

حل تحلیلی- عددی خمش پلاستیک یک ورق فلزی روی بستر لاستیکی

محمود مهرآرا^۱ و محمدجواد ناطق^۲

دانشکده فنی و مهندسی

دانشگاه تربیت مدرس

(تاریخ دریافت: ۹۰/۰۲/۰۵؛ تاریخ پذیرش: ۹۱/۰۱/۱۷)

چکیده

خمش ورق فلزی روی بستر لاستیکی یکی از فرآیندهای نسبتاً جدید خمش پروفیل‌ها و ورق‌های نازک فلزی است که در سال‌های اخیر در حد وسیعی مورد توجه و استفاده قرار گرفته است. در این تحقیق، مسئله تغییر شکل پلاستیک ورق در این فرآیند تجزیه و تحلیل شده و پس از استخراج معادلات حاکم برای نواحی تغییر شکل ورق، سیر حل تحلیلی- عددی این معادلات تشریح شده است. در ادامه، معادلات برای یک مسئله خاص حل شده و منحنی اثر تغییرات عمق نفوذ در شعاع انحنای ورق ترسیم شده است. همچنین، رابطه‌ای تقریبی بین عمق نفوذ و شعاع انحنای ورق به دست آمده است. این رابطه ابزاری بسیار کارا در کنترل فرآیند است و با آن می‌توان با ایجاد تنظیمات لازم در عمق نفوذ، ورق را بدون سعی و خطا به قطر مطلوب رسانید. با انجام آزمایش‌های متعدد، خمش یک ورق فولادی نازک روی یک بستر لاستیکی، میزان اعتبار معادلات استخراج شده برای تغییر شکل پلاستیک ورق در این فرآیند مورد ارزیابی و تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: خمش، ورق، پلاستیک، بستر لاستیکی

Analytical- Numerical Solution of Plastic Bending of a Metal Sheet on Elastic Foundation

M. Mehrara and M.J. Nategh

Mech. Eng. Dep't.

Tarbiat Modarres Univ.

(Received: 25 April, 2010, Accepted: 5 April, 2011)

ABSTRACT

The sheet bending on elastic foundation is a relatively new method in recent years. In this work, the plastic deformation of sheet is studied. The governing differential equations for the sheet deformation zones were obtained. Then, the equations were analytically-numerically solved for a given problem and the effect of indentation depth on the sheet bending radius was studied. A relationship was obtained to correlate the indentation depth to the sheet bending radius. This relationship can be used in controlling the process and also in process planning. The results were verified by a set of experiments.

Keywords: Bending, Sheet, Plastic, Elastic Foundation

۱- دانشجوی دکتری: mdmehrara@gmail.com

۲- دانشیار (نویسنده پاسخگو): nategh@modares.ac.ir

۱- مقدمه

فرآیند خم کاری ورق نازک فلزی بر روی بستر لاستیکی در میان فرآیندهای خم کاری دوار غلتکی، روش نسبتاً جدیدی است که اخیراً برای خم کاری ورق‌های نازک فلزی ابداع شده و به دلیل دارا بودن قابلیت‌های بالا در خم کاری ورق‌های نازک نسبت به فرآیندهای سه و چهار غلتکی در سال‌های اخیر مورد توجه و استفاده وسیع قرار گرفته است.

یانگ و شیمای^۱ [۱]، یانگ^۲ و همکارانش [۲] و گاندهی و راوال^۳ [۳] خمش ورق در فرآیند خم کاری سه غلتکی را بررسی کرده‌اند. هیوا^۴ و همکارانش [۴]، هیوا و لین^۵ [۵] و لین و هیوا [۶] خمش ورق در فرآیند خم کاری چهار غلتکی را بررسی کرده‌اند. وولرتسن^۶ و همکارانش در مروری بر انواع روش‌های خمش پروفیل‌های فلزی، روش خم کاری بر روی بستر لاستیکی را معرفی و بدون ارائه هیچ‌گونه تحلیلی برای فرآیند، به اثر بعضی پارامترهای فرآیند از جمله عمق نفوذ غلتک در انحنا نهایی محصول اشاره کرده‌اند [۷]. کاون^۷ و همکارانش در سال ۲۰۰۱ خمش یک پروفیل آلومینیومی از جنس آلومینیوم AA6061-T6، را بر روی یک بستر لاستیکی مورد بررسی تجربی قرار داده و اثر میزان نفوذ غلتک شکل دهی را بر روی شعاع انحنا نهایی خمش محصول تعیین کردند [۸]. لی^۸ و همکارانش علاوه بر بررسی تجربی خمش یک پروفیل قوطی ساده از جنس آلومینیوم AA6061، بر روی بستر لاستیکی و تعیین نتایج آن، فرآیند را به روش اجزاء محدود شبیه‌سازی و نتایج دو روش را با یکدیگر مقایسه کرده‌اند [۹]. گیگر^۹ و همکارانش خمش ورق‌های به شکل U را با استفاده از یک سمبه صلب و ماتریس لاستیکی به روش المان‌های محدود (FEM) شبیه‌سازی کرده و مورد بررسی قرار دادند [۱۰]. ژنگ و لئونگ^{۱۰} خمش ورق V شکل را با کمک یک سمبه لاستیکی و یک قالب صلب طی یک تحقیق

تجربی مورد بررسی قرار دادند [۱۱]. رضانی و همکارانش فرآیند شکل‌دهی با ابزارهای لاستیکی را به روش المان محدود و تجربی مورد مطالعه قرار دادند [۱۲].

