

ارتعاشات آزاد تیر خمیده کامپوزیتی و ساندویچی براساس یک تئوری جدید دوبعدی تصحیح شده مرتبه بالا

علی داور^۳

دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد دماوند
(تاریخ دریافت: ۹۰/۰۶/۱۲؛ تاریخ پذیرش: ۹۱/۰۶/۱۴)

کرامت ملک‌زاده فرد^۱ و جواد استیری^۲

مجتمع دانشگاهی هوافضا
دانشگاه صنعتی مالک اشتر

چکیده

در این مقاله، یک گروه جدید دوبعدی از تئوری‌های تصحیح شده مرتبه‌بالای تیرها برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای خمیده کامپوزیتی و ساندویچی ارائه شده است. اثرات اینرسی‌های چرخشی و صفحه‌ای، کرنش‌های نرمال و برشی در مدل کامل تئوری تصحیح شده مرتبه‌بالای تیرها در نظر گرفته شده است. همچنین اثر شکل دوزنقه‌ای تیر خمیده نیز به‌طور کامل در این تئوری لحاظ شده است. معادلات حرکت تیر خمیده به کمک اصل هامیلتون استخراج شده است. نتایج حل معادله‌های به‌دست آمده با استفاده از روش نویر و مسئله مقدار ویژه به صورت حل تحلیلی بسته به‌دست آمده است. نتایج مربوط به فرکانس‌های طبیعی برای تیرهای مستقیم نازک و ضخیم کامپوزیتی و ساندویچی و همچنین برای تیرهای خمیده ضخیم کم‌عمق و عمیق (با نسبت طول به شعاع کم و زیاد) ساندویچی به‌دست آمده است. نتایج حل تحلیلی ارائه شده در اینجا با نتایج حل تئوری الاستیسیته و روش‌های تحلیلی موجود در مراجع مقایسه شده و انطباق خوب جواب‌ها به‌دست آمده است.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات آزاد، تئوری مرتبه‌بالا، تیر کامپوزیتی و ساندویچی، تیر خمیده دایروی

Free Vibration of Sandwich and Composite Curved Beam Based on a New Two-Dimensional Refined Higher-Order Theory

K. Malekzadeh Fard and J. Estiri

Aerospace Eng. Dep't.
Malek Ashtar Univ. of Tech.

A. Davar

Mech. Eng. Dep't Damavand Branch,
Islamic Azad Univ.

(Received: 3 September, 2011; Accepted: 4, September, 2012)

ABSTRACT

In this paper, a new group of two-dimensional (2D) refined higher-order beam theories (RHOBTs) for the free vibration analysis of laminated composite and sandwich curved beams are presented. The proposed full model of RHOBTs accounts for the effects of in-plane and rotary inertias as well as the effects of transverse normal and shear strains on the dynamic response of curved beams. Also, the present RHOBTs analysis incorporates trapezoidal shape factor of a curved beam element completely. The equations of motion are obtained using Hamilton's principle. Solutions are obtained in closed-form using Navier's technique and by solving the eigenvalue equations. Numerical results are presented for the natural frequencies of laminated composite and sandwich thin/thick straight beams and shallow/deep and thick curved sandwich beams. The results of analytical solutions presented herein are compared with the exact 2D elasticity and analytical solutions in the available literature and excellent agreement is obtained.

Keywords: Free Vibration, Higher-Order Theory, Composite and Sandwich Laminates, Circular Curved Beam

۱- دانشیار (نویسنده پاسخگو): K.Malekzadeh@gmail.com

۲- کارشناس ارشد: Estiri.J@gmail.com

۳- استادیار: Davar78@gmail.com

۱- مقدمه

سازه‌های متشکل از مواد کامپوزیتی، به‌ویژه تیرهای خمیده در صنایع هوافضا، خودروسازی، عمران و دیگر کاربردهای مهندسی که وزن، نقش مهمی دارد، بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فرکانس‌های طبیعی، موضوع ویژه و مهمی در طراحی و استفاده این چنین سازه‌هایی است. به‌همین علت، ارتعاشات آزاد تیرهای خمیده موضوع جذابی برای محققان در طول چند دهه‌ی اخیر بوده است. در سال ۲۰۰۸ لو^۱ و همکاران [۱] یک آنالیز دقیق برای ارتعاشات آزاد تیر خمیده، برپایه‌ی تئوری دوبعدی الاستیسیته با استفاده از روش فضای حالت ارائه کردند. با استفاده از جداسازی متغیرها، متغیرها به سری‌های فوریه در مختصات طولی گسترش پیدا کردند.

سودهاکار^۲ و همکاران [۲] ارتعاشات آزاد تیر خمیده‌ی کامپوزیتی و ساندویچی را براساس تئوری مرتبه‌بالا با مدل المان محدود ارائه داده‌اند. در مدل ارائه شده تغییر شکل‌های چندلایه با در نظر گرفتن المان‌های برش عرضی و کرنش نرمال برای جابه‌جایی‌ها محاسبه شده است. در این فرمولاسیون ضریب شکل دوزنقه‌ای (عبارت $1+z/R$) در کرنش برشی لحاظ نشده است. کتو^۳ [۳-۴] یک حل دقیق بر پایه‌ی روش ریتز برای ارتعاشات آزاد تیرهای خمیده‌ی کامپوزیتی لایه‌ای ارائه کرد. او گزارش داد، هنگامی که تأثیرات تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی حذف شود، فرکانس‌های طبیعی برای تیرهای خمیده‌ی عمیق (قوس زیاد) با مدول برشی پایین و نسبت اورتوتروپی بالا پاسخ‌های غیردقیقی می‌دهد. به‌منظور در نظر گرفتن این تأثیرات، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌اول برای تیرهای خمیده‌ی عمیق توسط او گسترش پیدا کرد [۴-۵]. اما در فرمولاسیون او اثر شکل دوزنقه‌ای به‌طور کامل لحاظ نشده است. در حقیقت تنش موجود در راستای ضخامت تیر خمیده، باید روی یک مقطع دوزنقه‌ای انتگرال‌گیری شود تا نتیجه‌های تنش دقیقی از آن حاصل شود. براساس تئوری تیر خمیده از نوع تیموشنکو، تی‌سنگ^۴ و همکاران [۶] با استفاده از روش آنالیز سفتی که

شامل تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی بود، به یافتن فرکانس‌های طبیعی تیرهای چندلایه با انحنای مختلف پرداختند. اگرچه در تئوری‌های قوس مرتبه‌اول (FOATs) [۶] تغییر شکل برشی به‌صورت ثابت در جهت ضخامت در نظر گرفته شده است، دقت نتیجه‌ها بستگی زیادی به انتخاب ضریب تصحیح برش دارد. به‌علاوه این تئوری برای تیرهای نازک و کمی ضخیم^۵ مورد استفاده است و قابل کاربرد برای تیرهای ضخیم نیست. ملک‌زاده و همکاران [۷-۸] یک حل دقیق برای مطالعه‌ی ارتعاشات آزاد قوس‌های عمیق دایروی براساس تئوری دوبعدی الاستیسیته ارائه کردند. شرایط مرزی مورد مطالعه، ترکیبی از شرایط مرزی کلاسیک است (لولایی، ثابت و آزاد). آنها با استفاده از تئوری لایه‌ای، مؤلفه‌های جابه‌جایی را در جهت شعاعی تقریب زدند. نتیجه معادله‌های حاکم با استفاده از روش مربع‌های دیفرانسیلی جدا شدند و با یک مطالعه روی همگرایی آن توسعه داده شدند.

ردی^۶ و همکاران [۹] یک تئوری مرتبه‌سوم را برای ارتعاشات قوس‌های کامپوزیتی کم‌عمق توسعه دادند. این تئوری قابل کاهش به تئوری کلاسیک قوس‌ها و تئوری مرتبه‌اول و مرتبه‌دوم قوس‌ها است. تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه‌بالا [۱۰] پیش‌بینی خوبی از فرکانس‌های طبیعی برای تیرهای خمیده‌ی چندلایه‌ی کمی ضخیم دارند.

احمد^۷ [۱۱] مشخصه‌های ارتعاشی تیر خمیده‌ی ساندویچی را با استفاده از المان محدود و با سه تا پنج درجه آزادی در هر گره ارزیابی کرد. همچنین او تأثیرات عواملی از قبیل نسبت چگالی هسته به رویه‌ها، صلبیت هسته و ضخامت هسته به رویه‌ها را روی فرکانس طبیعی بررسی کرد.

ساکای‌یاما^۸ و همکاران [۱۲] ارتعاشات آزاد قوس‌های ساندویچی را با هسته الاستیک و ویسکو الاستیک و شرایط مرزی مختلف با استفاده از توابع گرین مورد بررسی قرار دادند. رآو^۹ و همکاران [۱۳] یک روش تحلیلی با استفاده از تئوری مرکب مرتبه‌بالا برای ارزیابی فرکانس‌های طبیعی تیرهای کامپوزیتی و ساندویچی ارائه کردند. هدف از این

5- Slightly Thick

6- Reddy

7- Ahmed

8- Sakiyama

9- Rao

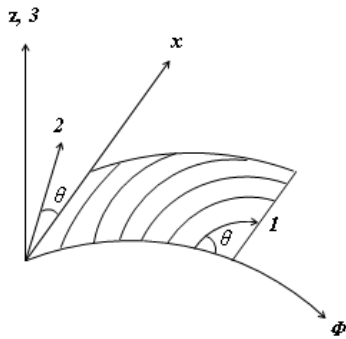
1- Q.Lu

2- Sudhakar

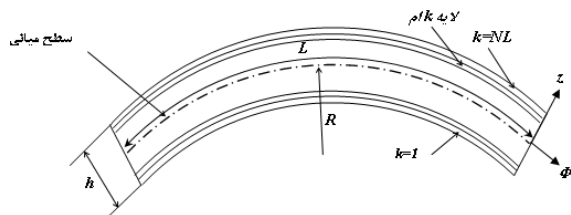
3- Qatu

4-Tseng

کامل به هم چسبیده و توابع کرنش در سطح‌های اتصال لایه‌ها پیوسته هستند.



