the nanocomposite microplate is changed, as the electrostatic voltage is changed. This situation is an unfavorable phenomenon. Also nonlinear behavior of the microplate is quite variable as nanotube volume fraction varies and, for a given voltage, it can show softening or hardening behavior as CNT volume fraction changes. This matter should be considered in designing of the microdevices, especially microresonators.

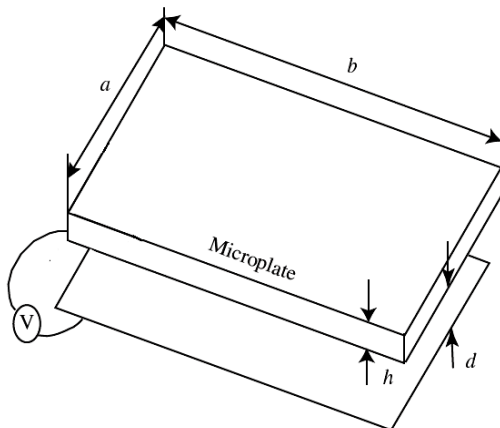
**Keywords:** Nanocomposite, Viscoelastic, Nonlinear Vibration, Electrostatic Actuation

<sup>۱</sup> - دانشجوی دکتری: [amirjalali@modares.ac.ir](mailto:amirjalali@modares.ac.ir)

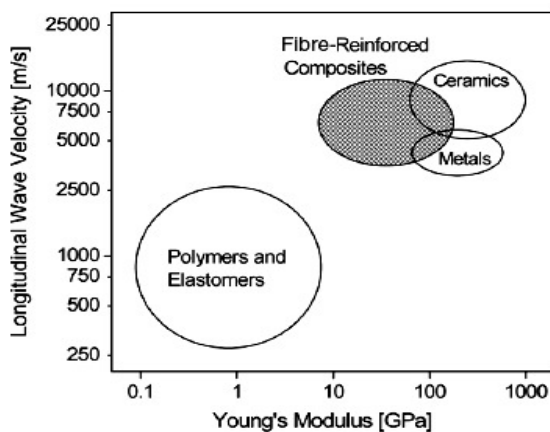
<sup>۲</sup> - استاد (نویسنده پاسخگو): [khadem@modares.ac.ir](mailto:khadem@modares.ac.ir)

## ۱- مقدمه

خواص را با توجه به موارد فوق دارا است و در میان مواد کامپوزیتی، کامپوزیت‌های نانوتیوب کربنی به علت خواص مکانیکی استثنایی نانوتیوب‌ها، یکی از بهترین مواد را تشکیل می‌دهند.



شکل (۱): شماتیک میکروورق با تحریک الکتروستاتیک.



شکل (۲): نمودار انتخاب مواد برای

میکرو حسگرها/میکرو عملگرها [۹].

حسگرها و عملگرهای کامپوزیتی نانوتیوب کربنی، در سال‌های اخیر مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۱۰-۱۲]. رفتار و خصوصیت‌های آنها در تحقیق‌های حاضر به‌وفور بیان شده است [۱۳-۱۵]. افشاری و همکارانش در مقاله‌ی خود، کامپوزیت‌های تقویت شده با نانوتیوب کربن را به‌عنوان دسته‌ی جدیدی از مواد ساختاری برای استفاده در المان‌های مکانیکی سیستم‌های میکروالکترومکانیکال پیشنهاد داده‌اند. آنها، امکان استفاده از کامپوزیت‌های نانوتیوب کربنی در

میکروورق تحریک‌شده با میدان الکتروستاتیک، می‌تواند در ادوات مختلفی از قبیل میکروپمپ‌ها، میکروسوئیچ‌ها، میکروآینه‌ها و ... مورد استفاده قرار گیرد [۵-۱]. شماتیک این المان در شکل ۱ نشان داده شده است. این المان نقش یک الکتروانعطاف‌پذیر در یک خازن را بازی می‌کند و در کنار الکترو ثابت آن، به‌عنوان یک خازن متغیر به حساب می‌آید. در این حالت، نیروی خازنی موجب تغییر شکل خمشی ورق می‌شود که این تغییر شکل خمشی، بر روی نیروی خازنی تأثیرگذار است و آن را تغییر می‌دهد. بنابراین بین نیروهای مکانیکی و الکتریکی در این ادوات، کوپلینگ غیر قابل انکاری وجود دارد که نمی‌توان از آن صرف‌نظر کرد.

این ادوات از جنبه‌های مختلفی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به‌عنوان مثال، تغییر مکان خمشی یک دیافراگم تحت میدان الکتروستاتیک توسط فرانسویس<sup>۱</sup> و دوفور<sup>۲</sup> مورد بحث قرار گرفته است [۶]. خصوصیات دینامیکی یک میکروورق تحت میدان الکتروستاتیک با در نظر گرفتن پارامترهای غیرخطی هندسی آن توسط ان جی<sup>۳</sup> و همکارانش مورد مطالعه قرار گرفته است [۷]. هم‌چنین پاسخ دینامیکی آرایه‌های موازی از میکروورق‌های تحت میدان الکتروستاتیک نیز توسط پورفیری<sup>۴</sup> تحلیل شده است [۸]. باید به این نکته توجه داشت که، تمامی این مطالعات بر روی مدل‌های الاستیک میکروورق انجام شده است.

تغییر مکان خمشی به‌نسبت بزرگ یک میکروورق در فرکانس‌های بالا، جزء یکی از خواص مطلوب میکرو حسگرها و میکرو عملگرها به‌شمار می‌رود. برای داشتن تغییر مکان خمشی بزرگ می‌بایست صلبیت ورق کم باشد و برای داشتن فرکانس طبیعی بالا، می‌بایست سرعت موج  $(c = \sqrt{\frac{E}{\rho}})$  در

میکروورق فوق افزایش یابد. همان‌طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، از میان مواد مختلفی همانند فلزات، سرامیک‌ها و پلیمرها که برای ساخت حسگرها و عملگرها مورد استفاده قرار می‌گیرند، مواد کامپوزیتی مطلوب‌ترین

1- Francois

2- Dufour

3- Ng

4- Porfiri

غیرخطی میکروورق تحت میدان الکتروستاتیک مورد بحث قرار گرفته است. لازم به ذکر است که برای مدل سازی رفتار ویسکوالاستیک ماده نیز از تئوری کلین-وویت<sup>۶</sup> استفاده شده است. به منظور حل معادله های حرکت، روش گالرکین و روش مقیاس های چندگانه به خدمت گرفته شده است. سپس، برای اولین بار، تأثیرات درصد حجمی نانوتیوب کربن بر روی رفتار ارتعاشی و دینامیکی میکروورق نانوکامپوزیتی مورد مطالعه قرار گرفته است و نتیجه های ارزشمندی استخراج شده است.

## ۲- تعیین خواص مکانیکی نانوکامپوزیت

نانوتیوب های کربن یکی از چشمگیرترین و قابل توجه ترین موادی بوده اند که در میکرو ادوات به خدمت گرفته شده اند. این مواد اولین بار توسط ایچیمای<sup>۷</sup> کشف شده اند [۲۰]. نانوتیوب کربن دو نوع کاملاً متفاوت دارد که به آن نانوتیوب کربن تک دیواره<sup>۸</sup> (SWNT) و نانوتیوب چند دیواره<sup>۹</sup> (MWNT) گفته می شود. برخی از خواص نانو تیوب های کربن در جدول ۱ ذکر شده است.

جدول (۱): خواص نانوتیوب های کربن [۹].

	(10,10)SWNTs	(30,30) <sub>10</sub> MWNTs	Array of (10,10)SWNTs
$E_{11}$ (Gpa)	۱۰۶۰	۸۰۰	۵۸۰
$E_{22}$ (Gpa)	۶/۶۳	۱۵/۵۸	۹/۴
$V$	۰/۱۶	۰/۱۴	۰/۱۸
$\rho$ (kg / m <sup>3</sup> )	۱۴۴۰	۲۰۹۰	۱۱۵۰

در این مقاله از SWNT (10, 10) به عنوان المان تقویت کننده و از PMMA<sup>۱۰</sup> به عنوان ماتریس استفاده شده است. علت استفاده از PMMA، مقاومت بسیار بالای این ماده، در مقابل شرایط آب و هوایی متفاوت است. مدول الاستیک نانوکامپوزیت CNT/PMMA با استفاده از روش اشلبی-موری تاناکا<sup>۱۱</sup> [۲۱] به دست آمده است. جدول ۲ خواص

طراحی عملگرها را به طور کامل مطالعه کرده اند و خصوصیات رفتاری آنها را تحت شرایط عملگری بررسی کرده اند [۹].  
عموماً، کامپوزیت پلیمری تقویت شده با نانوتیوب کربن به عنوان یک ماده ویسکوالاستیک به شمار می رود. فو<sup>۱</sup> و ژانگ<sup>۲</sup> پایداری دینامیکی غیرخطی یک میکروتیر اویلر-برنولی ویسکوالاستیک را تحت دو نوع بار الکتریکی مختلف مطالعه کرده اند [۱۶]. هم چنین فو و همکارانش پایداری دینامیکی غیرخطی یک میکروتیر ویسکوالاستیک دوسر گیردار را تحت بار محوری تناوبی و بار الکتروستاتیک متقارن مورد بررسی قرار داده اند. آنها در این مقاله، از مدل استاندارد برای مدل سازی رفتار ویسکوالاستیک استفاده کرده اند و تأثیرات میرایی محیطی و میرایی درون سازه ای، تأثیرات غیرخطی هندسی، خزش و بار الکتروستاتیک را بر روی نواحی پایداری مورد بررسی قرار داده اند [۱۷]. فو و ژانگ در مقاله ای دیگر، پاسخ استاتیکی و دینامیکی غیرخطی یک میکروورق ویسکوالاستیک را به صورت عددی مطالعه کرده و شکل های مختلف ناپایداری پولین<sup>۳</sup> را مورد بحث قرار داده اند [۱۸].  
پاسخ یک میکروتیر ویسکوالاستیک به تحریک الکتروستاتیک، توسط زمانیان و همکارانش استخراج شده است [۱۹]. آنها در مقاله خود از روش گالرکین و تئوری اغتشاشات برای یافتن پاسخ استفاده کرده اند و نشان داده اند که حتی مقادیر بسیار کوچک میرایی ویسکوالاستیک می تواند باعث کاهش قابل توجهی بیشینه دامنه ارتعاشات میکروتیر شود و فرکانس غیرخطی سیستم را به طور قابل ملاحظه ای منتقل کند. در این مقاله، با استفاده از تئوری ورق وون-کارمن<sup>۴</sup>، معادله های حاکم بر حرکت یک میکروورق با تکیه گاه های ساده ی غیرصاف حرکت<sup>۵</sup>، در چهار طرف استخراج شده و در استخراج معادله ها، کلیه ی پارامترهای صلبیت، میرایی و اینرسی غیرخطی لحاظ شده است. به عبارت دیگر برای اولین بار مدل کامل غیرخطی میکروورق به صورت سه معادله و بدون حذف هیچ یک از ترم های موجود در معادله ها مورد بررسی قرار گرفته است. سپس پاسخ استاتیکی و دینامیکی

6- Kelvin-Voigt

7 -Iijima

8- Single Wall Carbon NanoTube

9 -Multi Wall Carbon NanoTube

10 -Poly(Methyl Methacrylate)

11- Eshelby-Mori-Tanaka Method

1- Fu

2 -Zhang

3 -Pull-in

4 -Von Karmann

5 -Immovable Simply Supported Boundary Condition

الکتروستاتیک، با استفاده از تئوری ورق وون-کارمن و نیز تئوری ویسکوالاستیک کلوین-وویت به صورت زیر به دست می آید [۲۲]:

$$\frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left\{ \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t} \right) \right] + \right. \\ \left. \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \right] \right. \\ \left. \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y \partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right\} \\ + \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2 \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y \partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2 \partial t} \right) \right] = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left\{ \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2 \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2 \partial t} \right) \right] + \right. \\ \left. \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \right] \right. \\ \left. \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right\} \\ + \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y \partial t} \right) \right] = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (2)$$

$$\frac{1}{12} h^2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \frac{1}{12} h^2 \eta \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4 \partial t} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2 \partial t} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4 \partial t} \right) \\ + \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{(1-\nu^2) N_{xx}}{Eh} + \\ \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \nu \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ + \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{(1-\nu^2) N_{yy}}{Eh} + \\ \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \nu \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ + (1-\nu) \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + 2 \frac{(1+\nu) N_{xy}}{Eh} \right. \\ \left. \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \\ = C_p^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial w}{\partial x} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\epsilon_0 (1-\nu^2) (V_p + V_d)^2}{2Eh d^2 (1-\frac{w}{d})^2}. \quad (3)$$

که شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده غیر قابل حرکت برای لبه‌های آن به صورت زیر خواهد بود:

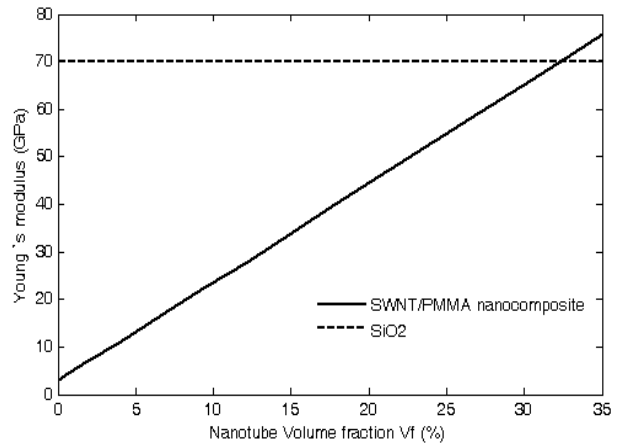
$$x=0, a \quad , \quad u=v=w=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \\ y=0, b \quad , \quad u=v=w=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

مکانیکی مواد مورد استفاده در این مقاله به عنوان ورق نانوکامپوزیتی را لیست کرده است. ماده‌ی SiO<sub>2</sub> یکی از مواد رایجی است که به عنوان المان پایه در میکروادوات مورد استفاده قرار می‌گیرد و رفتاری الاستیک از خود بروز می‌دهد.