بررسی پیشینه تحقیقاتی که تاکنون در زمینه فرآیند خمش غلتکی ورق بر روی یک بستر لاستیکی منتشر شده است، نشان می‌دهد که تاکنون هیچ‌گونه تحلیل ریاضی برای خمش الاستیک-پلاستیک ورق در این فرآیند ارائه نشده است، بنابراین جای خالی تحقیقاتی در این زمینه کاملاً آشکار است. در این تحقیق، برای اولین بار، برای تحلیل کامل تغییر شکل الاستیک-پلاستیک ورق در این فرآیند، تحلیلی ریاضی ارائه شده و پس از استخراج معادله دیفرانسیل حاکم بر خمش پلاستیک ورق، به روش تحلیلی- عددی حل شده است.

۲- تئوری

این فرآیند به صورت شماتیک در شکل ۱ نشان داده شده است. در طی این فرآیند ورق نازک فلزی به ضخامت t به کمک یک غلتک فولادی بر روی یک بستر لاستیکی به ضخامت H که به شکل یک بستر تخت است، تا عمق نفوذ به میزان h فشرده می‌شود و در اثر این عمل توزیع باری مطابق با شکل ۲ که در راستای x یکنواخت است، بر روی ورق ایجاد و سبب تغییر شکل خمشی ورق می‌شود. با پیشروی بستر لاستیکی از یک سمت به سمت دیگر، تمامی طول ورق از بین غلتک و بستر لاستیکی عبور کرده و به صورت گرد شده از بین آن دو خارج می‌شود. در این فرآیند به جای بستر تخت، ممکن است یک غلتک فلزی با روکش لاستیکی استفاده شود. نسبت h/H در این فرآیند کوچک است و در نتیجه کرنش ایجاد شده در لاستیک در محدوده کرنش کوچک می‌باشد. در این شکل a ، b و v به ترتیب طول، عرض و خیز عمودی سطح میانی ورق و f نیروی وارد از جانب غلتک بر واحد عرض ورق می‌باشند. عکس‌العمل بستر نیز با $p_y^*(x)$ نشان داده می‌شود.

با فرض این که طول ورق به اندازه کافی بلند باشد و موقعیت اعمال نیروی تغییر شکل در جایی باشد که لبه‌های ورق بتواند از روی بستر جدا شود، با نفوذ غلتک به سمت بستر لاستیکی سه ناحیه تغییر شکل در ورق مطابق با آنچه در

- 1- Yang and Shima
- 2- Yang
- 3- Gandhi and Raval
- 4- Hua
- 5- Lin
- 6- Vollertsen
- 7- Kwon
- 8- Lee
- 9- Geiger
- 10- Zhang and Leong

به صورت فوق، شکل خواهد گرفت و در صورتی که غلتک شروع به چرخش کند و ورق از یک سمت به زیر غلتک وارد و از طرف دیگر خارج شود، نواحی تغییر شکل با آنچه در شکل فوق نشان داده شده است، کمی متفاوت خواهد بود و احتمالاً تقارن هم نخواهد داشت. در اینجا تغییر شکل ورق برای حالت اول، یعنی حالتی که غلتک ورق را فقط به سمت بستر نفوذ می‌دهد یا به عبارت دیگر اصطکاکی بین ورق و غلتک وجود ندارد، یعنی بین ورق و غلتک فقط لغزش وجود دارد نه غلتش، مورد بررسی و تحلیل قرار داده شده است. اگرچه برای انجام آزمایش خمش بر روی ورق به دلیل عدم امکان سنجش شعاع خمش در کار ورق، چاره‌ای جز چرخش غلتک و عبور ورق از بین غلتک و بستر لاستیکی وجود ندارد.

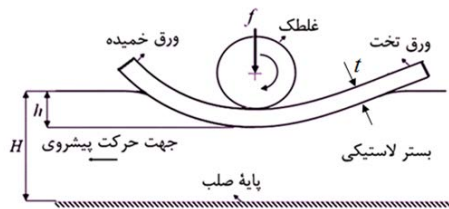
در این تحقیق، تحلیل کامل تغییر شکل پلاستیک و الاستیک ورق در فرآیند مورد توجه قرار گرفته است. در این راستا برای اولین بار دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر تغییر شکل الاستیک-پلاستیک ورق در این فرآیند استخراج شده است و به دلیل عدم امکان دستیابی به جواب دقیق و تحلیلی برای آن، دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم از طریق تحلیلی- عددی به روش اختلاف محدود (FDM) حل شده است. تحلیل کامل ارائه شده برای فرآیند خم کاری غلتکی بر روی بستر لاستیکی در این تحقیق کاملاً نو بوده و اولین کاری است که در تحلیل تغییر شکل پلاستیک ورق در این فرآیند ارائه می‌شود. اهمیت این تحلیل دستیابی به نتایجی است که عملاً می‌تواند به عنوان ابزاری برای پیش‌بینی قطر ورق در کنترل فرآیند به کار رود، بدون این که نیازی به سعی و خطا باشد که مستلزم صرف وقت و هزینه زیاد است. مدل کردن رفتار مکانیکی ورق و بستر و تعامل آنها با یکدیگر، سه قدم اساسی در تحلیل رفتار مکانیکی ورق در سیستم ورق-بستر است.

تئوری کلاسیک کروش در خمش ورقه‌ها یک تئوری کاملاً معتبر و پذیرفته شده در تحلیل خمش الاستیک ورق نازک است و معادلات این تئوری می‌تواند برای معادلات خمش ورق نازک برای ناحیه b مورد استفاده قرار گیرد [۱۷-۱۳]. معادلات خمش پلاستیک ورق در ناحیه c بستگی تام به مدل رفتاری ماده ورق دارد و با انتخاب مدلی خاص برای رفتار الاستیک-پلاستیک ورق، می‌توان معادلات آن را

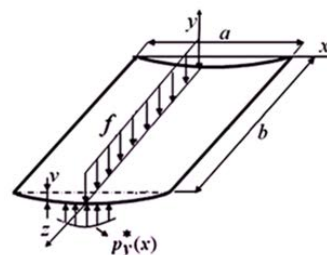
شکل ۳ نشان داده شده است، ایجاد می‌شود که عبارت است از:

ناحیه بدون تغییر شکل و آزاد (ناحیه a)،
ناحیه تغییر شکل الاستیک (ناحیه b) و
ناحیه تغییر شکل پلاستیک (ناحیه c).