Φ, x, z : laminate axes; 1, 2, 3: lamina axes



شکل (۱): هندسه‌ی تیر خمیده‌ی کامپوزیتی به همراه سیستم‌های مختصات.

۳- تعیین مؤلفه‌های جابه‌جایی

برای استخراج رابطه‌های حاکم بر مسئله براساس روش انرژی و اصل هامیلتون، لازم است در ابتدا، میدان‌های جابه‌جایی برای تیر چندلایه‌ی کامپوزیتی تعریف شود. میدان جابه‌جایی مرتبه‌بالای مورد نظر بر پایه‌ی بسط سری تیلور است که از کاهش یک مسئله الاستیسیته سه‌بعدی به فرمولاسیون دوبعدی است. مجموعه رابطه‌های به‌دست آمده براساس بسط مؤلفه‌های جابه‌جایی $u(\phi, z, t)$ و $w(\phi, z, t)$ به‌ترتیب در جهات ϕ و z نظیر هر نقطه از فضای چندلایه‌ی تیر خمیده، برحسب مختصه ضخامت z (جهت ضخامت) مطابق رابطه‌ی (۱) است [۱۴-۱۵].

$$u(\phi, z, t) = (1 + \gamma_0 z / R) u_0(\phi, t) + z \theta_\phi(\phi, t) + z^2 u_0^*(\phi, t) + z^3 \theta_\phi^*(\phi, t),$$

$$w(\phi, z, t) = w_0(\phi, t) + z \theta_z(\phi, t) + z^2 w_0^*(\phi, t) + z^3 \theta_z^*(\phi, t). \quad (1)$$

در رابطه‌ی (۱) عبارت‌های w ، u به‌ترتیب جابه‌جایی یک نقطه‌ی دلخواه (ϕ, z) در حوزه‌ی لایه‌های تیر، در جهت‌های ϕ و z است. در این رابطه t زمان را نشان می‌دهد، عبارت‌های w_0 و u_0 ، به‌ترتیب جابه‌جایی محوری و عرضی یک

مطالعه گسترش تئوری مرتبه‌بالای تصحیح شده^۱ RHOBT با استفاده از تئوری‌های مرتبه‌بالای مختلف برای تیرهای خمیده‌ی کامپوزیتی و ساندویچی ضخیم و عمیق است که در آن تأثیرات تنش‌ها و کرنش‌های برشی عرضی و نرمال عرضی لحاظ شده است.

این تئوری، شامل میدان جابه‌جایی دوبعدی با هشت، هفت و پنج درجه آزادی است. پیچش سطح مقطع به‌طور دقیق در این تئوری مدل شده است و نیاز به هیچ‌گونه ضریب تصحیح برش وجود ندارد. معادله‌ها، شامل معادله‌های نتیجه‌های تنش برای تیر خمیده‌ی کامپوزیتی ضخیم که عبارت $(1+z/R)$ در آن لحاظ شده و به‌طور دقیق انتگرال‌گیری شده است. معادله‌های حرکت و شرایط مرزی با استفاده از اصل هامیلتون استخراج شده است.

مدل مورد استفاده برای تیرهای ساندویچی، با جابه‌جایی در رویه‌ها و هسته، به‌صورت چند جمله‌ای با ضرائب نامعلوم است. ممان‌های اینرسی و تغییر شکل‌های برشی در هسته‌ی میانی و رویه‌ها در نظر گرفته شده است. فرض شده که تیرهای ساندویچی به‌صورت الاستیک خطی با جابه‌جایی‌های کوچک و شامل یک هسته با دو رویه نازک و شامل سفتی خمشی^۲ هستند. به‌منظور اعتبارسنجی روش حاضر، فرکانس‌های طبیعی برای گستره‌ی وسیعی از نسبت طول به شعاع و ضخامت به شعاع، به‌دست آمده و با کارهای دیگران مقایسه شده است. در تحقیق حاضر تئوری مرتبه‌بالا که تیر را به صورت یک چند لایه با انعطاف پذیری عرضی در نظر می‌گیرد ارائه شده است.

۲- تعریف مسئله

تیر خمیده‌ی دایروی با k لایه و ضخامت کل d ، که هر لایه دارای ضخامت h_k است، در شکل ۱ نشان داده شده است. زاویه‌ی تیر α_0 ، شعاع انحناء سطح میانی تیر برابر R و طول سطح میانی تیر برابر L است.

سیستم مختصات (۱، ۲ و ۳) مربوط به محورهای اصلی و سیستم مختصات قطبی (ϕ, x, z) مورد استفاده روی سطح میانی تیر در شکل ۱ نشان داده شده است. لایه‌ها به‌صورت

1- Refine Higher Order Beam Theory

2-Flexural Rigidity

۴- تعریف رابطه‌های کرنش - جابه‌جایی

با استفاده از تعریف رابطه‌های کرنش - جابه‌جایی از تئوری الاستیسیته، می‌توان میدان کرنش را برای یک تیر خمیده دایره‌ای با کاهش تئوری الاستیسیته برای پوسته‌های استوانه‌ای به دست آورد. کلی‌ترین حالت رابطه‌های کرنش - جابه‌جایی در سیستم مختصات قطبی به صورت زیر است [۱۶-۱۷]:

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{1+\gamma_0 z/R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{R} w \right),$$

$$\gamma_{\phi z} = \frac{1}{1+\gamma_0 z/R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \phi} - \frac{u}{R} \right) + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (۴)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

با جایگذاری عبارت‌های مربوط به جابه‌جایی رابطه‌ی (۳) در میدان کرنش رابطه‌ی (۴)، می‌توان کرنش‌ها را بر حسب سطح میانی تیر، برای هر مدل جابه‌جایی به صورت زیر به دست آورد:

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{1+\gamma_0 z/R} (\varepsilon_{\phi 0} + z \chi_\phi + z^2 \varepsilon_{\phi 0}^* + z^3 \chi_\phi^*),$$

$$\gamma_{\phi z} = \frac{1}{1+\gamma_0 z/R} (\beta_{\phi 0} + z \chi_{\phi z 0} + z^2 \beta_{\phi 0}^* + z^3 \chi_{\phi z 0}^*) + (\beta_{\phi 1} + z \chi_{\phi z 1} + z^2 \beta_{\phi 1}^*),$$

$$\varepsilon_z = (\varepsilon_{z 0} + z \chi_z + z^2 \varepsilon_{z 0}^*).$$

در رابطه‌ی (۵) چند کرنش سطح میانی عبارت است از:

$$\varepsilon_{\phi 0} = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \phi} + \frac{1}{R} w_0 \right), \quad \varepsilon_{\phi 0}^* = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_0^*}{\partial \phi} + C_1 \frac{1}{R} w_0^* \right),$$

$$\chi_\phi = \gamma_0 \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_0}{\partial \phi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_\phi}{\partial \phi} + C_1 \frac{1}{R} \theta_z, \dots \quad (۶)$$

۵- تعریف رابطه‌های تنش - کرنش و نتیجه‌های تنش

با فرض اینکه محورهای اصلی در دستگاه مختصات مادی (۳-۱) و محورهای چندلایه (ϕ, x, z) در دستگاه مختصات استوانه‌ای تعریف شده باشند، رابطه‌های تنش - کرنش سه‌بعدی برای لایه k م ارتوتروپیک، با توجه به محورهای اصلی برای تئوری توسعه یافته حاضر، بر اساس مدل‌های جابه‌جایی مختلف، مطابق رابطه‌ی (۷) تعریف شده‌اند [۱۸]:

نقطه ϕ روی سطح میانی تیر است. تابع θ_ϕ نشان‌دهنده چرخش خط عمود به سطح میانی تیر، حول خارج صفحه است. پارامترهای $u_0, w_0, \theta_\phi^*, \theta_z^*$ و θ_z عبارت‌های مرتبه‌بالای بسط سری تیلور هستند که نماینده‌ی مودهای تغییر شکل عرضی مرتبه‌بالای سطح مقطع تیر هستند و به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\theta_\phi = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad u_0^* = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{z=0}, \quad \theta_\phi^* = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \Big|_{z=0}, \quad (۲)$$

$$\theta_z = \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad w_0^* = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \Big|_{z=0}, \quad \theta_z^* = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \Big|_{z=0}.$$

مدل‌های مختلف جابه‌جایی که در این مقاله برای توسعه تئوری‌های مرتبه‌بالا مد نظر قرار گرفته، به طور خلاصه در ذیل آورده شده است:

$$u(\phi, z, t) = (1 + \gamma_0 z/R) u_0 + z \theta_\phi + z^2 u_0^* + z^3 \theta_\phi^*, \quad (۳)$$

$$w(\phi, z, t) = w_0 + C_1 z \theta_z + C_1 z^2 w_0^* + C_2 z^3 \theta_z^*.$$

در رابطه‌ی (۳) ضرایب C_1 و C_2 تعیین‌کننده نوع تئوری به کار رفته و γ_0 ضریب اثر شکل مقطع تیر هستند. هر یک از این ضریب‌ها، متناسب با دقت تئوری و نسبت ضخامت تیر خمیده، مقادیر صفر یا یک را اتخاذ می‌کنند.