جدول (۲): خواص مواد مورد استفاده به عنوان ماتریس [۹].

Material	$\rho$ (kg / m <sup>3</sup> )	E (Gpa)	$\nu$
SiO <sub>2</sub>	۲۶۰۰	۷۰	۰/۲
PMMA	۱۱۵۰	۳	۰/۴

در این مقاله با فرض توزیع الیاف در ماتریس با جهت قرارگیری به طور کامل اتفاقی و نسبت لاغری الیاف بزرگ‌تر از ۱۰۰۰، مدول الاستیک نانوکامپوزیت SWNT/PMMA نسبت به درصد حجمی نانوتیوب، با استفاده از روش اشلیبی-موری تاناکا استخراج شده و در شکل ۳ نشان داده شده است. روابط و ضرایب مربوط به این روش در پیوست (الف) آورده شده است.



شکل (۳): مدول یانگ یک نانوکامپوزیت تقویت شده با نانوتیوب کربن با توزیع به طور کامل تصادفی نانوتیوب.

همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، به ازای درصد حجمی نانوتیوب کربن معادل ۳/۳۲٪ مدول الاستیک نانوکامپوزیت با مدول الاستیک SiO<sub>2</sub> برابر خواهد بود.

### ۳- مدل‌سازی و فرمول‌بندی

معادلات حاکم بر تغییر مکان خمشی به نسبت بزرگ یک میکروصفحه‌ی مستطیلی ویسکوالاستیک تحت میدان

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) - \\
& \eta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2 \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^4 \partial t}\right) \\
& + 12\alpha_1 \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu c \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \nu c^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] + \\
& N_1 + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \nu c \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \nu c^2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
& + 12c^2 \alpha_1 \left[c \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(c^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) + N_2 + \right. \\
& \left. \eta \left(c \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \\
& + 12c(1-\nu) \alpha_1 \left[c \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + N_{12} + \right. \\
& \left. \eta \left(c \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial w}{\partial y} + c \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right] \\
& = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} - \alpha_2 \frac{(V_p + V_t)^2}{(1-\nu)^2}\right).
\end{aligned} \quad (8)$$

و شرایط مرزی بی‌بعد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
x=0,1 \quad , \quad u=v=w=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \\
y=0,1 \quad , \quad u=v=w=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.
\end{aligned} \quad (9)$$

همان‌گونه که در این معادله‌ها مشاهده می‌شود، ترم‌های غیرخطی سختی، میرایی و اینرسی در این معادله‌ها ظاهر شده‌اند. همچنین پارامترهای  $c$ ،  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  که در این معادله‌ها ظاهر شده‌اند، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$c = \frac{a}{b}, \quad \alpha_1 = \frac{d^2}{h^2}, \quad \alpha_2 = \frac{6E_0(1-\nu^2)a^4}{Eh^3d^3}. \quad (10)$$

### ۳-۱- تغییر مکان استاتیکی

تغییر مکان خمشی میکروورق تحت میدان الکتروستاتیک را می‌توان متشکل از دو جزء دانست: جزء استاتیکی ناشی از ولتاژ DC و جزء نوسانی ناشی از ولتاژ AC. بنابراین تغییر مکان‌های میکروورق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= u_s(x, y) + u_d(x, y, t), \\
v(x, y, t) &= v_s(x, y) + u_d(x, y, t), \\
w(x, y, t) &= w_s(x, y) + w_d(x, y, t).
\end{aligned} \quad (11)$$

در این روابط، زیرنویس "s" و "d" نمایانگر اجزای استاتیکی و دینامیکی تغییر مکان‌ها هستند.

با جای‌گذاری معادله‌ی (۱۱) در معادله‌های (۸-۶) و حذف کردن ترم‌های حاوی مشتقات زمانی از معادله‌های

در صورت حذف ترم میدان الکتروستاتیک در این معادلات، می‌توان معادلات مربوط به صفحه مقیاس ماکرو را که در مرجع [۲۳] ذکر شده است به دست آورد. که در این معادله،  $w = w(x, y, t)$  و  $v = v(x, y, t)$ ،  $u = u(x, y, t)$  جابه‌جایی‌های میکروورق در جهات  $X$ ،  $Y$  و  $Z$ ،  $\eta$  بیانگر میرایی ویسوالاستیک،  $\nu$  بیانگر ضریب پواسون،  $E$  بیانگر مدول یانگ،  $h$  بیانگر ضخامت ورق،  $\rho$  بیانگر دانسیته،  $d$  بیانگر فاصله هوایی بین الکترودها،  $\epsilon_0$  بیانگر ثابت دی‌الکتریک هوا، و  $V_p$  و  $V_d$  بیانگر المان‌های پولاریزاسیون و نوسانی ولتاژ اعمالی به ورق هستند. معادله‌های (۳-۱) می‌تواند با استفاده از پارامترهای بی‌بعدسازی زیر به صورت بی‌بعد نوشته شوند.

$$\begin{aligned}
x^* &= \frac{x}{a}, \quad y^* = \frac{y}{b}, \quad t^* = \frac{t}{\tau}, \quad u^* = \frac{au}{d^2}, \\
v^* &= \frac{av}{d^2}, \quad w^* = \frac{w}{d}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{\tau}.
\end{aligned} \quad (5)$$

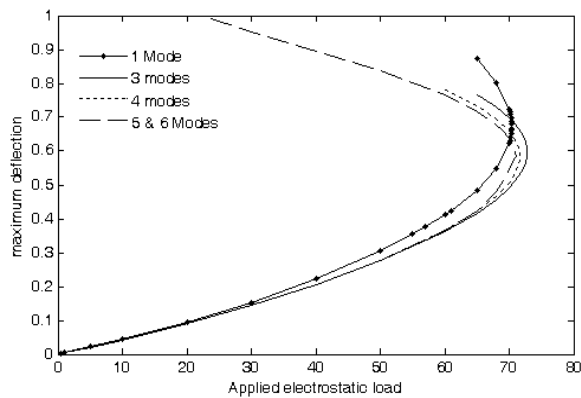
در این رابطه،  $\tau = \frac{\sqrt{12}a^2}{hc_p}$  و  $c_p^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$  است.

بنابراین، شکل بی‌بعد معادله‌های (۳-۱) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t}\right) + \\
& \nu \left[c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + c^2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \right. \\
& \left. \eta \left(c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y \partial t} + c^2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\right] + \\
& \frac{(1-\nu)}{2} \left[c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + c^2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right.
\end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
& \left. \eta \left(c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2 \partial t} + c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y \partial t} + c^2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y \partial t} + \right. \right. \\
& \left. \left. c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2 \partial t}\right)\right] = \frac{h^2}{12a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
& c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c^3 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \eta \left(c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2 \partial t} + c^3 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c^3 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2 \partial t}\right) + \\
& \nu \left[c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \right. \\
& \left. \eta \left(c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y \partial t} + c \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\right] \\
& + \frac{(1-\nu)}{2} \left[c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \right. \\
& \left. \eta \left(c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial t} + \right. \right. \\
& \left. \left. + c \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t} + c \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \right. \right. \\
& \left. \left. c \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y \partial t}\right)\right] = \frac{h^2}{12a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},
\end{aligned} \quad (7)$$

بدین صورت یک سری معادله‌های جبری بر حسب ضرایب ثابت مسئله به دست می‌آید. این کار به تعداد توابع مقایسه‌ای تکرار می‌شود که نتیجه‌ی آن یک دستگاه معادله‌های جبری متشکل از مقادیر مجهول  $C_{m,n}$  خواهد بود. به منظور تعیین تعداد موده‌های مورد نیاز که می‌بایست به منظور دستیابی به دقت مورد نظر مورد استفاده قرار گیرد، همگرایی این روش مدنظر قرار گرفته است. شکل ۴ تغییر مکان بیشینه‌ی میکروورق را برای حل مسئله با تعداد موده‌های مختلف در نظر گرفته شده در روش گالرکین نشان می‌دهد. مقادیر مورد استفاده در این تحلیل عبارت است از:  $a = 310 \mu m$  و  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} F/m$ . همگرایی، یک میکروورق  $SiO_2$  مربعی با تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است.



شکل (۴): بیشینه تغییر شکل یک میکروورق مربعی با تکیه‌گاه ساده نسبت به نیروی الکتروستاتیک  $\alpha_2 V_p^2$ ، برای  $\alpha_1 = 1$ .

همان‌طور که در شکل ۴ نشان داده شده است، برای دستیابی به دقت مورد نظر حداقل می‌بایست ۵ مود در روش گالرکین مورد استفاده قرار گیرد. شکل‌های ۶-۵ تغییرات  $w_{max}$  و  $\alpha_2 V_p^2$  را نسبت به پارامتر  $\alpha_1$  برای روش مورد استفاده در این مقاله و نیز روش استفاده شده توسط ژائو<sup>۲</sup> و همکارانش [۲۵] را نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل نشان داده شده است، تطابق مناسبی بین نتیجه‌های دو تحقیق وجود دارد. بنابراین مدل مورد استفاده در این تحقیق مقادیر ولتاژ پولین را با دقت مناسب تخمین می‌زند.