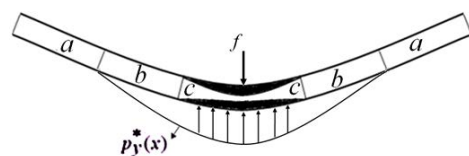
سطوح تیره رنگ واقع در ناحیه c نشان‌دهنده لایه‌ای از ورق است که به تسلیم رسیده است. در این حالت خیز ورق در دو طرف محل اعمال نیروی تغییر شکل متقارن خواهد بود.



شکل (۱): شکل شماتیک فرآیند خمش ورق بر روی یک بستر لاستیکی.



شکل (۲): توزیع بار بر روی ورق در فرآیند خمش ورق بر روی یک بستر لاستیکی.



شکل (۳): نواحی تغییر شکل ورق در فرآیند خمش ورق بر روی بستر لاستیکی.

در این فرآیند اگر جهت حرکت غلتک شکل‌دهی تنها به سمت عمود بر بستر لاستیکی باشد، نواحی تغییر شکل

می‌گیرند، پیشنهاد شده‌اند.

معادلات تعادل ورق به صورت زیر است [۱۷-۱۳]:

$$p_y(x) = \frac{dq}{dx} = \frac{d^2m}{dx^2}. \quad (1)$$

در معادله فوق، m ممان خمشی بر واحد عرض ورق، q نیروی برشی بر واحد عرض ورق و $p_y(x)$ بار عرضی وارد بر ورق است.

اگر مدلی مشابه مدل وینکلر که برای تعامل بسترهای از جنس خاک و گل استفاده می‌شود، برای مدل کردن تعامل بین ورق و بستر لاستیکی در سیستم ورق-بستر لاستیکی در این فرآیند انتخاب شود، در این صورت می‌توان فرض کرد که عکس‌العمل بستر لاستیکی بر روی ورق در تعامل بین ورق و بستر لاستیکی در این فرآیند براساس معادله زیر تعیین شود:

$$p_y^*(x) = -k v. \quad (2)$$

در این معادله، $p_y^*(x)$ عکس‌العمل بستر می‌باشد و k مدول بستر است که فشار مورد نیاز برای جابه‌جایی واحد سطح فوقانی بستر و بر حسب $(N/mm^2)(1/mm)$ تعریف می‌شود.

با تلفیق تئوری کلاسیک کروشف، تئوری خمش پلاستیک ورق، معادلات الاستیک خطی برای رفتار لاستیک و مدلی فرضی فوق برای تعامل ورق و بستر لاستیکی معادلات دیفرانسیل حاکم بر خمش پلاستیک ورق برای این فرآیند استخراج می‌شود که تبیین کننده تغییر شکل پلاستیک ورق در فرآیند است و برای اولین بار در تحلیل این فرآیند ارائه می‌شود.

۲-۱- معادله خمش ناحیه الاستیک ورق

معادلات حاکم برای خمش الاستیک استوانه‌ای ورق از تئوری کلاسیک خمش کروشف با فرض این که عکس‌العمل بستر تنها بار عرضی وارد بر ورق باشد، به صورت زیر خواهد بود [۱۷-۱۳]:

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{p_y^*(x)}{D}, \quad (3)$$

$$m(x) = D \frac{d^2v(x)}{dx^2}, \quad (4)$$

استخراج کرد. در این تحقیق، مدل رفتاری الاستیک-کاملاً پلاستیک ماده ورق برای استخراج معادلات خمش در ناحیه c استفاده شده است.

مطالعه رفتار ماده لاستیک‌ها در مبحث الاستومر که شاخه‌ای از علوم مهندسی پلیمر است، نشان می‌دهد که در علوم مهندسی پلیمر لاستیک‌ها را در زمره مواد با حد کشسانی^۱ بالا قرار داده‌اند و تئوری تبیین کننده رفتار مکانیکی آنها در محدوده کرنش بزرگ، تئوری فوق الاستیسیته^۲ است، ولی در محدوده تغییر شکل‌های کوچک رفتاری الاستیک و تقریباً خطی از خود نشان می‌دهند [۱۸]. در تئوری فوق الاستیسیته اثبات می‌شود که در محدوده کرنش کوچک معادلات فوق الاستیسیته تبدیل به معادلات شناخته شده الاستیسیته خطی^۳ می‌شود [۱۸]. همان‌طور که که در بالا اشاره شد، کرنش ایجاد شده در بستر لاستیکی در محدوده کرنش کوچک است، بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که رفتارهای تغییر شکلی بستر لاستیکی در این فرآیند را به کمک معادلات الاستیسیته خطی تحلیل کرد.