این رابطه یک میدان جابه‌جایی مرتبه‌بالا با هشت پارامتر جابه‌جایی است. با قرار دادن ضریب γ_0 برابر با صفر نتیجه‌های تئوری مرتبه‌بالای تیر^۱ به عنوان HOBT نامیده می‌شود. اگر این ضریب برابر ۱ قرار گیرد، یعنی معادله‌های تعادل دربردارنده‌ی اثر شکل دوزنقه‌ای سطح مقطع تیر خمیده هستند، آنگاه نتیجه‌های تئوری مرتبه‌بالای تیر به عنوان تئوری تصحیح شده‌ی مرتبه‌بالای تیر^۲ RHOBT معرفی می‌شود.

در رابطه‌ی (۳) با قرار دادن ضرایب C_1 و C_2 برابر با ۱، یک میدان جابه‌جایی با هشت مؤلفه جابه‌جایی یعنی HOBT8، همچنین با قرار دادن ضریب C_2 برابر با صفر، تئوری مرتبه‌بالا به هفت مؤلفه جابه‌جایی کاهش می‌یابد، یعنی HOBT7 و با قرار دادن ضرایب C_1 و C_2 برابر با صفر، تئوری مرتبه‌بالا به پنج مؤلفه جابه‌جایی کاهش یافته است و HOBT5 نامیده می‌شود.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= (N_\phi, N_\phi^*, C_1 N_z, C_2 N_z^*, M_\phi, M_\phi^*, M_z, \\ &Q_\phi, R_\phi, Q_\phi^*, R_\phi^*, S_\phi, T_\phi, S_\phi^*, T_\phi^*), \\ \bar{\epsilon} &= (\epsilon_{\phi 0}, \epsilon_{\phi 0}^*, C_1 \epsilon_{z 0}, C_2 \epsilon_{z 0}^*, \chi_\phi, \chi_\phi^*, \chi_z, \\ &\beta_{\phi 0}, \beta_{\phi 1}, \beta_{\phi 0}^*, \beta_{\phi 1}^*, \chi_{\phi z 0}, \chi_{\phi z 0}^*, \chi_{\phi z 1}, \chi_{\phi z 1}^*). \end{aligned} \quad (12)$$

ماتریس‌های D_f و D_s برای مدل‌های مختلف جابه‌جایی در پیوست (الف) آورده شده است. نحوه‌ی محاسبه‌ی انتگرال‌های مربوطه، شامل روش دقیق محاسبه انتگرال‌های نتیجه‌های تنش که شامل عبارت $(1+z/R)$ در مخرج کسر هستند، مطابق مرجع [۲۰] انجام گرفته است. همان‌طور که در رابطه‌ی (۱۲) ملاحظه می‌شود، بردار نتیجه‌ی تنش $\bar{\sigma}$ و بردار کرنش سطح میانی $\bar{\epsilon}$ هر یک دارای ۱۴ مؤلفه هستند. در رابطه‌ی (۱۰)، بردار نتیجه تنش $\bar{\sigma}$ برای یک چندلایه با تعداد NL لایه به صورت زیر محاسبه شده‌اند:

$$\begin{aligned} (R_\phi \quad T_\phi \quad R_\phi^*) &= \sum_{k=1}^{NL} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \sigma_{\phi k} (1, z, z^2) (1 + \gamma_0 z / R) dz, \\ \begin{bmatrix} N_\phi & M_\phi & N_\phi^* & M_\phi^* \\ Q_\phi & S_\phi & Q_\phi^* & S_\phi^* \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^{NL} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \sigma_\phi \\ \sigma_{\phi z} \end{bmatrix} (1, z, z^2, z^3) dz, \end{aligned} \quad (13)$$

که در رابطه‌ی (۱۳) z_i و z_{i+1} به ترتیب فاصله‌های سطح خارجی و داخلی هر لایه از سطح میانی هستند.

۶- روش انرژی و اصل هامیلتون

برای استخراج رابطه‌های حاکم بر مسئله از روش انرژی و اصل هامیلتون، مطابق با رابطه‌ی (۱۴) استفاده شده است. در این رابطه، انرژی‌های جنبشی و پتانسیل بر حسب جابه‌جایی‌های تعریف شده در رابطه‌ی (۳) نوشته می‌شوند [۲۱].

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [T - (U + W)] dt = 0. \quad (14)$$

U در رابطه‌ی (۱۴) عبارت است از انرژی کرنشی کل ناشی از تغییر شکل و به صورت زیر تعریف شده است:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV, \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_\phi \epsilon_\phi + \sigma_z \epsilon_z + \sigma_{\phi z} \epsilon_{\phi z}] dz \cdot dA.$$

که در رابطه‌ی (۱۵) تعریف المان سطح پوسته به صورت رابطه‌ی (۱۶) است [۲۲]:

$$dA = b \cdot R \cdot (1 + \gamma_0 z / R) d\phi. \quad (16)$$

T در رابطه‌ی (۱۴) عبارت است از انرژی جنبشی و به صورت

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{44} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{55} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{66} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{13} \end{bmatrix}^k. \quad (7)$$

که در این رابطه، درایه‌های ماتریس سفتی در مرجع [۱۸] موجود است.

محورهای اصلی مادی هر تک‌لایه ممکن است بر محورهای مختصات اصلی (ϕ, x, z) منطبق نباشند. بنابراین لازم است که، رابطه‌های اساسی (بنیادی) از محورهای تک‌لایه (۳ و ۲، ۱) به محورهای مرجع چندلایه منتقل شوند. رابطه‌های نهایی عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \sigma_\phi \\ \sigma_x \\ \sigma_z \\ \sigma_{x\phi} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{\phi z} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{13} & Q'_{14} & \cdot & \cdot \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{23} & Q'_{24} & \cdot & \cdot \\ Q'_{31} & Q'_{32} & Q'_{33} & Q'_{34} & \cdot & \cdot \\ Q'_{41} & Q'_{42} & Q'_{43} & Q'_{44} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & Q'_{55} & Q'_{56} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & Q'_{66} & Q'_{67} & \cdot \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \epsilon_\phi \\ \epsilon_x \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{x\phi} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{\phi z} \end{bmatrix}^k, \quad (8)$$

که ضرایب ماتریس عبارت است از ثابت‌های الاستیک ماده ارتوتروپیک مربوط به لایه k ام که در مرجع [۱۸-۱۹] موجود است. با صفر قرار دادن σ_x ، $\sigma_{x\phi}$ ، σ_{xz} در رابطه‌ی (۸) و استخراج مؤلفه‌های تنش باقیمانده (غیر صفر) از این معادله، رابطه جدیدی بین تنش-کرنش حاصل می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود (هیچ‌کدام از مؤلفه‌های کرنش رابطه‌ی (۸) صفر نیستند).

$$\begin{bmatrix} \sigma_\phi \\ \sigma_z \\ \sigma_{\phi z} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \epsilon_\phi \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{\phi z} \end{bmatrix}^k. \quad (9)$$

ماتریس Q به صورت ترکیبی از ضرایب‌های ماتریس رابطه‌ی (۸) به دست می‌آید. با جایگذاری رابطه‌های کرنش از رابطه‌ی (۵) در رابطه‌ی (۹) و انتگرال‌گیری در طول ضخامت لایه‌های تیر، رابطه‌ی (۹) به صورت زیر کاهش پیدا می‌کند:

$$\bar{\sigma} = \mathbf{D} \bar{\epsilon}, \quad (10)$$

که در رابطه‌ی (۱۰) ماتریس D به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_s \end{bmatrix}. \quad (11)$$

$\bar{\sigma}$ و $\bar{\epsilon}$ به ترتیب، بردارهای نتیجه‌های کرنش-تنش در لایه میانی تیر هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

زیر تعریف شده است [۲۳]:
 معادله‌های (۲۵) و (۲۳) به دست می‌آیند. در رابطه‌های (۲۵-۱۸)، اینرسی‌های جرمی به صورت زیر تعریف شده‌اند [۲۴-۲۵]:

$$(\bar{I}_0, \bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3, \bar{I}_4, \bar{I}_5, \bar{I}_6) = \sum_{k=1}^{N_z} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho_k (1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) (1 + \gamma_0 z/R) dz, \quad (26)$$

که در آن، چگالی لایه k ام است. به همین ترتیب نیز معادله‌های شرایط مرزی در $\phi = 0$ و $\phi = \alpha_0$ به دست می‌آیند.