حاصله، معادلات حاکم بر پاسخ استاتیکی ورق به شکل زیر استخراج خواهد شد:

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \nu (c \frac{\partial^2 v_s}{\partial x \partial y} + c^2 \frac{\partial w_s}{\partial y} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}) + \frac{(1-\nu)}{2} [c^2 \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v_s}{\partial x \partial y} + c^2 \frac{\partial w_s}{\partial y} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} + c^2 \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}] = 0 \quad (12)$$

$$c^2 \frac{\partial^2 v_s}{\partial y^2} + c^3 \frac{\partial w_s}{\partial y} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \nu (c \frac{\partial^2 u_s}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}) + \frac{(1-\nu)}{2} [c \frac{\partial^2 u_s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} + c \frac{\partial w_s}{\partial y} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + c \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}] = 0 \quad (13)$$

$$-(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + 2c^2 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + c^4 \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4}) + 12\alpha_1 [\frac{\partial u_s}{\partial x} + \nu c \frac{\partial v_s}{\partial y} + \frac{1}{2} (\frac{\partial w_s}{\partial x})^2] + \nu c^2 (\frac{\partial w_s}{\partial y})^2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + 12c^2 \alpha_1 [c \frac{\partial v_s}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{1}{2} (c^2 (\frac{\partial w_s}{\partial y})^2 + \nu (\frac{\partial v_s}{\partial x})^2)] \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + 12c(1-\nu) \alpha_1 c \frac{\partial u_s}{\partial y} + \frac{\partial v_s}{\partial x} + c \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial w_s}{\partial y} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} = -\alpha_2 \frac{(V_p)^2}{(1-w_s)^2} \quad (14)$$

به منظور حل معادله‌های غیرخطی فوق، از روش گالرکین<sup>۱</sup> استفاده شده است. در روش گالرکین شکل تابع پاسخ به صورت یک سری، که هر جمله‌ی آن حاصل ضرب یک ضریب ثابت در یک تابع مقایسه‌ای است، در نظر گرفته می‌شود. این سری می‌بایست تمامی شرایط هندسی مسئله را ارضا کند. بدین منظور پاسخ معادله‌های (۱۲-۱۴) به شکل زیر فرض شده است [۲۴]:

$$u_{m,n}(x,y) = C_{1m,n} \sin(2m\pi x) \sin((2n-1)\pi y), \\ v_{m,n}(x,y) = C_{2m,n} \sin((2m-1)\pi x) \sin(2n\pi y), \quad m,n = 1,2,\dots \\ w_{m,n}(x,y) = C_{3m,n} \sin((2m-1)\pi x) \sin((2n-1)\pi y). \quad (15)$$

با ضرب نمودن هر دو طرف معادله‌ی (۱۴) در  $(1-w_s(x,y))^2$ ، جایگذاری معادله‌ی (۱۵) در معادله حاصله و نیز معادله‌های (۱۲-۱۳)، و به کارگیری روش گالرکین، مقادیر  $C_{m,n}$  و در نتیجه تغییر شکل‌های میکروورق نانوکامپوزیتی به دست خواهد آمد. در روش گالرکین، پس از جایگذاری توابع پاسخ و با استفاده از خاصیت تعامد، معادله حرکت در توابع مقایسه‌ای مختلف ضرب شده و از هر کدام از معادله‌های حرکت در حوزه حل، انتگرال گرفته می‌شود.

$$p_1 \frac{\partial^2 u_d}{\partial x^2} + p_2 \frac{\partial^2 v_d}{\partial x \partial y} + p_3 \frac{\partial^2 u_d}{\partial y^2} + p_4 \frac{\partial w_d}{\partial x} + p_5 \frac{\partial w_d}{\partial y} +$$

$$p_6 \frac{\partial^2 w_d}{\partial x^2} + p_7 \frac{\partial^2 w_d}{\partial y^2} + p_8 \frac{\partial^2 w_d}{\partial x \partial y} + p_9 \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2} = 0, \quad (16)$$

$$q_1 \frac{\partial^2 v_d}{\partial y^2} + q_2 \frac{\partial^2 u_d}{\partial x \partial y} + q_3 \frac{\partial^2 v_d}{\partial x^2} + q_4 \frac{\partial w_d}{\partial x} + q_5 \frac{\partial w_d}{\partial y} +$$

$$q_6 \frac{\partial^2 w_d}{\partial x^2} + q_7 \frac{\partial^2 w_d}{\partial y^2} + q_8 \frac{\partial^2 w_d}{\partial x \partial y} + q_9 \frac{\partial^2 v_d}{\partial t^2} = 0, \quad (17)$$

$$r_1 \frac{\partial^4 w_d}{\partial x^4} + r_2 \frac{\partial^4 w_d}{\partial x^2 \partial y^2} + r_3 \frac{\partial^4 w_d}{\partial y^4} + r_4 \frac{\partial w_d}{\partial x} + r_5 \frac{\partial w_d}{\partial y} + r_6 \frac{\partial^2 w_d}{\partial x^2} +$$

$$r_7 \frac{\partial^2 w_d}{\partial y^2} + r_8 \frac{\partial^2 w_d}{\partial x \partial y} + r_9 \frac{\partial u_d}{\partial x} + r_{10} \frac{\partial u_d}{\partial y} \quad (18)$$

$$+ r_{11} \frac{\partial v_d}{\partial x} + r_{12} \frac{\partial v_d}{\partial y} + r_{13} \frac{\partial^2 v_d}{\partial t^2} + r_{14} w_d + r_{15} \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2} + r_{16} \frac{\partial^2 v_d}{\partial t^2} = 0.$$

که ضرایب  $p_1$  تا  $p_9$ ،  $q_1$  تا  $q_9$  و  $r_1$  تا  $r_{16}$  در پیوست (ب) تعریف شده‌اند. به منظور حل معادله‌های (۱۶-۱۹) این‌طور در نظر گرفته می‌شود که [۲۴]:

$$u_d(x, y, t) = U(x, y) e^{i\omega_{m,n}t},$$

$$v_d(x, y, t) = V(x, y) e^{i\omega_{m,n}t}, \quad (19)$$

$$w_d(x, y, t) = W(x, y) e^{i\omega_{m,n}t}.$$

در این معادله:

$$U(x, y) = B_{1m,n} \Phi_{u,m,n}(x, y),$$

$$V(x, y) = B_{2m,n} \Phi_{v,m,n}(x, y), \quad (20)$$

$$W(x, y) = B_{3m,n} \Phi_{w,m,n}(x, y).$$

که در آن،  $\Phi$  و  $\omega_{m,n}$  به ترتیب شکل مود خطی و فرکانس طبیعی میکروورق در حالت بدون تغییر شکل استاتیکی است. با جایگذاری معادله‌های (۲۰-۱۹) و نیز پاسخ معادله‌های (۱۴-۱۲) در معادله‌های (۱۸-۱۶) و به‌کارگیری روش گالرکین، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای میکروورق استخراج خواهند شد.

### ۳-۳- تحلیل پاسخ دینامیکی

به منظور حل معادله‌های دینامیکی حاکم بر حرکت میکروورق حول موقعیت استاتیکی آن، از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده شده است. بنابراین تغییر مکان‌های میکروورق به صورت زیر فرض شده است [۲۶]:

$$u_d(x, y, t) = \varepsilon u_1(x, y, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(x, y, T_0, T_1, T_2) +$$

$$\varepsilon^3 u_3(x, y, T_0, T_1, T_2),$$

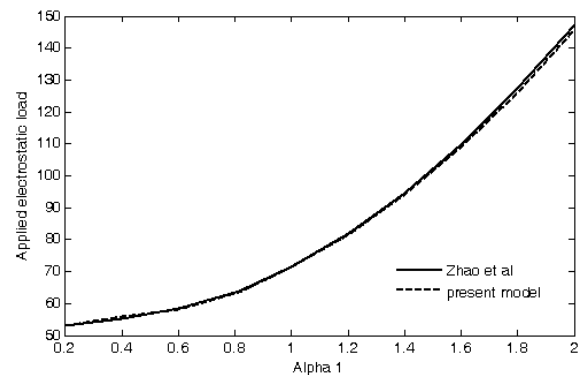
$$v_d(x, y, t) = \varepsilon v_1(x, y, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 v_2(x, y, T_0, T_1, T_2) +$$

$$\varepsilon^3 v_3(x, y, T_0, T_1, T_2), \quad (21)$$

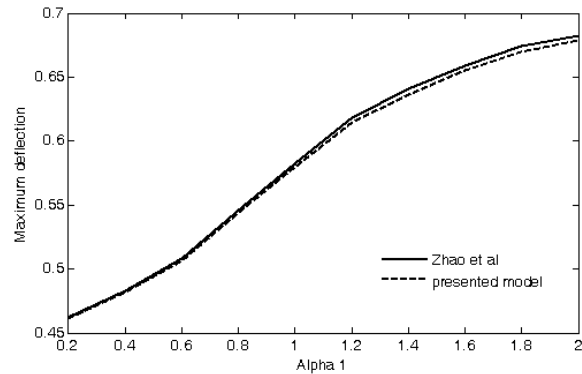
$$w_d(x, y, t) = \varepsilon w_1(x, y, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 w_2(x, y, T_0, T_1, T_2) +$$

$$\varepsilon^3 w_3(x, y, T_0, T_1, T_2).$$

همان‌طور که در این شکل‌ها نیز مشاهده می‌شود، بیشینه اختلاف بین دو مدل معادل ۰.۳٪ برای  $\alpha_2 = 2$  است.



شکل (۵): تغییرات نیروی الکتروستاتیک پولین نسبت به  $\alpha_1$  برای یک میکروورق مربعی با تکیه‌گاه ساده.



شکل (۶): تغییرات بیشینه تغییر شکل ورق نسبت به  $\alpha_1$  برای یک میکروورق مربعی با تکیه‌گاه ساده.

### ۳-۲- استخراج فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها

با جایگذاری معادله‌ی (۱۱) و سپس معادله‌های (۱۴-۱۲) در معادله‌های (۸-۶)، معادله‌های حاکم بر رفتار دینامیکی غیرخطی میکروورق حول موقعیت استاتیکی آن به‌دست خواهد آمد، که پاسخ آن در قسمت‌های بعدی محاسبه شده است. به منظور به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای خطی سیستم، می‌بایست معادله‌های حاکم بر حرکت ارتعاشات خطی آن را به‌دست آورد که این کار با حذف جملات حاوی ترم‌های غیرخطی، میرایی و نیرو از معادله‌های حاصله انجام می‌شود و در نتیجه معادله‌های مقدار ویژه خطی میکروورق حول موقعیت استاتیکی آن به شکل زیر استخراج خواهد شد:

$$L_{2u} [u_2, v_2, w_2] = -q_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - q_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} - q_3 \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - q_9 \frac{\partial^2 v_1}{\partial T_0 \partial T_1} \quad (28)$$

$$L_{2v} [u_2, v_2, w_2] = -2 \frac{\partial^3 v_1}{\partial T_0 \partial T_1} + \alpha_1 \frac{h^2}{a^2} \left( \frac{\partial^3 v_1}{\partial T_0^2} \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + 2\alpha_1 \frac{h^2}{a^2} \left( \frac{\partial^3 v_1}{\partial T_0 \partial T_1} \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1} \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) + 12\alpha_1 (1-\nu) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} + 12\alpha_1 (1-\nu) \frac{\partial w_s}{\partial y} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y} + 12\alpha_1 (1-\nu) \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y} + 6\alpha_1 \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2} \left( \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right) + 6\alpha_1 \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2} \left( \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right) + 12\alpha_1 \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^2} \right) + 12\alpha_1 \frac{\partial w_s}{\partial y} \frac{\partial w_1}{\partial y} \left( \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2} \right) + 12\alpha_1 (1-\nu) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + 12\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^2} \right) + 12\alpha_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \left( \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2} \right) + \frac{3\alpha_2 V_s \dot{w}_1}{(-1+w_s)^4} \quad (29)$$

$$x = 0, 1, \quad u_2 = v_2 = w_2 = 0, \quad \text{and} \quad \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^2} = 0, \quad (30)$$

$$y = 0, 1, \quad u_2 = v_2 = w_2 = 0, \quad \text{and} \quad \frac{\partial^3 w_2}{\partial y^2} = 0,$$

order ( $\epsilon^3$ ):

$$L_{3u} [u_3, v_3, w_3] = \sigma_1 \Gamma_u^{\sigma_1} + \Gamma_u^K - \eta \frac{\partial}{\partial T_0} \Gamma_u^\eta + \Gamma_u^m \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_2} + p_9 \left( 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_1^2} \right), \quad (31)$$

$$L_{3v} [u_3, v_3, w_3] = \sigma_1 \Gamma_v^{\sigma_1} + \Gamma_v^K - \eta \frac{\partial}{\partial T_0} \Gamma_v^\eta + \Gamma_v^m \frac{\partial^2 v_1}{\partial T_0 \partial T_2} + q_9 \left( 2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial T_1^2} \right), \quad (32)$$

$$L_{3w} [u_3, v_3, w_3] = \sigma_1 (\Gamma_w^{\sigma_1} + \bar{\Gamma}_w^{\sigma_1}) - \eta \frac{\partial}{\partial T_0} \Gamma_w^\eta + \Gamma_w^K - \Gamma_w^m \frac{\partial^3 w_1}{\partial T_0 \partial T_2} + \Gamma_w^m \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_2} + \Gamma_w^m \frac{\partial^2 v_1}{\partial T_0 \partial T_2} + \bar{\Gamma}_w^m \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + \bar{\Gamma}_w^m \frac{\partial^2 v_1}{\partial T_0^2} + \frac{\alpha_1 V_s e^{(a t_0)}}{(-1+w_s)^2} \quad (33)$$

$$-\alpha_1 \frac{h^2}{a^2} \left[ 2 \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1} + 2 \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial^2 v_1}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0 \partial T_1} \right] + \frac{\partial w_s}{\partial y} \left( \frac{\partial^3 v_1}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial^3 v_2}{\partial T_0 \partial T_1} \right) - \frac{\partial^3 w_1}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^3 w_2}{\partial T_0 \partial T_1} \quad (34)$$

$$x = 0, 1, \quad u_3 = v_3 = w_3 = 0, \quad \text{and} \quad \frac{\partial^3 w_3}{\partial x^2} = 0,$$

$$y = 0, 1, \quad u_3 = v_3 = w_3 = 0, \quad \text{and} \quad \frac{\partial^3 w_3}{\partial y^2} = 0.$$