مبحث تئوری پی^۴ در مهندسی عمران به مسائل تغییر شکل الاستیک ورق‌ها بر روی پی الاستیک^۵ می‌پردازد. در این این مبحث مدل‌های متعدد یک، دو و سه پارامتری متعددی برای پیش‌بینی نحوه تعامل ورق و بستر الاستیک مطرح شده است که ساده‌ترین آنها مدل تک پارامتری وینکلر^۶ می‌باشد. این مدل بر فرض رفتار الاستیک خطی پی استوار است و فرض می‌شود که بستر از تعدادی فنر خطی عمودی که در مجاورت هم قرار گرفته و به صورت مستقل از هم در مقابل جابه‌جایی عمودی سطح فوقانی بستر مقاومت می‌کنند. در این مدل مقاومت بستر متناسب با تغییر شکل عمودی سطح فوقانی آن است [۱۷-۱۳]. البته این مدل‌ها نه برای کاربرد در تحلیل و مدل کردن فرآیندهای صنعتی مانند فرآیند مورد نظر، بلکه برای کاربردهای عمرانی و تحلیل تغییر شکل کف جاده‌هایی از جنس بتون مسلح، باند فرودگاه‌ها و باریکه‌های فونداسیون ساختمان‌ها که بر روی بستری از خاک و گل قرار

1 - Hyper Elastic Material

2 - Hyper-Elasticity

3 - Lineare-Lasticity

4 - Foundation Theory

5 - Elastic Foundation

6 - Winkler's Model

$$q(x) = D \frac{d^3 v_e(x)}{dx^3} = 2D \alpha^3 \left[e^{-\alpha x} \left((C_1 + C_2) \cdot \cos(\alpha \cdot x) + (C_2 - C_1) \cdot \sin(\alpha \cdot x) \right) + e^{\alpha x} \left((C_4 - C_3) \cos(\alpha \cdot x) - (C_3 + C_4) \cdot \sin(\alpha \cdot x) \right) \right], \quad (11)$$

$$p_z^*(x) = D \frac{d^4 v_e(x)}{dx^4} = -4D \alpha^4 \times \left[e^{-\alpha x} (C_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x)) + e^{\alpha x} (C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot x)) \right], \quad (12)$$

$$\alpha = (k/4D)^{1/4}. \quad (13)$$

در معادلات فوق، α پارامتر خمش است. ثابت‌های انتگرال‌گیری با استفاده از اعمال شرایط مرزی و حل معادلات به‌دست می‌آیند.

۲-۲- معادله حاکم بر خمش ناحیه پلاستیک ورق

در صورتی که میزان بار وارده بر ورق از حد الاستیک فراتر رود، یعنی تنش در نقاطی از ورق به حد تسلیم برسد، ماده رفتار پلاستیک از خود نشان می‌دهد. با فرض مدل رفتاری الاستیک-کاملاً پلاستیک برای ماده ورق (شکل ۴) و معیار تسلیم حداکثر تنش عمودی، توزیع تنش در ناحیه c به‌صورت نشان داده شده در شکل ۵ در می‌آید. در این شکل S_Y تنش تسلیم، σ تنش مهندسی، ε کرنش مهندسی، m ممان خمشی و t_{el} ضخامت لایه الاستیک در ورق می‌باشند. مقدار شعاع خمش ورق ρ که به ازای آن ضخامت لایه الاستیک باقی‌مانده ورق به t_{el} برسد، از رابطه زیر به‌دست می‌آید [۱۹-۲۱]:

$$\rho = \frac{t_{el} E_S}{2S_Y (1-\nu^2)}. \quad (14)$$

در این معادله، E_S مدول الاستیسیته و ν ضریب پواسون ورق فلزی است.

ممان خمشی مورد نیاز برای رساندن ضخامت لایه الاستیک ورق به مقدار t_{el} ، با استفاده از معادله تعادل زیر تعیین می‌شود [۱۹-۲۱]:

$$m = \int_{-t_{el}/2}^{t_{el}/2} -\sigma_x y dy + 2 \int_{t_{el}/2}^{t/2} S_Y y dy. \quad (15)$$

$$q(x) = D \frac{d^3 v(x)}{dx^3}, \quad (5)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (6)$$

در رابطه‌های فوق، D سفتی خمشی، E مدول الاستیسیته، t ضخامت ورق و ν ضریب پواسون ورق می‌باشند.

با قرار دادن عکس‌العمل بستر از رابطه (۲) به جای $p_y^*(x)$ در معادله (۳)، معادله زیر که معادله دیفرانسیل حاکم بر خمش الاستیک ورق برای ناحیه b است، به‌صورت زیر استخراج می‌شود:

$$\frac{d^4 v_e(x)}{dx^4} + \frac{k}{D} v_e(x) = 0. \quad (7)$$

در این رابطه، v_e خیز ورق در ناحیه الاستیک b است. با حل معادله فوق جواب عمومی زیر برای این معادله به‌دست می‌آید:

$$v_e(x) = \left[e^{-\alpha x} (C_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x)) + e^{\alpha x} (C_3 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + C_4 \cdot \sin(\alpha \cdot x)) \right] \quad (8)$$

در معادله فوق، C_1 تا C_4 ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. از معادله فوق، معادلات شیب، ممان خمشی، نیروی برشی و بار عرضی ورق تحت خمش الاستیک به‌ترتیب از معادلات زیر تعیین می‌شوند:

$$\frac{d}{dx} v_e(x) = \alpha e^{-\alpha x} \left((-C_1 + C_2) \cdot \cos(\alpha \cdot x) - (C_1 + C_2) \cdot \sin(\alpha \cdot x) \right) + e^{\alpha x} \left((C_3 + C_4) \cdot \cos(\alpha \cdot x) - (C_3 - C_4) \cdot \sin(\alpha \cdot x) \right), \quad (9)$$

$$m(x) = D \frac{d^2 v_e(x)}{dx^2} = 2D \alpha^2 \left[e^{-\alpha x} (C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x)) - e^{\alpha x} (C_3 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - C_4 \cdot \cos(\alpha \cdot x)) \right], \quad (10)$$

(۱) تعادل ورق، به دست می‌آید:

$$p_y(x) = \frac{2 S_y^3 (1-\nu^2)^2}{E^2} \times \left[\left(-\left(\frac{d^3 v_p(x)}{dx^3} \right)^2 \right) / \left(\left(\frac{d^2 v_p(x)}{dx^2} \right)^4 \right) + \left(\left(\frac{d^4 v_p(x)}{dx^4} \right) \right) / \left(3 \left(\frac{d^2 v_p(x)}{dx^2} \right)^3 \right) \right] \quad (18)$$