۷- ارتعاشات آزاد تیر خمیده کامپوزیتی و ساندویچی

در این قسمت، به منظور محاسبه فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد از روش حل ناویر^۱ براساس سری فوریه به حل معادله‌های تعادل تیر خمیده، که در قسمت قبل به دست آمد، پرداخته شده است. به منظور حل معادله‌های تعادل، ابتدا لازم است باتوجه به شرایط مرزی مفروض (دو سر ساده)، توابع مناسب برای مؤلفه‌های جابه‌جایی تیر خمیده اختیار شوند. این توابع باید شرایط مرزی هندسی و نیرویی تیر را ارضاء کنند. شرایط مرزی دو سر ساده به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$w_0 = w_0^* = \theta_z = \theta_z^* = (N_\phi + \gamma_0 / RM_\phi) = N_\phi^* = M_\phi = M_\phi^* = 0. \quad (27)$$

به منظور ارضای شرایط مرزی ذکر شده فوق مؤلفه‌های جابه‌جایی تیر خمیده به صورت سری فوریه در نظر گرفته شده است. که در رابطه‌های (۲۸) $\lambda = n\pi/\alpha_0$ و همچنین $u_n^*, w_n^*, \theta_{\phi n}^*, \theta_{zn}^*$ تا α_0 تغییر می‌کنند. همچنین $u_n, w_n, \theta_{\phi n}, \theta_{zn}$ دامنه ارتعاشات (ثابت‌های شکل موده‌های طبیعی)، i واحد مختلط و ω_n فرکانس طبیعی ارتعاشات (بر حسب rad/sec) مربوط به مود شماره n هستند.

$$\begin{aligned} u_0(\phi, t) &= \sum_{n=1}^n u_{0n} \cos \lambda \phi e^{i\omega_n t}, \\ u_0^*(\phi, t) &= \sum_{n=1}^n u_{0n}^* \cos \lambda \phi e^{i\omega_n t}, \\ w_0(\phi, t) &= \sum_{n=1}^n w_{0n} \sin \lambda \phi e^{i\omega_n t}, \\ w_0^*(\phi, t) &= \sum_{n=1}^n w_{0n}^* \sin \lambda \phi e^{i\omega_n t}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho [\dot{u}^2 + \dot{w}^2] dV = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \rho [\dot{u}^2 + \dot{w}^2] dA dz. \quad (17)$$

در رابطه‌ی (۱۴)، W عبارت است از انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای خارجی که در این مطالعه هیچ نوع نیروی خارجی به سیستم وارد نمی‌شود. با ساده کردن رابطه‌های (۱۷-۱۵) و جایگزینی آنها در اصل هامیلتون، معادله‌های تعادل به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} + \frac{\gamma_0}{R^2} \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{R} Q_\phi - \frac{\gamma_0}{R} R_\phi + \frac{\gamma_0}{R^2} S_\phi \\ = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} (\bar{I}_0 + \frac{2\gamma_0}{R} \bar{I}_1 + \frac{\gamma_0}{R^2} \bar{I}_2) + \frac{\partial^2 \theta_\phi}{\partial t^2} (\bar{I}_1 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_2) \\ + \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^2} (\bar{I}_2 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_3) + \frac{\partial^2 \theta_\phi^*}{\partial t^2} (\bar{I}_3 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_4), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{R} S_\phi - R_\phi = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} (\bar{I}_1 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_2) + \frac{\partial^2 \theta_\phi}{\partial t^2} \bar{I}_2 \\ + \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_3 + \frac{\partial^2 \theta_\phi^*}{\partial t^2} \bar{I}_4, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{R} N_\phi + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \bar{I}_0 + C_1 \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} \bar{I}_1 \\ + C_1 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_2 + C_2 \frac{\partial^2 \theta_z^*}{\partial t^2} \bar{I}_3, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{R} N_\phi^* - 2M_z + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\phi^*}{\partial \phi} = \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \bar{I}_2 + \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} \bar{I}_3 + \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_4 + C_2 \frac{\partial^2 \theta_z^*}{\partial t^2} \bar{I}_5, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial N_\phi^*}{\partial \phi} + \frac{1}{R} Q_\phi^* - 2T_\phi = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} (\bar{I}_2 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_3) \\ + \frac{\partial^2 \theta_\phi}{\partial t^2} \bar{I}_3 + \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_4 + \frac{\partial^2 \theta_\phi^*}{\partial t^2} \bar{I}_5, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{R} S_\phi^* - 3R_\phi^* = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} (\bar{I}_3 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_4) \\ + \frac{\partial^2 \theta_\phi}{\partial t^2} \bar{I}_4 + \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_5 + \frac{\partial^2 \theta_\phi^*}{\partial t^2} \bar{I}_6, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{R} M_\phi^* - 3N_z^* + \frac{1}{R} \frac{\partial S_\phi^*}{\partial \phi} = \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \bar{I}_3 + C_1 \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} \bar{I}_4 + C_1 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_5 + \frac{\partial^2 \theta_z^*}{\partial t^2} \bar{I}_6, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{R} M_\phi - N_z + \frac{1}{R} \frac{\partial S_\phi}{\partial \phi} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \bar{I}_1 + C_1 \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} \bar{I}_2 \\ + C_1 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_3 + C_2 \frac{\partial^2 \theta_z^*}{\partial t^2} \bar{I}_4. \end{aligned} \quad (25)$$

معادله‌های حرکت براساس مدل جابه‌جایی HOB7 با حذف

معادله‌ی (۲۵) و براساس مدل جابه‌جایی HOB5 با حذف

و نسبت پواسون $\nu = 0.167$ محاسبه شده و در جدول ۱ نشان داده شده است. طبق جدول ۱ نتیجه‌های به‌دست آمده از روش حاضر انطباق خوبی را با نتیجه‌های به‌دست آمده از تئوری تیر تیموشنکو (TBT) برای تیرهای باریک و با نتیجه‌های تئوری الاستیسیسته دوبعدی دقیق و نیمه‌تحلیلی برای هر دو مورد تیرهای باریک و ضخیم دارد. نتیجه‌های به‌دست آمده از دو تئوری HOB7 و HOB8 بسیار نزدیک به هم بوده و مقدارهای کمتری نسبت به نتیجه‌های تئوری HOB5 دارند که این، به علت وجود درجه‌های آزادی بیشتر است.

جدول (۱): مقایسه‌ی پنج فرکانس طبیعی اول بدون بعد برای

تیر مستقیم.

n	h/L = 0.1		
	Exact [۱]	Semi. [۲۱]	TBT[۲۲]
۱	۰/۰۴۲۸۸	۰/۰۴۲۸۸	۰/۰۴۲۸۷
۲	۰/۱۶۴۵۱	۰/۱۶۴۵۱	۰/۱۶۴۴۲
۳	۰/۳۴۸۴۱	۰/۳۴۸۴۱	۰/۳۴۸۰۴
۴	۰/۴۷۹۹۰	۰/۴۷۹۹۰	-
۵	۰/۵۷۶۷۵	۰/۵۷۶۷۵	۰/۵۷۵۷۸
n	HOB7	HOB8	HOB5
	۰/۰۴۲۸۸	۰/۰۴۲۸۸	۰/۰۴۳۴۶
۲	۰/۱۶۴۵۱	۰/۱۶۴۵۱	۰/۱۶۶۵۰
۳	۰/۳۴۸۴۲	۰/۳۴۸۴۲	۰/۳۵۱۹۵
۴	۰/۴۷۹۹۸	۰/۴۷۹۹۸	۰/۴۸۵۶۳
۵	۰/۵۷۶۸۴	۰/۵۷۶۸۴	۰/۵۸۱۴۹
n	h/L = 0.3		
	Exact[۱]	Semi. [۲۱]	TBT[۲۲]
۱	۰/۳۴۸۴۱	۰/۳۴۸۴۵	۰/۳۴۸۰۴
۲	۱/۱۱۳۰۹	۱/۱۱۳۰	۱/۱۰۹۷
۳	۱/۴۳۸۲۳	۱/۴۳۸۵	۱/۹۹۷۴
۴	۲/۰۰۶۸۸	۲/۰۰۶۹	-
۵	۲/۸۶۱۲۵	۲/۸۶۱۲	۲/۹۱۵۴
n	HOB7	HOB8	HOB5
	۰/۳۴۸۴۲	۰/۳۴۸۴۲	۰/۳۵۱۹۵
۲	۱/۱۱۳۲	۱/۱۱۳۲	۱/۱۱۷۸
۳	۱/۴۳۸۸	۱/۴۳۸۸	۱/۴۴۳۲
۴	۲/۰۰۹۹	۲/۰۰۹۹	۲/۰۱۱۹
۵	۲/۸۶۲۰	۲/۸۶۲۰	۲/۹۰۳۳

۸-۲- فرکانس طبیعی تیر مستقیم ساندویچی

در این بخش، تیر ساندویچی مستقیم به طول ۳۶ اینچ و شرایط زیر در نظر گرفته شده است. هشت فرکانس طبیعی اول آن، برحسب هرتز (Hz) در جدول ۲ نشان داده شده

$$\theta_{\varphi}(\varphi, t) = \sum_{n=1}^n \theta_{\varphi n} \cos \lambda \varphi e^{i \omega_n t},$$

$$\theta_{\varphi}^*(\varphi, t) = \sum_{n=1}^n \theta_{\varphi n}^* \cos \lambda \varphi e^{i \omega_n t},$$

$$\theta_z(\varphi, t) = \sum_{n=1}^n \theta_{zn} \sin \lambda \varphi e^{i \omega_n t},$$

$$\theta_z^*(\varphi, t) = \sum_{n=1}^n \theta_{zn}^* \sin \lambda \varphi e^{i \omega_n t}.$$

با جایگذاری رابطه‌های (۲۸) در معادله‌های حرکت

سیستم برای مدل‌های مختلف جابه‌جایی و فاکتورگیری از ضریب‌ها، معادله مقدار ویژه^۱ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[[\mathbf{K}] - \lambda_n [\mathbf{M}]] \{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{0}\}. \quad (29)$$

در رابطه‌ی (۲۹)، $\lambda_n = (\omega_n)^2$ ، بردار جابه‌جایی برای هر مقدار n است. کوچک‌ترین مقدار ویژه که از رابطه‌ی (۲۹) به دست می‌آید، برابر مربع فرکانس طبیعی ارتعاشات است.