که ضریب‌های موجود در این معادله‌ها، در پیوست (ج) معرفی شده‌اند. حل معادله‌های (۲۳-۲۶) به صورت زیر خواهد بود:

$$u_1 = A(T_1, T_2) \phi_u(x, y) e^{i a T_0} + \bar{A}(T_1, T_2) \phi_u(x, y) e^{-i a T_0},$$

$$v_1 = A(T_1, T_2) \phi_v(x, y) e^{i a T_0} + \bar{A}(T_1, T_2) \phi_v(x, y) e^{-i a T_0}, \quad (35)$$

$$w_1 = A(T_1, T_2) \phi_w(x, y) e^{i a T_0} + \bar{A}(T_1, T_2) \phi_w(x, y) e^{-i a T_0}$$

که در آن،  $\phi_u, \phi_v, \phi_w$  و  $\varphi_u$  شکل مودهای نرمال شده اول

که در آن،  $T_0, T_1, T_2$  سه مقیاس زمانی به شکل  $T_2 = \epsilon^2 T$  و  $T_1 = \epsilon t, T_0 = t$  هستند و  $\epsilon$  پارامتر سامان‌دهنده<sup>۱</sup> کوچک بدون بعد است. به منظور ایجاد توازن بین ترم‌های غیرخطی موجود در معادله‌های با ترم میرایی ویسکوالاستیک  $\eta$  و نیروی تحریک  $V_d$ ، این دو ترم به ترتیب به عنوان ترم‌هایی با مرتبه  $\epsilon^2$  و  $\epsilon^3$  در نظر گرفته شده‌اند. همچنین با در نظر گرفتن این فرض که طول و عرض ورق بسیار به یکدیگر نزدیک هستند، پارامتر بی بعد  $\sigma_1$  به صورت زیر تعریف شده است [۲۶]:

$$c = 1 + \epsilon^2 \sigma_1. \quad (22)$$

با جایگذاری معادله‌های (۲۱-۲۲) در معادله‌های حرکت دینامیکی میکروورق حول موقعیت استاتیکی آن و مساوی قرار دادن ترم‌های حاوی توان‌های برابر از  $\epsilon$  خواهیم داشت: order ( $\epsilon^1$ ):

$$L_{1u} [u_1, v_1, w_1] = p_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + p_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + p_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + p_4 \frac{\partial w_1}{\partial x} + p_5 \frac{\partial w_1}{\partial y} + p_6 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + p_7 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + p_8 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + p_9 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0, \quad (23)$$

$$L_{1v} [u_1, v_1, w_1] = q_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + q_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + q_3 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + q_4 \frac{\partial w_1}{\partial x} + q_5 \frac{\partial w_1}{\partial y} + q_6 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + q_7 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + q_8 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + q_9 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0, \quad (24)$$

$$L_{1w} [u_1, v_1, w_1] = r_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + r_2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + r_3 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} + r_4 \frac{\partial w_1}{\partial x} + r_5 \frac{\partial w_1}{\partial y} + r_6 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + r_7 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + r_8 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + r_9 \frac{\partial u_1}{\partial x} + r_{10} \frac{\partial u_1}{\partial y} + r_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x} + r_{12} \frac{\partial v_1}{\partial y} + r_{13} \frac{\partial^3 w_1}{\partial t^2} + r_{14} w_1 + r_{15} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + r_{16} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0, \quad (25)$$

$$x = 0, 1, \quad u_1 = v_1 = w_1 = 0, \quad \text{and} \quad \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2} = 0,$$

$$y = 0, 1, \quad u_1 = v_1 = w_1 = 0, \quad \text{and} \quad \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^2} = 0. \quad (26)$$

order ( $\epsilon^2$ ):

$$L_{2u} [u_2, v_2, w_2] = -p_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - p_2 \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} - p_3 \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - p_9 \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1}, \quad (27)$$

1- Bookkeeping parameter



که در آن،  $\psi_j$  از حل معادله زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
 & p_1 \frac{\partial^2 \psi_{ju}}{\partial x^2} + p_2 \frac{\partial^2 \psi_{jv}}{\partial x \partial y} + p_3 \frac{\partial^2 \psi_{ju}}{\partial y^2} + \\
 & p_4 \frac{\partial \psi_{jw}}{\partial x} + p_5 \frac{\partial w_{jw}}{\partial y} + p_6 \frac{\partial^2 w_{jw}}{\partial x^2} + \\
 & p_7 \frac{\partial^2 w_{jw}}{\partial y^2} + p_8 \frac{\partial^2 w_{jw}}{\partial x \partial y} - 4\omega_j^2 p_9 \psi_{ju} = H_1(x, y) \\
 & q_1 \frac{\partial^2 \psi_{jv}}{\partial y^2} + q_2 \frac{\partial^2 \psi_{ju}}{\partial x \partial y} + q_3 \frac{\partial^2 \psi_{jv}}{\partial x^2} + \\
 & q_4 \frac{\partial \psi_{jw}}{\partial x} + q_5 \frac{\partial \psi_{jw}}{\partial y} + q_6 \frac{\partial^2 \psi_{jw}}{\partial x^2} + \\
 & q_7 \frac{\partial^2 \psi_{jw}}{\partial y^2} + q_8 \frac{\partial^2 \psi_{jw}}{\partial x \partial y} - 4\omega_j^2 q_9 \psi_{jv} = H_2(x, y), \quad (39) \\
 & r_1 \frac{\partial^4 \psi_{jw}}{\partial x^4} + r_2 \frac{\partial^4 \psi_{jw}}{\partial x^2 \partial y^2} + r_3 \frac{\partial^4 \psi_{jw}}{\partial y^4} + \\
 & r_4 \frac{\partial \psi_{jw}}{\partial x} + r_5 \frac{\partial \psi_{jw}}{\partial y} + r_6 \frac{\partial^2 \psi_{jw}}{\partial x^2} + \\
 & r_7 \frac{\partial^2 \psi_{jw}}{\partial y^2} + r_8 \frac{\partial^2 \psi_{jw}}{\partial x \partial y} + r_9 \frac{\partial \psi_{ju}}{\partial x} + r_{10} \frac{\partial \psi_{ju}}{\partial y} \\
 & + r_{11} \frac{\partial \psi_{jv}}{\partial x} + r_{12} \frac{\partial \psi_{jv}}{\partial y} + (r_{14} - 4\omega_j^2 r_{13}) \psi_{jv} - \\
 & 4\omega_j^2 r_{15} \psi_{ju} - 4\omega_j^2 r_{16} \psi_{jv} = H_3(x, y) \\
 & j=1,2.
 \end{aligned}$$

در این معادله به ازای  $j=1$ ، مقدار فرکانس طبیعی  $\omega_j = \omega$  و به ازای  $j=2$ ، فرکانس طبیعی  $\omega_j = 0$  خواهد بود. به منظور حل معادله‌ی (۳۹)،  $\psi_{ju}$ ،  $\psi_{jv}$  و  $\psi_{jw}$  به صورت زیر فرض می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 \psi_{ju}(x, y) &= \sum_{i=1}^M a_{ui} \phi_{ui}, \\
 \psi_{jv}(x, y) &= \sum_{i=1}^M a_{vi} \phi_{vi}, \quad (40) \\
 \psi_{jw}(x, y) &= \sum_{i=1}^M a_{wi} \phi_{wi}.
 \end{aligned}$$

در این معادله،  $\phi_u$ ،  $\phi_v$  و  $\phi_w$  شکل موده‌های نامیرای میکروورق حول موقعیت استاتیکی آن هستند. با جایگذاری معادله‌ی (۴۰) در معادله‌ی (۳۹) و به کارگیری روش گالرکین، مقدار ثابت‌های  $a_i$  و در نتیجه، مقادیر  $\psi_j(x, y)$  به دست خواهد آمد.

حال، با جایگذاری معادله‌های (۳۸ و ۳۵) در معادله‌های (۳۱-۳۳) و بیان نزدیک بودن فرکانس تحریک و فرکانس طبیعی اصلی سیستم با استفاده از پارامتر  $\sigma_2$  به شکل

میکروورق هستند، یعنی:  $\iint \phi dx dy = 1$ . هم‌چنین  $\omega$  نیز فرکانس طبیعی اول سیستم بوده و  $A(T_1, T_2)$  تابع مختلطی است که، می‌بایست از شرط حل‌پذیری مسئله به دست آید. با جایگذاری معادله‌ی (۳۵) در معادله‌های (۲۷-۲۹) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 L_{2u}[u_2, v_2, w_2] &= (A^2 e^{2i\omega T_0} + 2A\bar{A} + \bar{A}^2 e^{-2i\omega T_0}) H_1(x, y) + \\
 & 2i\omega p_9 \left( \frac{\partial A}{\partial T_1} e^{i\omega T_0} - \frac{\partial \bar{A}}{\partial T_1} e^{-i\omega T_0} \right) \phi_u, \\
 L_{2v}[u_2, v_2, w_2] &= (A^2 e^{2i\omega T_0} + 2A\bar{A} + \bar{A}^2 e^{-2i\omega T_0}) H_2(x, y) + \\
 & 2i\omega q_9 \left( \frac{\partial A}{\partial T_1} e^{i\omega T_0} - \frac{\partial \bar{A}}{\partial T_1} e^{-i\omega T_0} \right) \phi_v, \quad (36) \\
 L_{2w}[u_2, v_2, w_2] &= (A^2 e^{2i\omega T_0} + 2A\bar{A} + \bar{A}^2 e^{-2i\omega T_0}) H_3(x, y) + \\
 & (2i\omega r_{15} \phi_u + 2i\omega r_{16} \phi_v - 2i\omega \phi_w) \left( \frac{\partial A}{\partial T_1} e^{i\omega T_0} - \frac{\partial \bar{A}}{\partial T_1} e^{-i\omega T_0} \right).
 \end{aligned}$$

که در این معادله:

$$\begin{aligned}
 H_1(x, y) &= -p_1 \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2} - p_2 \frac{\partial \phi_w}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x \partial y} - p_3 \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial y^2}, \\
 H_2(x, y) &= -q_1 \frac{\partial \phi_w}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial y^2} - q_2 \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x \partial y} - q_3 \frac{\partial \phi_w}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2}, \\
 H_3(x, y) &= +\alpha \frac{h^2}{a^2} \left( \frac{\partial^2 \phi_u}{\partial \theta_0^2} \frac{\partial \phi_w}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi_u}{\partial \theta_0^2} \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \right) + \\
 & 12\alpha(1-\nu) \frac{\partial^2 w_S}{\partial x \partial y} \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \frac{\partial \phi_w}{\partial y} + 12\alpha(1-\nu) \frac{\partial w_S}{\partial y} \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x \partial y} + \\
 & 12\alpha(1-\nu) \frac{\partial w_S}{\partial x} \frac{\partial \phi_w}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x \partial y} + 6\alpha \frac{\partial^2 w_S}{\partial y^2} \left\{ \left( \frac{\partial \phi_w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \right)^2 \right\} + \\
 & 6\alpha \frac{\partial^2 w_S}{\partial x^2} \left\{ \left( \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial \phi_w}{\partial y} \right)^2 \right\} + 12\alpha \frac{\partial w_S}{\partial x} \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial y^2} + \\
 & 12\alpha \frac{\partial w_S}{\partial y} \frac{\partial \phi_w}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2} \right) + 12\alpha(1-\nu) \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial \phi_u}{\partial y} + \frac{\partial \phi_u}{\partial x} \right) + \\
 & 12\alpha \frac{\partial u_1}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial y^2} \right) + 12\alpha \frac{\partial u_1}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2} \right) + \frac{3\alpha V_S}{(-1+w_S)^4} \phi_w^2.
 \end{aligned} \quad (37)$$