با فرض این که برای هر یک از نیمه‌های راست یا چپ ورق تنها توزیع بار عرضی وارد بر ورق همان عکس‌العمل بستر است، می‌توان نوشت:

$$p_y(x) = p_y^*(x). \quad (19)$$

با قرار دادن $-k v$ از رابطه (۲) به جای $p_y^*(x)$ در رابطه فوق و نتیجه آن در رابطه (۱۶)، معادله زیر استخراج می‌شود:

$$\left(\frac{d^4 v_p(x)}{dx^4} \right) \left(\frac{d^2 v_p(x)}{dx^2} \right) - 3 \left(\frac{d^3 v_p(x)}{dx^3} \right)^2 + \frac{3 E_R E_S^2}{2 S_y^3 H (1-\nu^2)^2} \left(\frac{d^2 v_p(x)}{dx^2} \right)^4 v_p(x) = 0. \quad (20)$$

معادله فوق، معادله دیفرانسیل حاکم بر خمش الاستیک - پلاستیک ورق بر روی بستر لاستیکی است که برای خمش ورق در ناحیه c استخراج شده است. بنابراین معادلات دیفرانسیل حاکم بر فرآیند را با استفاده از معادلات (۲۰ و ۷) به صورت زیر می‌توان خلاصه کرد:

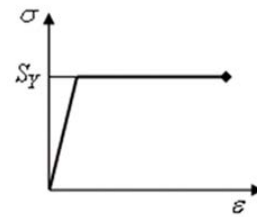
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4 v_e(x)}{dx^4} + \frac{k}{D} v_e(x) = 0 \quad : x \in b \\ \left(\frac{d^4 v_p(x)}{dx^4} \right) \left(\frac{d^2 v_p(x)}{dx^2} \right) - 3 \left(\frac{d^3 v_p(x)}{dx^3} \right)^2 + \frac{3 E_R E_S^2}{2 S_y^3 H (1-\nu^2)^2} \left(\frac{d^2 v_p(x)}{dx^2} \right)^4 v_p(x) = 0. \quad : x \in c \end{array} \right. \quad (21)$$

اگرچه معادلات فوق هر یک در محدوده جداگانه‌ای باید حل شوند، ولی در مرز نواحی b و c شرایط مرزی مشترکی دارند که در هنگام حل معادلات دو ناحیه به ازای هر عمق نفوذ معین، پارامترهای مشترک دارای مقادیر یکسان باشند و در جواب‌های این معادلات صدق کنند. معادلات دیفرانسیل

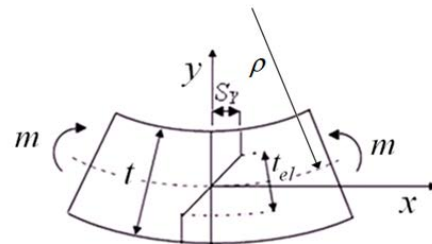
با انتگرال‌گیری از معادله فوق و قرار دادن t_{el} از معادله (۱۴) و $(d^2 v_p / dx^2)$ به جای ρ ، معادله ممان خمشی به شکل زیر در می‌آید [۱۹-۲۱]:

$$m = \frac{S_y t^2}{4} - \frac{S_y^3 (1-\nu^2)^2}{3 E^2 (d^2 v_p / dx^2)^2}. \quad (16)$$

در این معادله، v_p خیز ورق در ناحیه پلاستیک c می‌باشد.



شکل (۴): رفتار الاستیک-کاملاً پلاستیک برای ماده ورق فلزی.



شکل (۵): توزیع تنش در خمش ورقی که بخشی از مقطع آن به حد تسلیم رسیده است.

برای استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم در ناحیه c ، ابتدا باید از معادله فوق مشتق گرفته و در معادله تعادل ورق قرار داد. مشتق دوم ممان خمشی از رابطه فوق به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d^2 m}{dx^2} = \frac{2 S_y^3 (1-\nu^2)^2}{E^2} \times \left[\left(-\left(\frac{d^3 v_p(x)}{dx^3} \right)^2 \right) / \left(\left(\frac{d^2 v_p(x)}{dx^2} \right)^4 \right) + \left(\left(\frac{d^4 v_p(x)}{dx^4} \right) \right) / \left(3 \left(\frac{d^2 v_p(x)}{dx^2} \right)^3 \right) \right] \quad (17)$$

با قرار دادن مشتق دوم ممان خمشی از رابطه (۱۷) در معادله

صفر است و مشتق دوم آن در مرز تسلیم (مرز بین نواحی b و c)، که با مشتق دوم خیز ورق در این نقطه برای ناحیه الاستیک برابر و مشترک است، به دست می‌آید. این در حالی است که برای حل این معادله حداقل چهار شرط مرزی مورد نیاز است و علاوه بر این باید موقعیت مرز تسلیم معلوم باشد؛ در نتیجه، مسئله به صورت مستقیم و حتی به روش عددی به طور مستقل از معادله ناحیه b قابل حل نیست. بنابراین علاوه بر این که باید معادلات را به روش عددی روش حل عددی کرد، معادلات دو ناحیه الاستیک و پلاستیک باید هم‌زمان با هم حل شوند تا با پارامترهای مشترک دو ناحیه، کسری معلومات معادلات را جبران کرد و به ناچار باید از روش سعی و خطا در حل مسئله و تعیین مجهولات آن استفاده کرد.