[K] ماتریس سختی و [M] ماتریس جرم برای مدل‌های

مختلف جابه‌جایی است. برای نمونه چند درایه این دو ماتریس در پیوست (ب) ارائه شده است.

۸- نتایج

در این بخش به کمک یک برنامه‌ی رایانه‌ای، با استفاده از نرم‌افزار MATLAB7.3 براساس تئوری‌های مطرح شده، به بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای خمیده‌ی کامپوزیتی و ساندویچی باریک، ضخیم، کم عمق و عمیق با شرایط مرزی ساده (لولایی) پرداخته شده است. این تحلیل برای تیرهای خمیده‌ی اورتوتروپیک و ایزوتروپیک برقرار است. همچنین این تحلیل برای تیرهای مستقیم ضخیم با در نظر گرفتن شعاع انحناء بی‌نهایت قابل کاربرد است.

برای نشان دادن کارایی و تطبیق پذیری این روش به بررسی بازه وسیعی از نسبت ضخامت به شعاع (h/R)، نسبت ضخامت به طول (h/L) و نسبت طول به شعاع (L/R) تیر پرداخته شده است. نتیجه‌های حاصله از این روش با نتیجه‌های دقیق به دست آمده از تئوری الاستیسیسته و نتیجه‌های تحلیلی موجود در مقاله‌ها مقایسه شده است.

۸-۱- فرکانس طبیعی تیر مستقیم

در این بخش، پنج فرکانس طبیعی اول بدون بعد $\Omega = \omega h (\rho/G)^{1/2}$ با نسبت‌های ضخامت به طول (h/L) متفاوت

است. خواص مربوط به رویه‌های تیر عبارت است از:
 $E = 1000000 \text{ lb/in}^2$, $\rho = 0.00025098 \text{ lbs}^2/\text{in}^4$, $v = 0.3$,
 $h_f(\text{top, bot.}) = 0.18 \text{ in}$
 خواص مربوط به هسته میانی تیر عبارت است از:
 $G = 12000 \text{ lb/in}^2$, $\rho = 0.0000030717 \text{ lbs}^2/\text{in}^4$, $v = 0.3$,
 $h_c = 0.5 \text{ in}$

در جدول ۲ نتیجه‌های حاصل از تئوری‌های حاضر با نتیجه‌های تحلیلی به‌دست آمده از تئوری مرکب توسط رانو^۱ و همکاران [۱۳] و همچنین نتیجه‌های به‌دست آمده از روش اجزا محدود احمد [۲۳] مقایسه شده است. از داده‌های جدول ۲ انطباق خوب جواب‌های به‌دست آمده از روش حاضر با نتیجه‌های تحلیلی تئوری مرکب به‌دست می‌آید. در این بخش نیز مانند مثال قبل نتیجه‌های به‌دست آمده از دو تئوری HOB7 و HOB8 بسیار نزدیک به هم بوده و مقادیر کمتری نسبت به نتیجه‌های تئوری HOB5 دارند.

باتوجه به این جدول، اختلاف پارامتر فرکانسی بین روش حاضر RHOB8 با نتیجه‌های تئوری الاستیسیته دوبعدی کمتر از ۰/۲ درصد است. طبق این جدول مقدار بیشینه‌ی این اختلاف در ضخامت $h/R = 0.25$ اتفاق می‌افتد. همچنین در همه‌ی موارد، روش حاضر RHOB8 بهترین پیش‌بینی از فرکانس‌ها را به نسبت دیگر روش‌ها ارائه می‌کند. همان‌طور که از این جدول مشخص است، پاسخ‌های تئوری مرتبه‌بالای مرجع [۲] کمی بیشتر از پاسخ‌های تئوری حاضر است. در تئوری مرتبه‌بالای این مرجع عبارت $(1+z/R)$ برای کرنش برشی در نظر گرفته نشده است.

جدول (۲): مقایسه‌ی هشت فرکانس طبیعی اول (HZ) برای

تیر مستقیم ساندویچی.

n	HOB7	HOB8	HOB5
۱	۵۶/۹۸۵۷	۵۶/۹۸۵۷	۵۹/۶۴۹۶
۲	۲۱۸/۴۶۴۳	۲۱۸/۴۷۴۸	۲۲۷/۷۵۷۲
۳	۴۶۰/۷۹۸۰	۴۶۰/۸۱۷۶	۴۷۷/۸۳۴۸
۴	۷۵۷/۵۰۱۴	۷۵۷/۵۲۹۱	۷۸۱/۱۴۸۹
۵	۱۰۸۶/۸۱۳۱	۱۰۸۶/۸۴۷۰	۱۱۱۵/۰۳۱۶
۶	۱۴۳۳/۷۸۸۲	۱۴۳۳/۸۲۶۳	۱۴۶۴/۵۸۰۸
۷	۱۷۸۹/۲۳۱۲	۱۷۸۹/۲۷۲۰	۱۸۲۱/۰۲۶۹
۸	۲۱۴۷/۸۷۹۲	۲۱۴۷/۹۲۱۵	۲۱۷۹/۵۷۶۴
	مرجع [۲۳]	مرجع [۱۳]	
۱	۵۶/۰۶۸۰	۵۶/۰۲۸۰	
۲	۲۱۸/۵۶۹۰	-	
۳	۴۶۰/۶۴۲۰	۴۵۷/۱۲۰۰	
۴	۷۵۷/۶۴۲۰	-	
۵	۱۰۸۶/۹۵۵۰	۱۰۹۰/۲۶۰۰	
۶	۱۴۳۳/۹۲۰۰	-	
۷	۱۷۸۹/۳۴۵۰	۱۸۰۹/۸۰۰۰	
۸	۲۱۴۷/۹۶۹۰	-	

جدول (۳): مقایسه‌ی فرکانس طبیعی اصلی بدون بعد برای

تیر خمیده‌ی کامپوزیتی [۰/۹۰] دایره‌ای و $E_1/E_2 = 40$

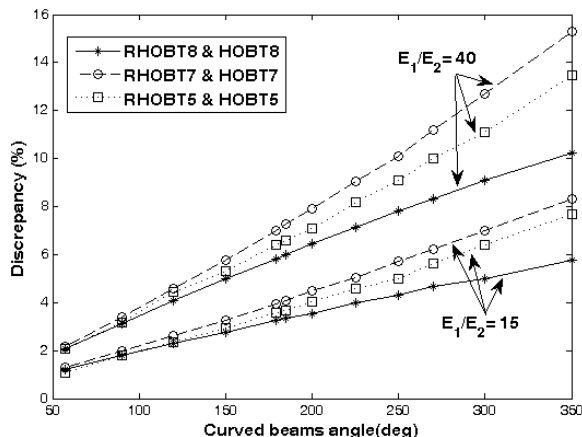
h/R	۰/۱	۰/۲	۰/۲۵
Exact [۱]	۲/۹۹۶۱	۲/۴۰۸۵	۲/۱۶۱۳
۱-RHOB8	۲/۹۹۲۹	۲/۴۰۸۲	۲/۱۶۷۳
۲-HOB8	۳/۰۰۳۷	۲/۴۷۲۹	۲/۲۳۳۴
۳-RHOB7	۳/۰۰۴۶	۲/۴۶۶۱	۲/۲۰۶۳
۴-HOB7	۳/۰۷۰۱	۲/۵۴۱۴	۲/۲۹۴۹
۵-RHOB5	۳/۰۴۷۴	۲/۵۰۹۹	۲/۲۶۸۵
۶-HOB5	۳/۱۱۰۳	۲/۵۸۰۶	۲/۳۳۲۲
۷-DQM [۷]	۲/۹۹۶۴	۲/۴۰۸۷	-
۸-HSDT [۱۰]	۳/۰۱۰۷	۲/۴۲۰۸	-
۹-FSDT [۵]	۳/۰۸۱۴	۲/۵۹۳۵	-
مرجع [۲]	۳/۰۹۳۸	۲/۶۷۳۵	-
مرجع [۶]	۳/۰۸۱۶	۲/۵۹۴۲	۲/۳۶۶۶

شکل ۲ درصد اختلاف بین تئوری‌های نام برده‌شده (شماره‌گذاری) در جدول ۳، یعنی شش تئوری حاضر و روش

۸-۳- فرکانس طبیعی تیر خمیده کامپوزیتی

در این نمونه، تیر خمیده‌ی کامپوزیتی ۰/۹۰ دایره‌ای با شرایط مرزی لولایی مورد بررسی قرار گرفته است. نتیجه‌ها برای فرکانس پارامتری اول

شکل ۳ برای فرکانس اصلی و برای دو مقدار از نسبت اورتوتروپی است. این نمودار، تأثیر عبارت $1+z/R$ را برای تئوری‌های مختلف ارائه می‌کند. براساس تغییرات این نمودار، تأثیر این عبارت با افزایش زاویه و همچنین افزایش نسبت اورتوتروپی افزایش می‌یابد. بیشترین تأثیر این عبارت مربوط به اختلاف بین تئوری‌های RHOB7 و HOB7 است.