به منظور حذف جمله‌های سکولار از معادله‌ی (۳۶)، فرض شده است که  $A$  تنها تابعی از  $T_2$  باشد. با در نظر گرفتن این فرض، مشتقات زمانی نسبت به  $T_1$  از معادله‌ی (۳۶) حذف شده است و حل خصوصی آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 u_2 &= \psi_{1u} A^2 e^{2i\omega T_0} + 2\psi_{2u} A\bar{A} + \psi_{3u} \bar{A}^2 e^{-2i\omega T_0}, \\
 v_2 &= \psi_{1v} A^{22i\omega T_0} + 2\psi_{2v} A\bar{A} + \psi_{3v} \bar{A}^2 e^{-2i\omega T_0}, \quad (38) \\
 w_2 &= \psi_{1w} A^2 e^{2i\omega T_0} + 2\psi_{2w} A\bar{A} + \psi_{3w} \bar{A}^2 e^{-2i\omega T_0}.
 \end{aligned}$$

$$m = \iint \{ -\chi_u \phi_u \bar{h}_u^m - \chi_v \phi_v \bar{h}_v^m + \chi_w [\phi_w \bar{h}_w^m - \phi_u \bar{h}_{wu1}^m - \phi_v \bar{h}_{wv1}^m] \} dx dy, \quad (46)$$

$$\Sigma = \iint \{ \chi_u \bar{h}_u^{\sigma_1} \sigma_1 + \chi_v \bar{h}_v^{\sigma_1} \sigma_1 + \chi_w [\bar{h}_w^{\sigma_1} - \omega^2 r_{16} \phi_w] \sigma_1 \} dx dy,$$

$$\xi = \iint \{ \chi_u \bar{h}_u^{\eta} + \chi_v \bar{h}_v^{\eta} + \chi_w \bar{h}_w^{\eta} \} dx dy,$$

$$K = \iint \{ \chi_u \bar{h}_u^K + \chi_v \bar{h}_v^K + \chi_w [\bar{h}_w^K + \omega^2 (\phi_u \bar{h}_{wu1}^m + \phi_v \bar{h}_{wv1}^m) + 4\omega^2 (\psi_{lu} \bar{h}_{wu1}^m + \psi_{lv} \bar{h}_{wv1}^m)] \} dx dy,$$

$$f = \iint \chi_w F dx dy.$$

لازم به ذکر است که معادله‌های حاکم بر ورق، خودالحاقی نبوده و می‌بایست پس از استخراج معادله‌های حاکم بر توابع الحاقی، این توابع را استخراج کرد. پارامتر  $A$  را می‌توان به شکل قطبی و با استفاده از دامنه ارتعاش  $a$  و زاویه فاز  $\beta$  به شکل  $A = \frac{1}{2} a e^{i\beta}$  با جایگزین کردن شکل قطبی پارامتر  $A$  در معادله‌ی (۴۵) و جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی معادله حاصله و نیز در نظر گرفتن این فرض که مقدار  $\gamma$  به صورت  $\gamma = \sigma_2 T_2 - \beta$  تعریف شود [۲۵]، معادله‌ی (۴۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$m \frac{da}{dT_2} = -a \eta \xi + 2 \frac{f}{\omega} \sin \gamma = g_1(a, \gamma), \quad (47)$$

$$m a \frac{d\gamma}{dT_2} = (m \sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}) a + \frac{K}{4\omega} a^3 + 2 \frac{f}{\omega} \cos \gamma = g_2(a, \gamma).$$

معادله‌ی حاکم بر نقطه‌ی تعادل  $(a_0, \gamma_0)$  با مساوی صفر قرار دادن  $d\gamma/dT_2$  و  $da/dT_2$  به دست می‌آید. پس خواهیم داشت:

$$4 \frac{f^2}{\omega^2} = a_0^2 [(\eta \xi)^2 + (\frac{K}{4\omega} a_0^2 + (m \sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}))^2]. \quad (48)$$

همان‌طور که در معادله‌ی (۴۸) نشان داده شده است، هنگامی  $a_0$  مقدار بیشینه خود را به دست می‌آورد که ترم‌های موجود در پرانتزها برابر صفر شوند، پس خواهیم داشت:

$$\sigma_2 = \frac{-K a^2 - 4\Sigma}{4m \omega}, \quad a_0 = \frac{2f}{\eta \xi \omega}. \quad (49)$$

و در نتیجه فرکانس رزونانس غیرخطی به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\Omega = \omega - \frac{f^2 K}{m \omega^3 \eta \xi^2} - \frac{\Sigma}{m \omega^2}. \quad (50)$$

همچنین با جای‌گذاری معادله‌های (۳۵) و (۳۸) در معادله‌ی (۲۱) تغییر شکل‌های میکروورق به صورت زیر به دست خواهند آمد:

$\Omega = \omega + \varepsilon^2 \sigma_2$  خواهیم داشت:

$$L_{3u} [u_3, v_3, w_3] = (\bar{h}_u^{\sigma_1} \sigma_1 A - i \omega \eta \bar{h}_u^{\eta} A + \bar{h}_u^K A \bar{A}^2 + i \omega \phi_u \bar{h}_u^m \frac{dA}{dT_2}) e^{i \omega T_0} + cc + NST, \quad (41)$$

$$L_{3v} [u_3, v_3, w_3] = (\bar{h}_v^{\sigma_1} \sigma_1 A - i \omega \eta \bar{h}_v^{\eta} A + \bar{h}_v^K A \bar{A}^2 + i \omega \phi_v \bar{h}_v^m \frac{dA}{dT_2}) e^{i \omega T_0} + cc + NST, \quad (42)$$

$$L_{3w} [u_3, v_3, w_3] = ([\bar{h}_w^{\sigma_1} - \omega^2 r_{16} \phi_w] \sigma_1 A - i \omega \eta \bar{h}_w^{\eta} A + [\bar{h}_w^K + \omega^2 (\phi_u \bar{h}_{wu1}^m + \phi_v \bar{h}_{wv1}^m) + 4\omega^2 (\psi_{lu} \bar{h}_{wu1}^m + \psi_{lv} \bar{h}_{wv1}^m)] A^2 \bar{A} + F e^{i \sigma_2 T_2} - i \omega [\bar{h}_w^m \phi_w - \bar{h}_{wu1}^m \phi_u - \bar{h}_{wv1}^m \phi_v] \frac{dA}{dT_2}) e^{i \omega T_0} + cc + NST. \quad (43)$$

ضرایب  $\bar{h}$ ، با اندیس  $u$ ،  $v$  و  $w$  با جای‌گذاری معادله‌ی (۴۴) در ضرایب  $\Gamma$  که در پیوست (ج) آورده شده‌اند، به دست خواهند آمد:

$$\begin{aligned} u_1 &= \phi_u, u_2 = \psi_{1u} + 2\psi_{2u}, \\ v_1 &= \phi_v, v_2 = \psi_{1v} + 2\psi_{2v}, w_1 = \phi_w, \\ w_2 &= \psi_{1w} + 2\psi_{2w}, \\ F &= \frac{\alpha_2 V_s V_d}{(-1+w_s)^2}. \end{aligned} \quad (44)$$

از آنجا که معادله‌های (۴۱-۴۳) در حالت همگن دارای جواب غیر صفر است، بنابراین، این سیستم معادله‌ها در حالت غیر همگن، تنها در حالتی دارای جواب است که شرط حل‌پذیری را ارضا کند [۲۶]. به‌منظور تعیین این شرط حل‌پذیری، می‌بایست ابتدا طرفین معادله‌های (۴۱-۴۳) را در  $\chi_v$ ،  $\chi_u$  و  $\chi_w$  ضرب کرده و طرفین معادله‌های حاصله را با یکدیگر جمع کرد.  $\chi$ ها توابع الحاقی معادله‌ی همگن حاکم بر  $u_3$ ،  $v_3$  و  $w_3$  هستند که در ادامه‌ی حل به دست خواهند آمد. با انتگرال گرفتن از طرفین معادله‌ی حاصله و استفاده از انتگرال جزء به جزء برای انتقال اپراتورهای مشتق به توابع الحاقی، و در نظر داشتن این موضوع که این توابع الحاقی در معادله‌ی همگن صدق می‌کنند، شرط حل‌پذیری معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$KA^2 \bar{A} + (\Sigma - i \omega \eta \xi) A - i \omega m \frac{dA}{dT_2} + f e^{i \sigma_2 T_2} = 0. \quad (45)$$

که در آن:

$$\frac{d\sigma_2}{da_0} = \frac{-\left[(\eta\xi)^2 + \left\{\left(m\sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}\right) + \frac{Ka_0^2}{4\omega}\right\}\left\{\left(m\sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}\right) + \frac{3Ka_0^2}{4\omega}\right\}\right]}{ma_0\left[\left(m\sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}\right) + \frac{Ka_0^2}{4\omega}\right]} \quad (56)$$

معادله‌های (۵۵-۵۶) نشان می‌دهد که نقطه‌ی انشعاب در صورتی رخ می‌دهد که  $\frac{d\sigma_2}{da_0}$  مساوی صفر باشد. با مشتق‌گیری از معادله‌ی (۴۷) خواهیم داشت:

$$\frac{d}{d\sigma_2} \begin{bmatrix} g_1(a, \gamma) \\ g_2(a, \gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (57)$$

و از آنجا که درجه ماتریس حاصل از ضرب ماتریس C در ماتریس معادله‌ی (۵۷) برابر ۲ است، این نقطه‌ی انشعاب از نوع نقطه‌ی زینی<sup>۲</sup> است.

#### ۴- بحث

همان‌طور که در شکل ۳ نشان داده شده است، مدول یانگ میکروصفحه نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانوتیوب کربن، با افزایش درصد حجمی نانوتیوب کربن به صورت خطی افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، با افزایش درصد حجمی نانوتیوب کربن، میکروصفحه سفت‌تر شده و سختی آن بالاتر می‌رود. این موضوع به صورت مستقیم ناپایداری پولین میکروورق را تحت تأثیر قرار می‌دهد. هنگامی که درصد حجمی نانوتیوب افزایش می‌یابد، نرخ افزایش این پارامترها و تأثیر آنها بر روی تغییر شکل و فرکانس میکروورق از جمله موارد مهمی هستند که می‌بایست مورد بررسی قرار گیرند.

شکل ۷ تغییرات ولتاژ پولین را نسبت به درصد حجمی نانوتیوب کربن موجود در نانوکامپوزیت مورد استفاده در میکروورق نشان می‌دهد. کلیه تحلیل‌ها به ازای  $a = 310 \mu m$  و  $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} F/m$  و مطابق جدول ۲ و نیز خواص مکانیکی میکروورق نانوکامپوزیتی مطابق روش اشلیبی-موری-تاناکا انجام شده است. همان‌گونه که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، هنگامی که درصد حجمی افزایش می‌یابد، ولتاژ پولین نیز به صورت خطی افزایش می‌یابد و از آنجا که مطابق شکل ۳ به ازای مقدار

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} a \phi_u \cos(\Omega t - \gamma) + \\ &\frac{1}{2} a^2 [\psi_{2u} + \frac{1}{2} \psi_{1u} \cos(2(\Omega t - \gamma))], \\ v &= \frac{1}{2} a \phi_v \cos(\Omega t - \gamma) + \\ &\frac{1}{2} a^2 [\psi_{2v} + \frac{1}{2} \psi_{1v} \cos(2(\Omega t - \gamma))], \\ w &= \frac{1}{2} a \phi_w \cos(\Omega t - \gamma) + \\ &\frac{1}{2} a^2 [\psi_{2w} + \frac{1}{2} \psi_{1w} \cos(2(\Omega t - \gamma))]. \end{aligned} \quad (51)$$

#### ۳-۴ تحلیل پایداری

به منظور مطالعه‌ی پایداری سیستم، در ابتدا می‌بایست ماتریس ژاکوبین را به دست آورد [۲۶]. بنابراین از معادله‌ی (۴۷) به دست می‌آید که:

$$\begin{bmatrix} \Delta a' \\ \Delta \gamma' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial a} & \frac{\partial g_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial g_2}{\partial a} & \frac{\partial g_2}{\partial \gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta \gamma \end{bmatrix} = \quad (52)$$

$$\begin{bmatrix} -\eta\xi & \frac{2f}{\omega} \cos(\gamma_0) \\ \frac{Ka_0}{2\omega} - \frac{2f}{a_0^2 \omega} \cos(\gamma_0) & -\frac{2f}{a_0 \omega} \sin(\gamma_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta \gamma \end{bmatrix}.$$