معمولاً در فرآیند خمش، عمق نفوذ ورق پارامتر ورودی کنترل کننده شعاع خمش ورق است، یعنی با کنترل عمق نفوذ می‌توان به قطر دلخواه محصول رسید. به ازای هر عمق نفوذ، تنها یک مقدار برای موقعیت مرز تسلیم، X_{el} ، وجود دارد و در اینجا به دلیل اینکه این پارامتر برای دو ناحیه مشترک است، X_{el} به جای عمق نفوذ به عنوان پارامتر ورودی در نظر گرفته شده و حل مسئله با پارامتر ورودی X_{el} و حل معادله ناحیه b شروع می‌شود. ابتدا یک مقدار معینی برای موقعیت نقطه جدایی ورق از لاستیک، X_s ، فرض می‌شود. با این فرض معادله این ناحیه به صورت تحلیلی حل می‌شود و شرایط مرزی در مرز تسلیم معلوم می‌شود. با استفاده از مقدار به دست آمده از حل ناحیه b برای مشتق اول و سوم خیز در مرز تسلیم برای ناحیه c و شیب خیز در مرکز ورق و مشتق دوم آن در مرز تسلیم که از قبل معلوم بود، جمعاً چهار شرط مرزی معلوم را تشکیل می‌دهند و همچنین با در نظر گرفتن مقدار فرضی برای X_{el} ، معادله ناحیه c به صورت عددی حل می‌شود. پس از حل معادلات، مقدار به دست آمده برای خیز ورق در مرز تسلیم حاصل از حل تحلیلی ناحیه b با مقدار مشابه ناشی از حل عددی ناحیه c با یکدیگر مقایسه می‌شوند. در صورتی که اختلاف آنها در حد قابل قبول باشد، در این صورت مسئله حل شده است و نقطه انتخاب شده برای X_s به ازای X_{el} ، درست می‌باشد و اگر این اختلاف زیاد باشد، مقدار

فوق معادلات دیفرانسیل حاکم بر خمش الاستیک - پلاستیک ورق در این فرآیند می‌باشند که استخراج آنها از دستاوردهای این تحقیق بوده و برای اولین بار برای تحلیل ریاضی خمش پلاستیک ورق در این فرآیند استخراج شده است. به دلیل عدم امکان دستیابی به جواب دقیق و تحلیلی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل فوق، این دستگاه از طریق تحلیلی - عددی به روش اختلاف محدود (FDM) حل شده است.

۲-۳- حل معادلات

معادله (۸) جواب عمومی معادله دیفرانسیل حاکم بر ناحیه b است و در اینجا تنها باید مقادیر ثابت‌های انتگرال گیری براساس شرایط مرزی تعیین شوند. برای یافتن ثابت‌های معادله جواب، تنها چهار شرط مرزی در اختیار است که عبارت است از: مشتق دوم معادله خیز در مرز تسلیم (فصل مشترک نواحی الاستیک و پلاستیک ورق)، X_{el} ، که با استفاده از مقدار ممان خمشی ورق در این موقعیت که با ممان خمشی آستانه تسلیم ورق برابر است، به دست می‌آید و مشتقات دوم، سوم و چهارم آن در نقطه جدا شدن ورق از روی لاستیک، X_s ، که مقدار آنها در آن نقطه به دلیل صفر بودن مقادیر ممان خمشی، نیروی برشی و بار عرضی، برابر با صفر است. از طرفی، مجهولات آن شش عدد می‌باشند که عبارت است از: موقعیت نقطه مرز تسلیم (مرز بین نواحی b و c) و موقعیت جدا شدن ورق از بستر و چهار ثابت انتگرال گیری C_1 تا C_4 ، در نتیجه این مجهولات را به طور مستقل از ناحیه c نمی‌توان تعیین کرد.

معادله دیفرانسیل ناحیه پلاستیک c یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه چهارم غیرخطی از درجه چهار است. حل این معادله حتی با کمک نرم‌افزارهای ریاضی به صورت تحلیلی میسر نمی‌شود و منجر به جواب دقیق نمی‌شود. بنابراین برای حل آن راهی جز حل عددی باقی نمی‌ماند و در اینجا از روش عددی اختلاف محدود (FDM) برای حل آن استفاده می‌شود. شرایط مرزی معلوم برای حل این معادله سه عدد می‌باشند که عبارت است از: مقدار خیز در مرکز ورق (پارامتر ورودی مسئله که همان عمق نفوذ h است) و شیب ورق در همان نقطه که به دلیل تقارن برابر با



شکل (۷): تصویر نمونه‌های ورق‌های فولادی قبل از فرآیند.



شکل (۸): تصویر نمونه ورق فولادی به ضخامت ۱ میلی‌متر پس از فرآیند.

برای بریدن نمونه‌های ورق از فرآیند برش با جت آب و ذرات ساینده استفاده شده است. بریدن ورق با دستگاه قیچی ورق، به‌ویژه در برش‌های باریک، به دلیل زاویه‌دار بودن لبه برنده قیچی، سبب ایجاد خمش پلاستیک در ورق می‌شود که در اینجا برای پیشگیری از این پدیده در نمونه‌های آزمایش که در نتایج آزمایش به شدت می‌توان اثرگذار باشد، از فرآیند برش با جت آب و ذرات ساینده استفاده شده است.