شکل (۳): درصد اختلاف بر حسب زاویه‌ی تیر خمیده برای فرکانس اصلی تیر بین تئوری‌های حاضر برای دو مقدار از نسبت اورتوتروپی.

۸-۴- فرکانس طبیعی تیر خمیده کامپوزیتی با

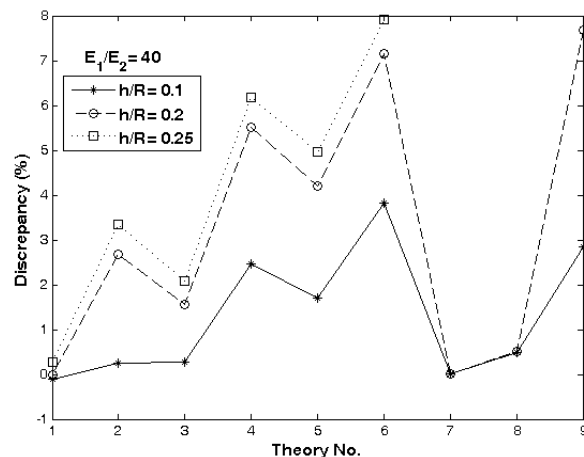
لایه‌چینی متقارن و نامتقارن

تیر خمیده کامپوزیتی دایره‌ای با لایه‌چینی متقارن و غیرمتقارن با شرایط مرزی لولایی مورد بررسی قرار گرفته است.

جدول ۴ تأثیرات چینش لایه‌ها و پارامترهای هندسی L/h را روی فرکانس پارامتری اصلی $\Omega = \omega L^2 (\rho / E_2 h^2)^{1/2}$ را ارائه می‌کند. نتیجه‌ها با توجه به تئوری‌های بهبود یافته‌ی مرتبه‌بالا RHOB7s و تئوری‌های مرتبه‌بالا HOB7s محاسبه شده و با تئوری الاستیسیته دوبعدی [۱] مقایسه شده است. خواص اورتوتروپیک مواد شامل $E_1/E_2 = 40$ و $G_{12} = 0.6 E_2$ و نسبت پواسون $\nu = 0.25$ است. نتیجه‌های تئوری‌های ساده ردی [۹] برای مقایسه و اعتبار بخشیدن به کارایی روش حاضر، ارائه شده است.

برای انواع مختلف لایه‌چینی‌ها نتیجه‌های تئوری حاضر

DQ [۷]، HSDT [۱۰] و FSĐT [۵] در مقایسه با نتیجه‌های تئوری الاستیسیته دوبعدی [۱] ارائه می‌کند. این مقایسه برای فرکانس اصلی و برای سه نوع هندسه‌ی تیر با h/R مساوی 0.1 ، 0.2 و 0.25 و همچنین نسبت اورتوتروپی $E_1/E_2 = 40$ ارائه شده است. این نمودار نشان می‌دهد که حذف اثر عبارت $1+z/R$ و همچنین ضریب‌های C_1 و C_2 در فرمولاسیون باعث می‌شود که، مقدار فرکانس کمی بیشتر از مقدار واقعی به دست آید. تأثیر این عبارت‌ها با افزایش نسبت h/R بیشتر می‌شوند. همچنین این نمودار اشاره به این دارد که حذف اثر عبارت $1+z/R$ اختلاف بیشتری را نسبت به حذف ضریب‌های C_1 و C_2 برای یک تئوری مرتبه‌بالای خاص تولید می‌کند که این اختلاف برای نسبت‌های بالای h/R بیشتر است. برای مثال با توجه به شکل ۱، اختلاف بین RHOB7 و HOB7 بیشتر است از اختلاف بین RHOB8 و HOB8.



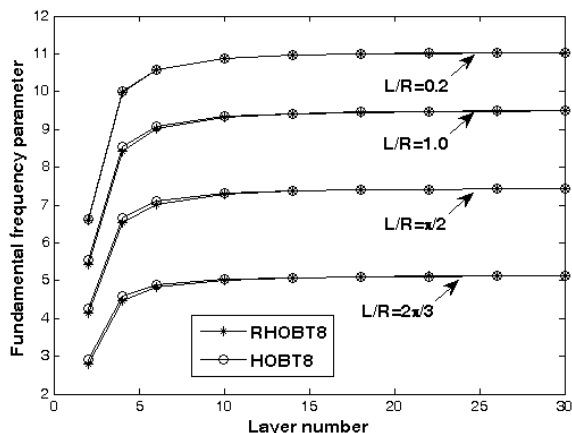
شکل (۲): درصد اختلاف برای فرکانس اصلی بین تئوری‌های شماره‌گذاری شده‌ی جدول ۳ در مقایسه با تئوری الاستیسیته دوبعدی برای سه مقدار h/R .

شکل ۳ درصد اختلاف بین تئوری‌های RHOB7، RHOB5، RHOB8 در مقایسه با تئوری‌های HOB7، HOB5 و HOB8 برای زاویه‌های مختلف تیر را نشان می‌دهد. مقدار این اختلاف به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{درصد اختلاف} = (RHOB7 - HOB7) / RHOB7 \times 100$$

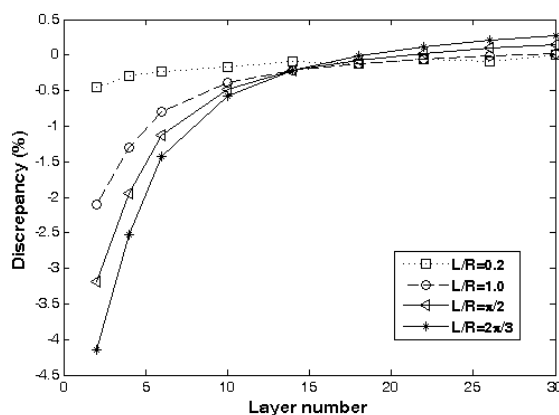
$$\text{درصد اختلاف} = (\text{مقدار دقیق} - \text{تئوری}) / \text{مقدار دقیق} \times 100$$

خمیده برحسب رادیان برابر با نسبت انحنای L/R است با افزایش تعداد لایه‌ها، برای تعداد لایه‌های کمتر، فرکانس طبیعی به سرعت افزایش می‌یابد، اما با بیشتر شدن تعداد لایه‌ها تغییری در فرکانس طبیعی مشاهده نمی‌شود.



شکل (۴): فرکانس اصلی بدون بعد Ω بر حسب تعداد لایه‌های نامتقارن تیر خمیده برای نسبت‌های $E_1/E_2 = 40$ و $L/h = 10$ برای چهار مقدار از L/R .

به‌منظور معرفی بیشتر اثر عبارت $1+z/R$ ، اختلاف بین تئوری‌های RHOBT8 و HOBT8 در شکل ۵ ارائه شده است. طبق شکل واضح است که، با افزایش تعداد لایه‌ها، این اختلاف برای نسبت‌های مختلف L/R کاهش می‌یابد. نحوه‌ی محاسبه‌ی میزان اختلاف مانند شکل ۳ است.



شکل (۵): درصد اختلاف بر حسب تعداد لایه‌ی تیر خمیده برای فرکانس اصلی تیر، بین تئوری‌های حاضر RHOBT8 و HOBT8، برای نسبت‌های $E_1/E_2 = 40$ و $L/h = 10$ برای چهار مقدار از L/R .

به‌نسبت تئوری مرتبه‌بالای قوس‌ها (HOAT)، تئوری مرتبه‌ی دو قوس‌ها (SOAT) و تئوری کلاسیک قوس‌ها (CAT)، بهترین انطباق را با حل الاستیسیته دوبعدی دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، پارامتر فرکانس اصلی با افزایش تعداد لایه‌ها برای یک هندسه‌ی خاص تیر، برای لایه‌چینی غیرمتقارن به تدریج افزایش و برای لایه‌چینی متقارن به صورت یکنواخت کاهش می‌یابد.

جدول (۴): مقایسه‌ی فرکانس طبیعی اصلی بدون بعد برای تیر خمیده با لایه‌چینی متقارن و غیرمتقارن.