اگر ماتریس ضرایب معادله‌ی (۵۲) با C نمایش داده شود، معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم با معادله‌ی  $C - \lambda I = 0$  به دست می‌آید که در آن I ماتریس واحد است. پس می‌توان نوشت:

$$\lambda^2 + 2(\eta\xi)\lambda + \left[ (\eta\xi)^2 + \left\{\left(m\sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}\right) + \frac{Ka_0^2}{4\omega}\right\}\left\{\left(m\sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}\right) + \frac{3Ka_0^2}{4\omega}\right\} \right] = 0. \quad (53)$$

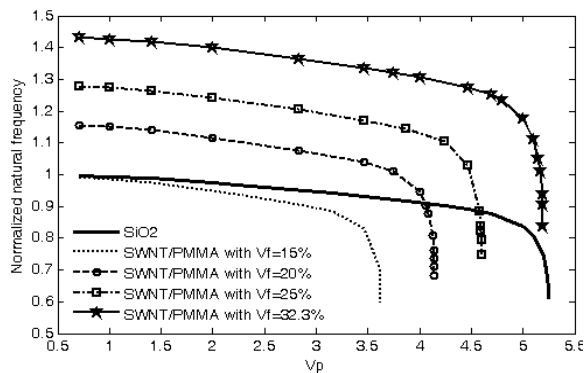
و در نتیجه مقادیر  $\lambda$  به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\lambda = -\eta\xi \pm \sqrt{-\left\{\left(m\sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}\right) + \frac{Ka_0^2}{4\omega}\right\}\left\{\left(m\sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}\right) + \frac{3Ka_0^2}{4\omega}\right\}}. \quad (54)$$

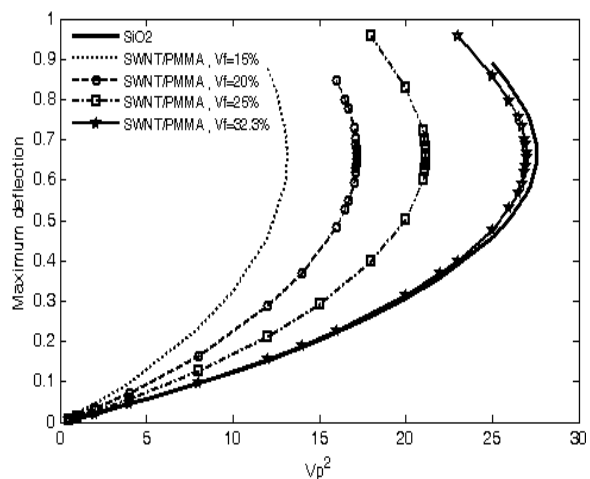
در صورتی که مقادیر ویژه‌ی سیستم مثبت باشد، ناپایداری رخ می‌دهد و در صورتی که یکی از مقادیر ویژه برابر صفر باشد، نقطه‌ی انشعاب<sup>۱</sup> به وجود خواهد آمد. با در نظر گرفتن معادله‌ی (۵۳) این شرایط زمانی رخ خواهد داد که:

$$(\eta\xi)^2 + \left\{\left(m\sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}\right) + \frac{Ka_0^2}{4\omega}\right\}\left\{\left(m\sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}\right) + \frac{3Ka_0^2}{4\omega}\right\} = 0 \quad (55)$$

در صورتی که از معادله‌ی (۴۸) نسبت به  $a_0$  مشتق گرفته شود خواهیم داشت:



شکل (۸): تغییرات فرکانس طبیعی میکروورق نسبت به ولتاژ الکتروستاتیک ( $\alpha_1 = 1$ ).

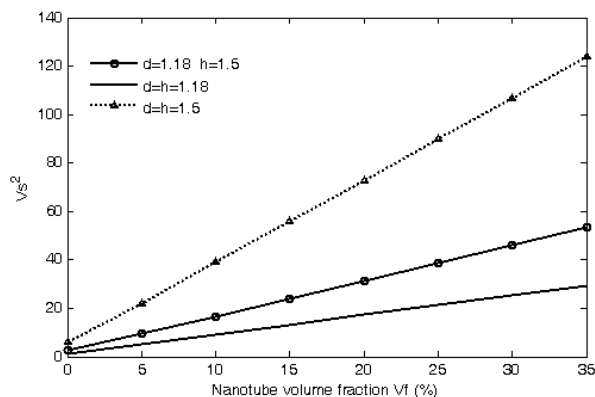


شکل (۹): بیشینه تغییر شکل خمشی میکروورق نسبت به نیروی الکتروستاتیک برای درصدهای مختلف نانوتیوب کربن.

اگرچه این موضوع یک خاصیت مطلوب به‌شمار می‌رود، ولی باید به این نکته نیز توجه داشت که در این حالت، ناپایداری پولین در میکروصفحه نانوکامپوزیتی سریع‌تر و در ازای ولتاژهای پایین‌تری رخ می‌دهد. از طرف دیگر، بیشینه تغییر شکل خمشی میکروورق نانوکامپوزیتی با  $3/32$  نانوتیوب کربن، به ازای ولتاژهایی کمتر از ولتاژ پولین برابر با میکروصفحه  $\text{SiO}_2$  بوده و فرکانس طبیعی آن نیز به‌صورت تقریبی  $1/4$  برابر میکروصفحه  $\text{SiO}_2$  است که این رفتار به‌عنوان پدیده‌ای مطلوب در میکروادوات به‌شمار می‌رود.

در کنار این موضوع می‌بایست به میرایی بالای نانوکامپوزیت‌ها نیز توجه داشت. مقدار  $\eta$  برای سرامیک‌هایی همانند  $\text{SiO}_2$  در محدوده‌ی  $(10)^{-4} - (10)^{-5}$  [۲۷] و به‌عنوان مثال برای نانوکامپوزیت با  $10\%$  نانوتیوب کربن در محدوده

درصد حجمی معادل  $V_f \approx 32.2\%$ ، مدول یانگ میکروورق نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانوتیوب کربن، با مدول یانگ میکروورق  $\text{SiO}_2$  برابر می‌شود، می‌توان گفت ولتاژ پولین میکروورق نانوکامپوزیتی نیز به ازای  $V_f \approx 32.2\%$  با ولتاژ پولین میکروورق  $\text{SiO}_2$  برابر خواهد شد، اما همان‌گونه که در شکل ۸ نیز نشان داده شده است، فرکانس طبیعی این میکروورق نانوکامپوزیتی بسیار بالاتر از میکروورق  $\text{SiO}_2$  است.

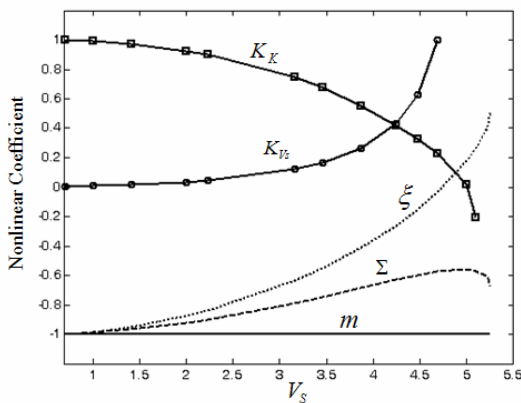


شکل (۷): تغییرات ولتاژ پولین به ازای تغییرات درصد حجمی نانو تیوب کربن.

تغییرات فرکانس طبیعی میکروورق‌های مختلف نسبت به تغییرات ولتاژ الکتروستاتیک به ازای  $\alpha_1 = 1$  در شکل ۸ نشان داده شده است. همان‌گونه که در این شکل مشاهده می‌شود، به ازای درصدهای حجمی بالاتر از  $15\%$  از نانوتیوب کربن، فرکانس طبیعی میکروورق نانوکامپوزیتی، بالاتر از میکروورق  $\text{SiO}_2$  است. این رفتار، یکی از رفتارهای مطلوب و ایده‌آلی است که در طراحی و ساخت میکروادوات دنبال می‌شود. شکل ۹ تغییر شکل خمشی میکروورق‌های نانوکامپوزیتی را با میکروورق  $\text{SiO}_2$  مقایسه کرده است. همان‌گونه که در این شکل مشاهده می‌شود، به ازای یک ولتاژ اعمالی مشخص، تغییر شکل خمشی میکروورق به ازای کاهش درصد حجمی نانوتیوب کربن افزایش می‌یابد. با در نظر گرفتن شکل ۸، اگرچه فرکانس طبیعی میکروصفحه نانوکامپوزیتی با  $15\%$  نانوتیوب کربن، به ازای ولتاژهایی کمتر از ولتاژ پولین، به‌طور تقریبی برابر با میکروصفحه  $\text{SiO}_2$  است، اما تغییر شکل خمشی آن بسیار بالاتر از میکروصفحه  $\text{SiO}_2$  است (شکل ۹).

می‌کند.

شکل ۱۱ تغییرات ضرایب غیرخطی ظاهر شده در معادله (۵۰) را نشان می‌دهد. در این شکل ترم سختی  $K$  به دو ترم سختی ساختاری  $K_K$  و سختی الکتروستاتیک  $K_{V_s}$  تقسیم شده است. با هدف ساده‌سازی شکل‌ها و برای اینکه بتوان تمامی این ضرایب‌های غیرخطی را در یک شکل با یکدیگر مقایسه کرد، کلیه‌ی این ضرایب‌های غیرخطی نسبت به بیشینه‌ی مقداری که هر کدام از آنها داشته‌اند، نرمال شده‌اند.

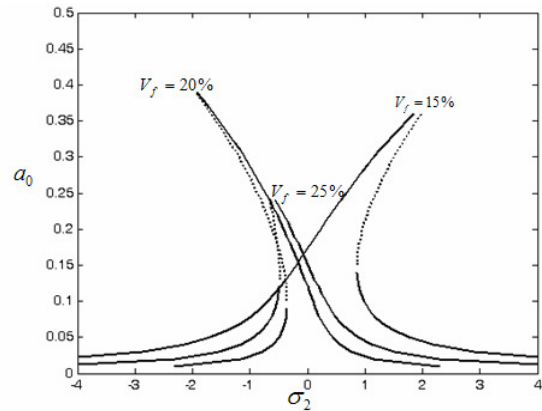


شکل (۱۱): تغییرات ضرایب غیرخطی نرمال شده نسبت به ولتاژ الکتروستاتیک.

همان‌گونه که در این شکل نیز مشاهده می‌شود، مقدار پارامتر  $m$  به ازای مقادیر مختلف ولتاژ الکتروستاتیک تغییر محسوسی نداشته و ثابت است. ضریب غیرخطی  $\Sigma$  که ضرایب ترم‌های حاوی  $\sigma_1$  را تشکیل می‌دهد، به ازای افزایش ولتاژ الکتروستاتیک افزایش یافته است و در ولتاژهای نزدیک به ۵ ولت دوباره کاهش می‌یابد. قدرمطلق ضریب غیرخطی  $\xi$  که در واقع از جملات میرایی ناشی می‌شود، نیز با افزایش ولتاژ الکتروستاتیک، در ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. این نکته در تحلیل رفتار دینامیکی سیستم بسیار با اهمیت است. برخلاف سیستم‌های الاستیک که میرایی سیستم ثابت بوده و تنها با ضریب میرایی ویسکوز  $c$  بیان می‌شود، در سیستم‌های ویسکوالاستیک، همان‌گونه که در شکل ۱۱ نیز مشاهده می‌شود، مقدار میرایی متغیر است و با افزایش ولتاژ الکتروستاتیک، میرایی آن نیز تغییر می‌یابد. این میرایی می‌تواند نقش مهمی در جابه‌جا کردن فرکانس‌های غیرخطی

$(10)^{-1} - (10)^{-2}$  [۲۸] است. پس این میرایی به شدت رفتار ارتعاشی میکروورق را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

شکل ۱۰ تغییرات بیشینه دامنه ارتعاش  $a_0$  را نسبت به پارامتر  $\sigma_2$  به ازای ورق‌های نانوکامپوزیتی با درصد‌های مختلف از نانوتیوب کربن و برای  $V_s^2 = 13$  نشان می‌دهد. در این نمودار سایر پارامترهای طراحی برای تمامی نمونه‌ها ثابت در نظر گرفته شده است.