۳-۱- تجهیزات آزمایش^۱

تجهیزات آزمایش شامل ماشین فرز عمودی Deckel-FP4M، بستر لاستیکی تخت، ورق نازک فلزی، پایه نگه‌دارنده غلتک‌ها، محور مرکزی غلتک‌ها، غلتک‌ها و ساعت اندیکاتور با پایه مغناطیسی است. این تجهیزات در شکل ۹ مشاهده می‌شوند. در این شکل، نمایی از یک دستگاه فرز (۱) در وضعیت عمودی مشاهده می‌شود. بر روی میز ماشین یک ورق فلزی (۲) بر روی یک بستر لاستیکی تخت (۳) قرار گرفته است، سطح زیرین بستر لاستیکی به یک ورق فلزی ضخیم که صلب در نظر گرفته می‌شود، چسبیده است. دنباله استوانه‌ای پایه نگه‌دارنده غلتک‌ها (۴) درون ابزارگیر (۵)

X_3 تغییر داده می‌شود و سیر حل عددی تکرار می‌شود تا اینکه نهایتاً این اختلاف به حد ناچیز و قابل قبول برسد. پس از این مرحله، مقدار عمق نفوذ و انحناى ورق که به ترتیب همان خیز و مشتق دوم خیز ورق در مرکز ورق هستند، تعیین می‌شوند و با تعیین این مقادیر، حل مسئله که تعیین حداکثر انحناى خمش ورق به ازای عمق نفوذ معین است، پایان می‌یابد. با تکرار حل مسئله به ازای مقادیر مختلف X_{el} ، می‌توان منحنی "عمق نفوذ- شعاع تحت خمش ورق" را برای مسئله مورد نظر که در مرکز ورق اتفاق می‌افتد، استخراج کرد.

۳- آزمایش‌ها

بستر لاستیکی در این آزمایش، قطعه‌ای به شکل مکعب مستطیل از جنس لاستیک پلی یورتان است که بر روی یک صفحه فولادی چسبانده شده است. در این آزمایش یک بستر لاستیکی از جنس لاستیک پلی یورتان استفاده شده است که در شکل ۶ مشاهده می‌شود. ماده لاستیک از ورق‌های تختال موجود در بازار تهیه شده و پس از ماشین‌کاری به یک صفحه فولادی چسبانده شده‌اند. برای حصول دقت بیشتر هندسی سطح بستر و دستیابی به دقت بالاتر در نتایج آزمایش، پس از چسباندن لاستیک بر روی صفحه فولادی، سطح فوقانی آن بر روی یک ماشین سنگ تخت سنگ زده شده و دقت تختی آن به مقداری کمتر از 0.01 میلی‌متر رسانده شده است. ورق مورد استفاده در این آزمایش که تحت فرآیند خمش پلاستیک قرار گرفته است، فولادی مستطیلی و به ضخامت ۱ میلی‌متر می‌باشد. نمونه ورق فولادی قبل از فرآیند خمش بر روی بستر لاستیکی در شکل ۷ و بعد از انجام فرآیند در شکل ۸ مشاهده می‌شود.



شکل (۶): تصویر بستر لاستیکی.

ابزارگیر قابل ملاحظه است، نمی‌توان چنین فرضی را دقیق دانست و بنابراین به دلیل وجود خاصیت الاستیک در اجزاء ماشین، مقداری تغییر شکل در اجزاء ماشین ایجاد می‌شود که در مقدار نشان داده شده در طوق مدرج ماشین لحاظ نمی‌شود و منشأ خطا می‌باشد. برای حذف اثر این خطا در آزمایش، یک عدد ساعت اندیکاتور Mitotoyo با کوچک‌ترین تقسیم‌بندی ۰/۰۱ میلی‌متر به صورتی که در شکل نشان داده شده است، بر روی پایه نگه‌دارنده غلتک‌ها نصب می‌شود تا مقدار واقعی عمق نفوذ در هر آزمایش معلوم شود.

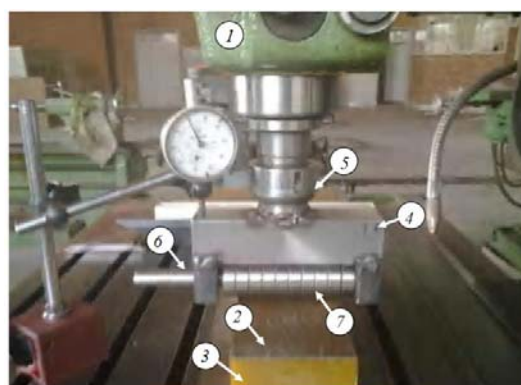
۳-۲- شرایط آزمایش

مشخصات پارامترهای اصلی آزمایش به شرح زیر است: در این آزمایش از نمونه ورق فولادی با پهنای ۱۰۰ میلی‌متر، به ضخامت ۱ میلی‌متر استفاده شده است. از مواد اولیه ورق یک عدد نمونه تست کشش براساس استاندارد ASTM-E 8M مطابق با شکل ۱۰ تهیه و مورد آزمایش تست کشش قرار گرفت. تست کشش نمونه ورق فولادی با استفاده از یک دستگاه مخصوص تست کشش مدل INSTRON-5500R انجام شد. منحنی تنش- کرنش مهندسی به دست آمده برای نمونه ورق در شکل ۱۱ نشان داده شده است. با استفاده از نتایج تست کشش نمونه فوق مقدار تنش تسلیم ۱۸۰ مگاپاسکال به دست آمد.

بستر لاستیکی از جنس پلی یورتان به ابعاد $98 \times 50 \times 250$ میلی‌متر است. نمونه تست کشش از ماده این لاستیک براساس استاندارد ASTM-D 412 مطابق شکل ۱۲ تهیه و مورد آزمایش تست کشش قرار گرفت. تصویر نمونه تست کشش تهیه شده از لاستیک بستر در شکل ۱۳ مشاهده می‌شود.

آزمایش تست کشش بر روی دستگاه مخصوص تست کشش مدل INSTRON-5500R انجام شده است (شکل ۱۴). منحنی تنش- کرنش مهندسی به دست آمده برای ماده لاستیک مورد استفاده در بستر در شکل ۱۵ نشان داده شده است. برای محدوده کرنش کوچک که در این آزمایش استفاده شده است، مدول الاستیسیته لاستیک که از آزمایش تست کشش به دست آمده است، 16 MPa می‌باشد.