L/h	نوع تئوری	چند لایه نامتقارن		
		$0^\circ/90^\circ$	$[0^\circ/90^\circ]_2$	$[0^\circ/90^\circ]_5$
۵	Exact[۱]	۵/۷۱۴۰	۷/۳۵۴۶	۸/۰۲۲۲
	RHOBT8	۵/۷۱۵۲	۷/۵۶۲۵	۸/۲۱۵۲
	HOBT8	۵/۷۵۱۸	۷/۵۹۴۷	۸/۲۲۷۷
	RHOBT7	۵/۷۱۵۳	۷/۷۵۲۰	۸/۲۱۴۱
	HOBT7	۵/۷۵۱۹	۷/۶۰۴۴	۸/۲۲۶۶
	RHOBT5	۵/۷۲۶۴	۷/۵۸۵۶	۸/۲۲۱۴
	HOBT5	۵/۷۶۳۸	۷/۶۱۷۶	۸/۲۳۳۹
	HOAT[۹]	۶/۱۵۶		
	SOAT[۹]	۵/۸۹۳		
	CAT[۹]	۷/۱۷۴		
		چند لایه متقارن		
		$[0^\circ/90^\circ]_2/0^\circ$	$[0^\circ/90^\circ]_4/0^\circ$	
۵	Exact.[۱]	۸/۹۸۲۰	۸/۷۴۲۹	
	RHOBT8	۹/۳۱۷۲	۹/۰۲۷۸	
	HOBT8	۹/۳۱۴۰	۹/۰۲۵۳	
	RHOBT7	۹/۳۱۷۱	۹/۰۲۷۸	
	HOBT7	۹/۳۱۴۸	۹/۰۲۵۳	
	RHOBT5	۹/۳۲۱۸	۹/۰۳۲۸	
	HOBT5	۹/۳۱۹۵	۹/۰۳۰۴	

اثر عبارت $1+z/R$ در لایه‌چینی غیرمتقارن بیشتر از لایه‌چینی متقارن تیر است. شکل ۴ تغییرات پارامتر فرکانس اصلی Ω را برحسب تعداد لایه‌های نامتقارن، تیر خمیده برای نسبت اورتوتروپی $E_1/E_2 = 40$ و نسبت طول به ضخامت $L/h = 10$ برای تئوری‌های RHOBT8 و HOBT8 ارائه می‌کند. مقادیر به‌دست آمده برای نسبت‌های مختلف طول به شعاع L/R برابر با 0.2 ، 1 ، $1/57$ ، $1/0.9$ هستند. زاویه‌ی α_0 تیر

۸-۵- فرکانس طبیعی تیر خمیده‌ی ساندویچی

تیر خمیده‌ی ساندویچی به طول ۲۸ اینچ و شعاع انحناء ۱۶۸/۰۶ اینچ در نظر گرفته شده است. خواص رویه‌ها و هسته همانند بخش ۸-۲ است. پنج فرکانس طبیعی اول آن برحسب هرتز (Hz) در جدول ۵ نشان داده شده است. در جدول ۵ پاسخ‌های به‌دست آمده از روش حاضر، انطباق خوبی با پاسخ‌های به‌دست آمده توسط سودهاکار^۱ و همکاران [۲] دارند. احمد [۱۱] در اولین کارش که بر روی

ساندویچ‌ها انجام داد، اثر تغییر شکل برشی را در نظر نگرفت به‌همین علت دارای پاسخ‌های بالاتری نسبت به دیگران است. پاسخ‌هایی که توسط ساکی‌یاما^۲ و همکاران [۱۲] به‌دست آمده براساس تئوری مرتبه‌اول و با فرض کرنش برشی ثابت است. همچنین بر طبق این جدول پاسخ‌های به‌دست آمده از تئوری‌های RHOBT8 و HOBT8 به‌ترتیب به پاسخ‌های حاصله از HOBT7 و RHOBT7 بسیار نزدیک هستند.

جدول (۵): مقایسه پنج فرکانس طبیعی اول (Hz) برای تیر خمیده‌ی ساندویچی.

n	تئوری‌های حاضر						مراجع		
	RHOBT8	HOBT8	RHOBT7	HOBT7	RHOBT5	HOBT5	[۲]	[۱۲]	[۱۱]
۱	۱۸۲/۲۵۴	۱۸۲/۱۶۵	۱۸۲/۲۶۱	۱۸۲/۳۲۰	۱۸۲/۲۳۳	۱۹۱/۰۱۱	۱۸۲/۲۸۸	۱۸۲/۷	۱۹۹/۵
۲	۳۴۸/۶۱۵	۳۴۸/۴۱۶	۳۴۸/۷۱۷	۳۴۸/۵۰۳	۳۶۲/۴۶۰	۳۶۲/۲۳۱	۳۴۸/۲۲۴	۳۵۱/۴	۳۹۴/۰
۳	۷۱۳/۲۴۰	۷۱۳/۲۸۰	۷۱۳/۲۴۳	۷۱۳/۴۳۵	۷۳۶/۰۹۳	۷۳۵/۲۱۹	۷۱۴/۳۲۷	۷۲۶/۱	۷۴۶/۰
۴	۱۱۳۷/۱۸۷	۱۱۳۵/۱۶۰	۱۱۳۷/۱۸۹	۱۱۳۵/۳۴۵	۱۱۶۵/۹۵۹	۱۱۶۴/۰۱۳	۱۱۳۵/۰۷۵	۱۱۴۲/۰	۱۱۷۵/۰
۵	۱۵۸۸/۴۷۰	۱۴۸۵/۱۱۱	۱۵۸۸/۴۷۴	۱۵۸۵/۲۷۸	۱۶۱۹/۹۵۵	۱۶۱۶/۶۲۰	۱۵۸۵/۴۷۶	۱۶۳۳/۰	۱۶۳۹/۰

۹- نتیجه‌گیری

در این مطالعه به‌کمک ارتقاء تئوری مرتبه‌بالای تصحیح شده با استفاده از تئوری‌های مرتبه‌بالای مختلف برای تیرهای خمیده‌ی کامپوزیتی، ساندویچی ضخیم و عمیق به محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد، با استفاده از حل ناویر براساس سری فوریه پرداخته شده که در آن تأثیرات تنش‌ها و کرنش‌های برشی عرضی و نرمال عرضی لحاظ شده است. این تئوری شامل میدان جابه‌جایی دوبعدی (2D) با هشت، هفت و پنج درجه آزادی است. پیچش سطح مقطع به‌طور دقیق در این تئوری مدل شده و نیاز به هیچ‌گونه ضریب تصحیح برش وجود ندارد. از دیگر مزیت‌های این روش این است که نیاز به هیچ نوع تکرار برای همگرایی پاسخ وجود ندارد (بر خلاف مراجع [۱۰ و ۸-۷]). فرمولاسیون ارائه شده، شامل معادله‌های نتیجه‌های تنش برای تیر خمیده‌ی کامپوزیتی ضخیم که عبارت (1+z/R) در آن لحاظ شده و به‌طور دقیق انتگرال‌گیری شده است. معادله‌های حرکت و شرایط مرزی با استفاده از اصل هامیلتون استخراج شده است.

به‌منظور اعتبارسنجی روش حاضر، فرکانس‌های طبیعی برای گستره‌ی وسیعی از نسبت طول به شعاع و ضخامت به شعاع به‌دست آمده و با کارهای دیگران مقایسه شده است. باتوجه به نکاتی که در متن بیان شد، پاسخ دینامیکی تیر خمیده در ضخامت‌های بالا، بسیار متأثر از فرض در نظر گرفتن اثر شکل دوزنقه‌ای تیر، یعنی در نظر گرفتن اثر عبارت $1+z/R$ در فرمولاسیون است و مشاهده می‌شود که نتیجه‌های تئوری‌های RHOBTs به نتیجه‌های تئوری الاستیسیته نزدیک‌تر است. بنابراین در نظر نگرفتن اثر شکل دوزنقه‌ای تیر خمیده در محاسبه‌ها، سبب بروز خطا در نتیجه‌ها خواهد شد. در نظر گرفتن انعطاف‌پذیری بیشتر، یعنی استفاده از تئوری‌های مرتبه‌بالا، سبب بروز خطای کمتری می‌شود. همچنین در بیشتر موارد، نتیجه‌های تئوری‌ها با هفت و هشت مؤلفه جابه‌جایی، نزدیک به هم و کمتر از نتیجه‌های تئوری با پنج مؤلفه جابه‌جایی هستند. در تیرهای خمیده‌ی کامپوزیتی با افزایش تعداد لایه‌ها، برای تعداد لایه‌های کمتر، فرکانس طبیعی به سرعت افزایش می‌یابد، اما

1- Sudhakar

2- Sakiyama

12. Sakiyama, T., Matsuda, H., and Morita, C. "Free Vibration Analysis of Sandwich Arches with Elastic or Visco Elastic Core and Various Kinds of Axis Shape and Boundary Conditions", *J. Sound Vib.*, Vol. 203, No. 3, pp. 505-522, 1997.
13. Rao, M.K., Desai, Y.M., and Chitnis, M.R. "Free Vibrations of Laminated Beams Using Mixed Theory", *Comp. Strc.*, Vol. 52, No. 2, pp. 149-160, 2001.
14. Liew, K.M. and Lim, C.W. "A Higher-Order Theory for Vibration of Doubly Curved Shallow Shells", *J. Appl. Mech.*, Vol. 63, No. 3, pp. 578-593, 1996.
15. Garg, A.K., Khare, R.K., and Kant, T. "Higher-Order Closed-Form Solutions for Free Vibration of Laminated Composite and Sandwich Shells", *J. Sandw. Strc. Mater.*, Vol. 8, No. 3, pp. 205-235, 2006.
16. Bert, C.W. "Structural Theory of Laminated Anisotropic Elastic Shells", *J. Compos. Mater.*, Vol. 1, No. 3, pp. 414-423, 1967.
17. Leissa, A.W. and Chang, J. "Elastic Deformation of Thick, Laminated Composite Shallow Shells", *Comp. Strc.*, Vol. 35, No. 2, pp. 153-170, 1996.
18. Jones, R.M. "Mechanics of Composite Materials", McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1975.
19. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., and Witt, R.J. "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley and Sons, New York, 2000.
20. Qatu, M.S. "Vibration of Laminated Shells and Plates", Elsevier Ltd., Oxford, 2004.
21. Chen, W.Q., Lu, C.F., and Bian, Z.G. "A Semi-Analytical Method for Free Vibration of Straight Orthotropic Beams with Rectangular Crosssections", *Mech. Res. Comm.*, Vol. 31, No. 3, pp. 725-734, 2004.
22. Hu, H.C. "Variational Principles of Theory of Elasticity with Applications", Gordon and Breach, New York, 1984.
23. Ahmed, K.M. "Dynamic Analysis of Sandwich Beams", *J. Sound Vib.*, Vol. 20, No. 3, pp. 263-276, 1972.
24. Malekzadeh, K., Nazari, A., Mozaffari, A. and Ebrahimi, M. "The Effect of Applying Functionally Graded Core to Decrease Delamination of Composite Sandwich Panel under Transverse Load", *J. Mech. and Aerospace*, Vol. 8, No. 1, pp. 71-84, 2012, (In Persian).
25. Malekzadeh, K., Ebrahimi, M., Nazari, A., and Irani, S. "Buckling Analysis of Composite Sandwich Panel with Symmetric FGM Core, Using Improved High-order Theory", *J. Mech. and Aerospace*, Vol. 8, No. 1, pp. 55-70, 2012, (In Persian).