شکل (۱۰): تغییرات بیشینه دامنه‌ی ارتعاش نسبت به پارامتر  $\sigma_2$  به ازای درصد‌های مختلف حجمی نانوتیوب کربن.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، به ازای این ولتاژ اعمالی، میکروورق نانوکامپوزیتی با ۱۵٪ نانوتیوب کربن دارای رفتار غیرخطی از نوع سخت‌شوندگی و میکروورق‌های نانوکامپوزیتی با ۲۰٪ و ۲۵٪ نانوتیوب کربن دارای رفتار غیرخطی از نوع نرم‌شوندگی هستند. هم‌چنین بیشینه دامنه ارتعاش نانوکامپوزیت با ۲۵٪ نانوتیوب، نسبت به نانوکامپوزیت با ۲۰٪ نانوتیوب، کاهش آشکاری را نشان می‌دهد، که نشان از افزایش سختی این نمونه از میکروورق دارد.

لازم به ذکر است که ترم‌های بیانگر سختی در معادله‌های میکروورق می‌توانند به دو دسته تقسیم شوند: ترم‌های سختی ساختاری میکروورق و ترم‌های سختی ناشی از نیروی الکتروستاتیک اعمال شده به میکروورق. زمانی که سختی ناشی از نیروی الکتروستاتیک بر سختی ساختاری میکروورق غلبه کند، حالت نرم‌شوندگی و زمانی که سختی ساختاری بر سختی الکتروستاتیک غلبه کند، رفتار سخت‌شوندگی بروز

## ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله رفتار استاتیکی، دینامیکی غیر خطی یک میکروورق ویسکوالاستیک نانوکامپوزیتی مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله نشان داده شده است که با استفاده از میکروورق‌های نانوکامپوزیتی می‌توان به تغییر شکل‌هایی معادل تغییر شکل میکروورق الاستیک در فرکانس‌هایی بسیار بالاتر از فرکانس‌های میکروورق الاستیک دست یافت که این موضوع به‌شدت در میکروادواتی نظیر میکروسوئیچ‌ها مناسب و مطلوب است. اما رفتار دینامیکی میکروورق‌های نانوکامپوزیتی محدودیت‌هایی برای استفاده آن به‌وجود می‌آورد که از مهم‌ترین آنها می‌توان به میرایی بسیار بالای آنها اشاره کرد. علاوه بر ضریب میرایی بالای نانوکامپوزیت‌ها، میرایی میکروورق به ازای افزایش ولتاژ الکتروستاتیک نیز تغییر می‌یابد که خود، پدیده‌ای نامطلوب در میکروادوات به‌شمار می‌آید. همچنین، رفتار غیرخطی میکروورق نانوکامپوزیتی به ازای تغییر در میزان درصد حجمی نانوتیوب کربن به‌طور کامل، متفاوت بوده است و می‌بایست در طراحی و ساخت میکروادوات و به‌ویژه میکرورزوناتورها مورد توجه قرار گیرد.

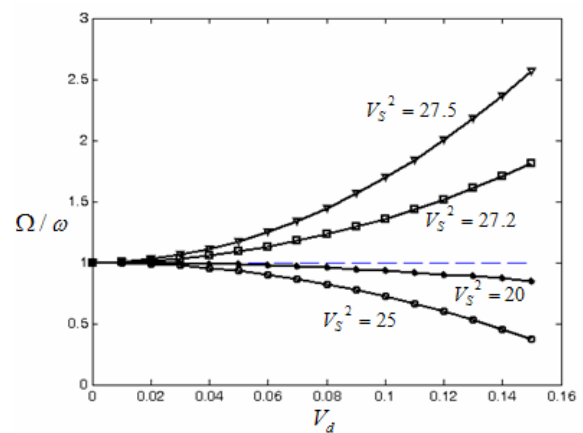
## مراجع

1. Zengerle, R., Richter, A., and Sandmaier, H. "A Micro Membrane Pump with Electrostatic Actuation", Proc. Micro Electro Mechanical Sys. Conf., pp. 19-24, Germany, 1992.
2. Zhang, X.M., Chau, F.S., Quan, C., Lam, Y.L., and Liu, A. Q. "A Study of the Static Characteristics of a Torsional Micromirror" Sensors Actuators A, Vol. 90, No's. 1-2, pp. 73-81, 2001.
3. Hsu, P. C., Mastrangelo, C.H., and Wise, K.D. "A High Sensitivity Polysilicon Diaphragm Condenser Microphone", Proc. MEMS Conf., pp. 580-585, Heidelberg, Germany, 1998.
4. Scheeper, P.R., Van-Der-Donk, A.G.H., and Bergveld, P. "A Review of Silicon Microphones", Sensors Actuators A, Vol. 44, No. 1, pp. 1-11, 1999.
5. Tilmans, H.A. and Legtenberg, R., "Electrostatically Driven Vacuum-Encapsulated Polysilicon Resonators: part II. Theory and Performance", Sensors Actuators A, Vol. 45, No. 1, pp. 67-84, 1994.
6. Francais, O. and Dufour, I. "Normalized Abacus for the Global Behavior of Diaphragms: Pneumatic, Electrostatic, Piezoelectric or

ایفا کند.

همان‌گونه که در شکل ۱۰ نشان داده شده است، مقدارهای سختی ساختاری میکروورق نانوکامپوزیتی به ازای افزایش ولتاژ الکتروستاتیک کاهش یافته و سختی الکتروستاتیک آن افزایش می‌یابد، که نرخ تغییرات آنها می‌تواند نشانگر رفتار سخت‌شوندگی و یا نرم‌شوندگی سیستم باشد.

شکل ۱۲ تغییرات فرکانس طبیعی غیرخطی میکروورق نانوکامپوزیتی با  $3/32$  نانوتیوب کربن را نسبت به ولتاژ دینامیک اعمال شده به ورق و به ازای مقادیر مختلف ولتاژ استاتیکی نشان می‌دهد. همان‌گونه که در این شکل نیز مشاهده می‌شود، به ازای ولتاژهای استاتیکی مختلف، سیستم می‌تواند رفتار نرم‌شوندگی و یا سخت‌شوندگی از خود نشان دهد. باید به این نکته توجه داشت که رفتار غیرخطی سیستم در گذر از نرم‌شوندگی به سخت‌شوندگی، از اطراف ناحیه خطی نیز عبور می‌کند. پس می‌توان مقدار ولتاژ استاتیکی اعمالی به سیستم را به‌گونه‌ای تنظیم کرد که رفتار سیستم به حالت خطی نزدیک شود. همچنین این کار را می‌توان با قرار دادن لایه‌ای از پیزوالکتریک بر روی ورق و تغییر در میزان سختی آن انجام داد. این موضوع در میکرووحسگرها/ میکروعملگرها کاربرد فراوانی دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش میزان نیروی دینامیکی اعمال شده به ورق، جابه‌جایی فرکانسی افزایش می‌یابد و فرکانس غیرخطی به مقادیری کمتر و یا بیشتر از فرکانس خطی منتقل می‌شود.



شکل (۱۲): تغییرات فرکانس غیرخطی نسبت به ولتاژ

دینامیک  $V_d$  به ازای مقادیر مختلف  $V_s$ .

17. Fu, Y.M., Zhang, J., and Bi, R.G. "Analysis of the Nonlinear Dynamic Stability for an Electrically Actuated Viscoelastic Microbeam", *Microsyst. Technol.*, Vol. 15, No. 5, pp. 763-9, 2009.
18. Fu, Y. and Zhang, J. "Active Control of the Nonlinear Static and Dynamic Responses for Piezoelectric Viscoelastic Microplates", *Smart Mater. Struct.*, Vol. 18, No. 9, 2009.
19. Zamanian, M., Khadem, S.E., and Mahmoodi, S.N. "Nonlinear Response of a Resonant Viscoelastic Microbeam under an Electrical Actuation", *Struct. I Eng. and Mech.*, Vol. 35, No. 4, pp. 387-407, 2010.
20. Iijima, S. "Helical Microtubules of Graphitic Carbon", *Nature*, Vol. 354, No. 6348, pp. 56-58, 1991.
21. Chen, C.H. and Cheng, C.H. "Effective Elastic Moduli of Misoriented Short-Fiber Composites" *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 33, No. 17, pp. 2519-39, 1996.
22. Jalali, A. "Nonlinear Vibration and Stability Analysis of a Rectangular Nanocomposite Viscoelastic Microplate under Electrostatic Actuation" PhD Dissertation, Dep't of Mech. I and Aerospace Eng., Tarbiat Modares Univ., Tehran, pp. 25-49, 2011 (in Persian).
23. Shooshtari A. and Khadem, S.E. "Nonlinear Vibration of a Viscoelastic Rectangular Plate, Based on First Order Shear Deformation Theory" *Aerospace Mech. J.*, Vol. 2, No. 1, pp. 77-94, 2006 (in Persian).
24. Meirovitch, L. "Analytical Methods in Vibrations", Prentice Hall, 1997.
25. Xiaopeng, Z., Eihab, M. A.R., and Nayfeh, A.H. "A Reduced-Order Model for Electrically Actuated Microplates", *J. Micromech. Microeng.* Vol. 14, No. 7, pp. 900-906, 2004.
26. Nayfeh, A.H. "An Introduction to Perturbation Techniques", Wiley, New York, 1981.
27. Cebon, D., and Ashby, M.F. "Material Selection for Precision Instruments", *Meas. Sci. and Tech.*, Vol. 5, pp. 296-306, 1994.
28. Kireitseu Maksim, V. "Preliminary Results on Rheological and Damping Properties of Nanoparticle- Reinforced Materials", *Annul Transactions of the Nordic Theology soci.*, Vol. 14, pp. 107-114, 2006.
- Electromagnetic Actuation", *J. Model. Simul. Microsyst.*, Vol. 2, No. 1, pp. 149-160, 1999.
7. Ng, T.Y., Jiang, T.Y., Li, H., Lam, K.Y., and Reddy, J.N. "A Coupled Field Study on the Non-Linear Dynamic Characteristics of an Electrostatic Micropump", *J. Sound and Vib.*, Vol. 273, No's. 4-5, pp. 989-1006, 2004.
8. Porfiri, M. "Vibrations of Parallel Arrays of Electrostatically Actuated Microplates", *J. Sound Vib.*, Vol. 315, No's. 4-5, pp. 1071-1085, 2008.
9. Ashrafi, B., Hubert, P., and Vengallatore, S. "Carbon Nanotube-Reinforced Composites as Structural Materials for Microactuators in Microelectromechanical Systems", *Nanotech.*, Vol. 17, No. 19, pp. 4895-4903, 2006.
10. Shen, G.R., Cheng, Y.T., and Tsai, L.N. "Synthesis and Characterization of Ni-P-CNT Nanocomposite Film for MEMS Applications" *IEEE Trans. Nanotechnol.*, Vol. 4, Issue 5, pp. 47-539, 2005.
11. Tsai, L.N., Cheng, Y.T., Hsu, W., and Fang, W. "Ni-Carbon Nanotubes Nanocomposite for Robust Microelectromechanical Systems Fabrication" *J. Vac. Sci. Tech. B*, Vol. 24, No. 1, pp. 10-205, 2006.
12. Fang, W., Chu, H.Y., Hsu, W.K., Cheng, T.W., and Tai, N.H. "Polymer-Reinforced Aligned Multiwalled Carbon Nanotube Composites for Microelectromechanical Systems Applications", *Adv. Mater.*, Vol. 17, No. 24, pp. 2987-92, 2005.
13. Coleman, J.N., Khan, U., Blau, W.J., and Gun'ko, Y.K. "Small but Strong: a Review of the Mechanical Properties of Carbon-Nanotube-Polymer Composites", *Carbon*, Vol. 44, No. 9, pp. 1624-52, 2006.
14. Coleman, J.N., Khan, U., and Gun'ko, Y.K. "Mechanical Reinforcement of Polymers Using Carbon Nanotubes", *Adv. Mater.*, Vol. 18, No. 6, pp. 689-706, 2006.
15. Thostenson, E.T., Li, C., and Chou, T.W. "Nanocomposites in Context", *Comp. Sci. Tech.*, Vol. 65, No's. 3-4, pp. 491-516, 2005.
16. Fu, Y.M. and Zhang, J. "Nonlinear Static and Dynamic Responses of an Electrically Actuated Viscoelastic Microbeam", *Acta Mech. Sin.*, Vol. 25, No. 2, pp. 211-218, 2009.

زیر استفاده می‌شود:

$$\rho^C = (1 - V_f) \rho^M + V_f \rho^N. \quad (\text{الف-۵})$$

که در آن،  $\rho^C$ ،  $\rho^M$  و  $\rho^N$  به ترتیب دانسیته کامپوزیت، ماتریس و نانوالیاف است.

پیوست ب: ضرایب مربوط به معادلات (۱۹)–(۱۶):

$$\begin{aligned} p_1 &= 1, \\ p_2 &= \frac{1+\nu}{2}, \\ p_3 &= \frac{1-\nu}{2}, \\ p_4 &= \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \\ p_5 &= \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}, \\ p_6 &= \frac{\partial w_s}{\partial x}, \\ p_7 &= \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial w_s}{\partial x}, \\ p_8 &= \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial w_s}{\partial y}, \\ p_9 &= \frac{-h^2}{12a^2}. \end{aligned}$$

$$q_1 = 1, q_2 = \frac{1+\nu}{2},$$

$$q_3 = \frac{1-\nu}{2},$$

$$q_4 = \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y},$$

$$q_5 = \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2},$$

$$q_6 = \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial w_s}{\partial y}, q_7 = \frac{\partial w_s}{\partial y},$$

$$q_8 = \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial w_s}{\partial x},$$

$$q_9 = \frac{-h^2}{12a^2}.$$

$$r_1 = r_3 = 1,$$

$$r_2 = 2,$$

$$r_4 = -12\alpha_1 \frac{\partial w_s}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) -$$

$$12\alpha_1 (1-\nu) \frac{\partial w_s}{\partial y} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y},$$

(ب-۱)

پیوست الف: رابطه‌های مربوط به محاسبه خواص مکانیکی و مادی نانوکامپوزیت‌ها با استفاده از روش اشلیبی موری تاناکا

فرض اصلی مورد استفاده روش اشلیبی موری تاناکا، تقریب زدن الیاف‌های کوچک به‌عنوان بیضی‌های کوچک با نسبت لاغری  $s = L/2t$  است. بر این اساس، مدول یانگ کامپوزیت از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$C^C = C^M + V_f \langle (C^N - C^M) A^N \rangle [ (1 - V_f) I + V_f \langle A^N \rangle ]^{-1}. \quad (\text{الف-۱})$$

که در آن،  $C^C$ ،  $C^M$  و  $C^N$  به ترتیب تانسورهای سفتی کامپوزیت، ماتریس و نانوالیاف هستند. همچنین  $I$  ماتریس واحد می‌باشد و تانسور  $A^N$  نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^N = [I + S(C^M)^{-1}(C^N - C^M)]^{-1}. \quad (\text{الف-۲})$$

که در آن،  $S$  تانسور اشلیبی است. المان‌های تانسور اشلیبی تابعی از ضریب لاغری  $s$  و نسبت پواسون ماتریس بوده و به‌صورت جدول الف-۱ تعریف می‌شوند:

جدول الف-۱. المان‌های تانسور اشلیبی [۹].

	Ellipsoid (aspect ratio, $s$ )	Circular cylinder ( $\lim s \rightarrow \infty$ )
$S_{11}$	$\frac{4Q}{3} + RI_3 + 2s^2T$	0
$S_{22} = S_{33}$	$Q + RI_1 + \frac{3T}{4}$	$\frac{5-4\nu^M}{8(1-\nu^M)}$
$S_{23} = S_{32}$	$\frac{Q}{3} - RI_1 + \frac{4T}{3}$	$\frac{-1+4\nu^M}{8(1-\nu^M)}$
$S_{21} = S_{31}$	$-RI_1 - s^2T$	$\frac{\nu^M}{2(1-\nu^M)}$
$S_{12} = S_{13}$	$-RI_3 - T$	0
$S_{44}$	$\frac{Q}{3} + RI_1 + \frac{T}{4}$	$\frac{3-4\nu^M}{8(1-\nu^M)}$
$S_{55} = S_{66}$	$2R - \frac{RI_1}{2} - \frac{1+s^2}{2}T$	$\frac{1}{4}$
For other $S_{ij}$	0	0

که در آن:

$$I_1 = \frac{2s}{\sqrt{(1-s^2)^3}} [s\sqrt{s^2-1} - \cosh^{-1}(s)], \quad (\text{الف-۳})$$

$$Q = \frac{3}{8(1-\nu^M)}, \quad R = \frac{1-2\nu^M}{8(1-\nu^M)}, \quad (\text{الف-۴})$$

$$T = Q \frac{4-3I_1}{3(s^2-1)}, \quad I_3 = 4-2I_1.$$

با استفاده از این روابط می‌توان مدول الاستیک کامپوزیت‌ها را برای کامپوزیت‌های با الیاف کاملاً هم محور و یا با الیاف‌های با جهات کاملاً تصادفی استخراج نمود. همچنین برای استخراج دانسیته کامپوزیت نیز از رابطه‌ی



$$\begin{aligned}
\Gamma_u^k &= -(p_1(\frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial w_2}{\partial x}) + \\
& p_2(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y}) + \\
& p_3(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2})), \\
\Gamma_u^\eta &= p_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + p_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + \\
& p_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + p_4 \frac{\partial w_1}{\partial x} + p_5 \frac{\partial w_1}{\partial y} + \\
& p_6 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + p_7 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + p_8 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}, \\
\Gamma_u^m &= 2p_9, \\
\Gamma_v^{\sigma_1} &= -(2q_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + q_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + q_4 \frac{\partial w_1}{\partial x} + \\
& (q_5 + 2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}) \frac{\partial w_1}{\partial y} + q_6 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \\
& 3q_7 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + q_8 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}),
\end{aligned} \tag{۱-ج}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_v^k &= -(q_1(\frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \frac{\partial w_2}{\partial y}) + \\
& q_2(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_2}{\partial x} + \\
& \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y}) + \\
& q_3(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2})), \\
\Gamma_v^\eta &= q_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + q_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \\
& q_3 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + q_4 \frac{\partial w_1}{\partial x} + q_5 \frac{\partial w_1}{\partial y} + \\
& q_6 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + q_7 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + q_8 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}, \\
\Gamma_v^m &= 2q_9,
\end{aligned} \tag{۲-ج}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_v^\omega &= (r_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + r_2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + r_3 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} + r_4 \frac{\partial w_1}{\partial x} + r_5 \frac{\partial w_1}{\partial y} + \\
& r_9 \frac{\partial u_1}{\partial x} + r_{10} \frac{\partial u_1}{\partial y} + r_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x} + r_{12} \frac{\partial v_1}{\partial y}), \\
\Gamma_v^m &= 2r_{13}, \Gamma_{w_u}^m = 2r_{15}, \Gamma_{w_v}^m = 2r_{16}, \\
\bar{\Gamma}_{w_u}^m &= -\alpha_1 \frac{h^2}{a^2} \frac{\partial w_2}{\partial x}, \bar{\Gamma}_{w_v}^m = -\alpha_1 \frac{h^2}{a^2} \frac{\partial w_1}{\partial x}, \\
\bar{\Gamma}_{w_u}^m &= -\alpha_1 \frac{h^2}{a^2} \frac{\partial w_2}{\partial y}, \bar{\Gamma}_{w_v}^m = -\alpha_1 \frac{h^2}{a^2} \frac{\partial w_1}{\partial y},
\end{aligned} \tag{۳-ج}$$

$$\begin{aligned}
r_5 &= -12\alpha_1 \frac{\partial w_s}{\partial y} (\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}) - \\
& 12\alpha_1 (1-\nu) \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}, \\
r_6 &= -12\alpha_1 \frac{\partial u_s}{\partial x} - 12\alpha_1 \nu \frac{\partial v_s}{\partial y} - \\
& 6\alpha_1 ((\frac{\partial w_s}{\partial x})^2 + \nu (\frac{\partial w_s}{\partial y})^2) - 12 \frac{a^2}{h^2} N_1, \\
r_7 &= -12\alpha_1 \frac{\partial v_s}{\partial y} - 12\alpha_1 \nu \frac{\partial u_s}{\partial x} - \\
& 6\alpha_1 ((\frac{\partial w_s}{\partial y})^2 + \nu (\frac{\partial w_s}{\partial x})^2) - 12 \frac{a^2}{h^2} N_2, \\
r_8 &= -12\alpha_1 (1-\nu) (\frac{\partial u_s}{\partial y} + \frac{\partial v_s}{\partial x} + \\
& 2 \frac{a^2}{h^2} N_{12} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial w_s}{\partial y}), \\
r_9 &= -12\alpha_1 (\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}), \\
r_{10} &= r_{11} = -12\alpha_1 (1-\nu) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}, \\
r_{12} &= -12\alpha_1 (\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}), \\
r_{13} &= 1, \\
r_{14} &= \frac{2\alpha_2 V_s^2}{(-1+w_s)^3}, \\
r_{15} &= -\alpha_1 \frac{h^2}{a^2} \frac{\partial w_s}{\partial x}, \\
r_{16} &= -\alpha_1 \frac{h^2}{a^2} \frac{\partial w_s}{\partial y}.
\end{aligned}$$

پیوست ج: ضریب‌های موجود در معادله‌های مربوط به مرتبه  $\varepsilon^3$  در روش مقیاس‌های چندگانه (معادله‌های (۳۲-۳۴))

$$\begin{aligned}
\Gamma_u^{\sigma_1} &= -(p_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + 2p_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \\
& 2(p_4 - \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}) \frac{\partial w_1}{\partial x} + \\
& 2p_5 \frac{\partial w_1}{\partial y} + 2p_7 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + 2p_8 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_w^k = & -(12\alpha_1 \frac{\partial w_s}{\partial x} [(1+\nu) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_2}{\partial y} + \\ & (1-\nu) \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} + (\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}) \frac{\partial w_2}{\partial x} + \\ & \frac{\partial w_1}{\partial x} (\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2})] \\ & -12\alpha_1 \frac{\partial w_s}{\partial y} [(1-\nu) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_2}{\partial x} + \\ & (1-\nu) \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} + (\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}) \frac{\partial w_2}{\partial y} + \\ & \frac{\partial w_1}{\partial y} (\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2})] \\ & -12\alpha_1 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} (\frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} + \nu \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial w_2}{\partial y}) - \\ & 12\alpha_1 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} (\frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial w_2}{\partial y} + \nu \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x}) \\ & -12(1-\nu)\alpha_1 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} (\frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial y}) - \\ & 12\alpha_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} (\frac{\partial u_2}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_2}{\partial y} + 2[(\frac{\partial w_1}{\partial x})^2 + \nu (\frac{\partial w_1}{\partial y})^2]) \\ & -12\alpha_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} (\frac{\partial v_2}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_2}{\partial x} + \\ & 2[(\frac{\partial w_1}{\partial y})^2 + \nu (\frac{\partial w_1}{\partial x})^2]) - \\ & 12(1-\nu)\alpha_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} - 12(1+\nu)\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} \\ & -12(1-\nu)\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} (\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}) - \\ & 12\alpha_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} (\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}) - \\ & 12(1-\nu)\alpha_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} (\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}) \\ & -12(1-\nu)\alpha_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + \\ & \frac{4\alpha_2 V_s^2 w_1^3}{(-1+w_s)^3} - \frac{6\alpha_2 V_s^2 w_1 w_2}{(-1+w_s)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_w^{\sigma_1} = & -(2r_2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + 4r_3 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} + \\ & 2(r_4 + 12\alpha_1 \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}) \frac{\partial w_1}{\partial x} + \\ & 2(r_5 - 12\alpha_1 \frac{\partial w_s}{\partial y} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}) \frac{\partial w_1}{\partial x}, \\ & -12\alpha_1 \nu [(\frac{\partial w_s}{\partial y})^2 + \frac{\partial v_s}{\partial y}] \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \\ & 2(r_7 - 6\alpha_1 [(\frac{\partial w_s}{\partial y})^2 + \frac{\partial v_s}{\partial y}]) \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \\ & 2(r_8 + 6\alpha_1 (1-\nu) \frac{\partial v_s}{\partial x}) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \\ & -24\alpha_1 \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \frac{\partial u_1}{\partial x} + 2r_{10} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \\ & 2r_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x} + (r_{12} - 24\alpha_1 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}) \frac{\partial v_1}{\partial y}, \\ \bar{\Gamma}_w^{\sigma_1} = & r_{16} \frac{\partial^2 v_1}{\partial T_0^2}, \end{aligned}$$