با بیشتر شدن تعداد لایه‌ها تغییری در فرکانس طبیعی مشاهده نمی‌شود. درضمن این تئوری قابل استفاده برای تیرهایی از جنس ماده‌ی هدفمند می‌باشد.

مراجع

1. Lu, Q. and Lu, C.F. "Exact Two-Dimensional Solutions for in-Plane Natural Frequencies of Laminated Circular Arches", *J. Sound Vib.*, Vol. 318, No's.4-5, pp. 982-990, 2008.
2. Sudhakar, R. and Marur, T. K. "Free Vibration of Higher-Order Sandwich and Composite Arches", Part I: Formulation, *J. Sound Vib.*, Vol. 310, No's. 1-2, pp. 91-109, 2008.
3. Qatu, M.S. "In-Plane Vibration of Slightly Curved Laminated Composite Beams", *J. Sound Vib.*, Vol. 159, No. 2, pp. 327-338, 1992.
4. Qatu, M.S. and Elsharkawy, AA. "Vibration of Laminated Composite Arches with Deep Curvature and Arbitrary Boundaries", *Comput. Strc.*, Vol. 47, No. 2, pp 305-311, 1993.
5. Qatu, M.S. "Theories and Analysis of Thin and Moderately Thick Laminated Composite Curved Beams", *Int. J. Solids Strc.*, Vol. 30, No. 20, pp. 2743-2756, 1993.
6. Tseng, Y.P., Huang, C.S., and Kao, M.S. "In-Plane Vibration of Laminated Curved Beams with Variable Curvature by Dynamic Stiffness Analysis", *Compos. Strc.*, Vol. 50, No. 2, pp. 103-114, 2000.
7. Malekzadeh, P., Setoodeh, A.R., and Barmshouri, E. "A Hybrid Layerwise and Differential Quadrature Method for in-Plane Free Vibration of Laminated Thick Circular Arches", *J. Sound Vib.*, Vol. 315, No. 1, pp. 212-225, 2008.
8. Malekzadeh, P. and Setoodeh, A.R. "DQM in-Plane Free Vibration of Laminated Moderately Thick Circular Deep Arches", *Advances in Eng. Software*, Vol. 40, No's. 3-4, pp. 798-803, 2009.
9. Khdeir, A.A. and Reddy, J.N. "Free and Forced Vibration of Cross-Ply Laminated Composite Shallow Arches", *Int. J. Solids Strc.*, Vol. 34, No. 10, pp. 1217-1234, 1997.
10. Matsunaga, H. "Free Vibration and Stability of Laminated Composite Circular Arches Subjected to Initial Axial Stress", *J. Sound Vib.*, Vol. 271, No's. 3-5, pp. 651-670, 2004.
11. Ahmed, K.M. "Free Vibration of Curved Sandwich Beams by the Method of Finite Elements", *J. Sound Vib.* Vol. 18, No. 1, pp. 61-74, 1971.

پیوست (الف):

محاسبه ماتریس‌های سفتی تیر خمیده

$$\mathbf{D}_{f \ 7 \times 7} = \sum_{k=1}^{NL} \begin{bmatrix} Q_1 \bar{H}_1 & Q_1 \bar{H}_3 & Q_{12} H_1 & Q_{12} H_3 & Q_1 \bar{H}_2 & Q_1 \bar{H}_4 & Q_{12} H_2 \\ Q_1 \bar{H}_3 & Q_1 \bar{H}_5 & Q_{12} H_3 & Q_{12} H_5 & Q_1 \bar{H}_4 & Q_1 \bar{H}_6 & Q_{12} H_4 \\ Q_2 H_1 & Q_2 H_3 & Q_{22} \hat{H}_1 & Q_{22} \hat{H}_3 & Q_2 H_2 & Q_2 H_4 & Q_{22} \hat{H}_2 \\ Q_2 H_3 & Q_2 H_5 & Q_{22} \hat{H}_3 & Q_{22} \hat{H}_5 & Q_2 H_4 & Q_2 H_6 & Q_{22} \hat{H}_4 \\ Q_1 \bar{H}_2 & Q_1 \bar{H}_4 & Q_{12} H_2 & Q_{12} H_4 & Q_1 \bar{H}_3 & Q_1 \bar{H}_5 & Q_{12} H_3 \\ Q_1 \bar{H}_4 & Q_1 \bar{H}_6 & Q_{12} H_4 & Q_{12} H_6 & Q_1 \bar{H}_5 & Q_1 \bar{H}_7 & Q_{12} H_5 \\ Q_2 H_2 & Q_2 H_4 & Q_{22} \hat{H}_2 & Q_{22} \hat{H}_4 & Q_2 H_3 & Q_2 H_5 & Q_{22} \hat{H}_3 \end{bmatrix}^k,$$

$$\mathbf{D}_s \ 7 \times 7 = \sum_{k=1}^{NL} \mathbf{Q}_{33} \begin{bmatrix} \bar{H}_1 & H_1 & \bar{H}_3 & H_3 & \bar{H}_2 & H_2 & \bar{H}_4 \\ & \hat{H}_1 & H_3 & \hat{H}_3 & H_2 & \hat{H}_2 & H_4 \\ & & \bar{H}_5 & H_5 & \bar{H}_4 & H_4 & \bar{H}_6 \\ & & & \hat{H}_5 & H_4 & \hat{H}_4 & H_6 \\ & & & & \bar{H}_3 & H_3 & \bar{H}_5 \\ & & & & & \hat{H}_3 & H_5 \\ & & & & & & \bar{H}_7 \end{bmatrix}^k.$$

sym.

پیوست (ب):

چند درایه‌ی ماتریس سفتی $\mathbf{K}_{8 \times 8}$ و ماتریس جرم $\mathbf{M}_{8 \times 8}$

$$K_{11} = \left(\frac{1}{R^2} D_{f11} + \frac{\gamma_0}{R^3} D_{f15} + \frac{\gamma_0}{R^3} D_{f51} + \frac{\gamma_0}{R^4} D_{f55} \right) (-\lambda^2)$$

$$+ \left(-\frac{1}{R^2} D_{s11} + \frac{\gamma_0}{R^2} D_{s12} - \frac{\gamma_0}{R^3} D_{s15} - \frac{\gamma_0}{R^3} D_{s51} + \frac{\gamma_0}{R^3} D_{s52} - \frac{\gamma_0}{R^4} D_{s55} + \frac{\gamma_0}{R^2} D_{s21} - \frac{\gamma_0}{R^2} D_{s22} + \frac{\gamma_0}{R^3} D_{s25} \right),$$

$$K_{24} = C_1 \left[\left(\frac{1}{R^2} D_{s15} \right) (-\lambda^2) + \left(-\frac{1}{R} D_{f13} - \frac{1}{R^2} D_{f15} \right) \right],$$

$$K_{65} = \left(-\frac{1}{R^2} D_{f22} - \frac{2}{R} D_{f72} - \frac{1}{R^2} D_{s33} + \frac{2}{R} D_{s36} \right) (-\lambda),$$

$$M_{11} = (\bar{I}_0 + \frac{2\gamma_0}{R} \bar{I}_1 + \frac{\gamma_0}{R^2} \bar{I}_2),$$

$$M_{31} = (\bar{I}_1 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_2),$$

$$M_{68} = \bar{I}_5.$$

که در این دو ماتریس، مؤلفه‌های H برای محاسبه‌ی نتیجه‌های تنش به صورت زیر هستند:

$$H_j = \int_{h_k}^{h_{k+1}} z^{j-1} dz = \frac{(h_{k+1}^j - h_k^j)}{j}, \quad j = 1, 2, \dots, 6,$$

$$\hat{H}_j = \int_{h_k}^{h_{k+1}} z^{j-1} (1 + \gamma_0 z / R) dz =$$

$$H_j + \gamma_0 \frac{1}{R} H_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, 6,$$

$$\bar{H}_j = \int_{h_k}^{h_{k+1}} \frac{z^{j-1}}{(1 + \gamma_0 z / R)} dz, \quad j = 1, 2, \dots, 7.$$