محکم بسته شده است. یک میله استوانه‌ای دقیق (۶) نقش محور چرخش غلتک‌ها را به عهده دارد. در این آزمایش تعداد یازده بلبرینگ ساده (۷) بر روی محور مرکزی تعبیه شده‌اند که نقش غلتک‌های شکل‌دهی در این فرآیند را ایفاء می‌کنند و به گونه‌ای نصب شده‌اند که پوسته خارجی آنها نسبت به پوسته داخلی با اصطکاک ناچیز غلتشی امکان چرخش را دارند.



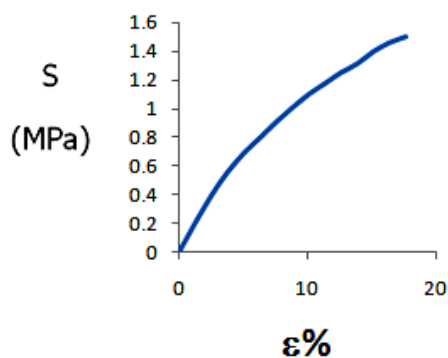
شکل (۹): تجهیزات آزمایش خمش ورق بر روی بستر لاستیکی.

مجموعه پایه نگه‌دارنده غلتک‌ها طوری ساخته شده است که محور مرکزی در وضعیتی کاملاً موازی نسبت به سطح بستر لاستیکی قرار دارد و در نتیجه خط تماس ورق با غلتک‌ها با دقت کافی با سطح بستر لاستیکی موازی هستند. با پیشروی ابزارگیر به سمت میز ماشین که مقدار آن از روی طوق مدرج حرکت عمودی ماشین قابل رؤیت است، به همان میزان غلتک‌ها به سمت ورق حرکت کرده و ورق را به سمت بستر لاستیکی می‌راند و بدین طریق باردهی برای رسیدن به عمق نفوذ مورد نظر، در این آزمایش محقق می‌شود. مقدار پیشروی ابزار و در نتیجه غلتک‌ها به سمت ورق در طوق مدرج باردهی محور عمودی ماشین قابل رؤیت است.

این مقدار از طریق اندازه‌گیری غیر مستقیم یعنی چرخش نسبی بین میله و پیچ راهنمای عمودی ماشین تعیین می‌شود و در حالت ایده‌آل و نیروی باردهی کم، مقدار آن را می‌توان با مقدار جابه‌جایی نوک ابزارگیر نسبت به سطح میز ماشین تقریباً برابر تلقی کرد ولی به دلیل این که در این فرآیند مقدار نیروی وارد شده به



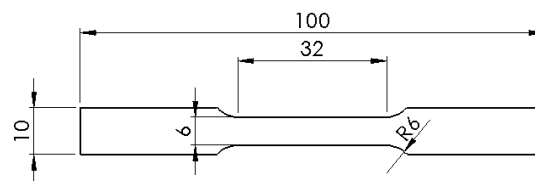
شکل (۱۴): نمونه تست کشش لاستیکی در حال تست بر روی دستگاه تست کشش INSTRON-5500R.



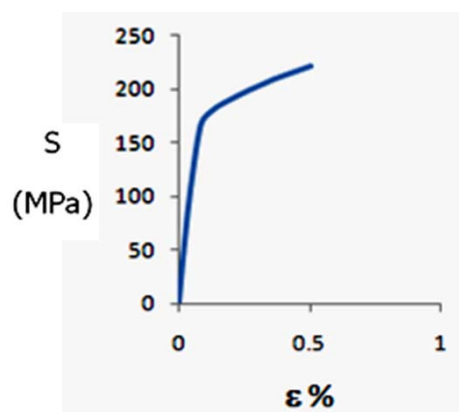
شکل (۱۵): منحنی تنش- کرنش مهندسی ماده بستر لاستیکی.

۳-۳- نحوه آزمایش

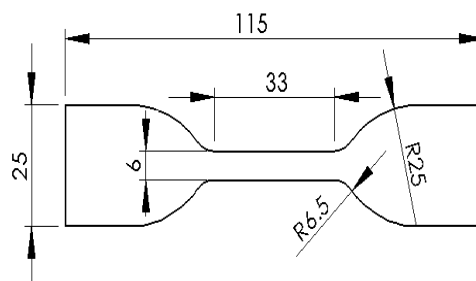
در طی این آزمایش رابطه بین عمق نفوذ ورق و حداکثر شعاع خمش ورق مورد بررسی قرار می‌گیرد. با آغاز نفوذ ورق به سمت بستر لاستیکی، ابتدا ورق دچار تغییر شکل الاستیک می‌شود و به تدریج مقدار این تغییر شکل افزایش می‌یابد و با رسیدن آن به مقدار عمق نفوذ آستانه تسلیم، تغییر شکل پلاستیک ورق آغاز می‌شود. با افزایش مقدار عمق نفوذ، حداکثر انحنای خمش افزایش (حداقل شعاع خمش ورق کاهش) می‌یابد. برای تعیین رابطه عمق نفوذ و شعاع خمش، ابتدا باید با استفاده از دستگیره باردهی محور عمودی ماشین غلتک شکل‌دهی را به عمق نفوذ مورد نظر رسانید و سپس شعاع خمش را اندازه‌گیری و ثبت کرد، اما عملاً این کار



شکل (۱۰): نقشه نمونه تست کشش استاندارد ASTM- E 8M قطعات فلزی.



شکل (۱۱): منحنی تنش- کرنش مهندسی ورق مورد آزمایش.



شکل (۱۲): نقشه نمونه تست کشش استاندارد ASTM- D 412 برای قطعات لاستیکی.



شکل (۱۳): تصویر نمونه تست کشش ماده لاستیکی بستر.

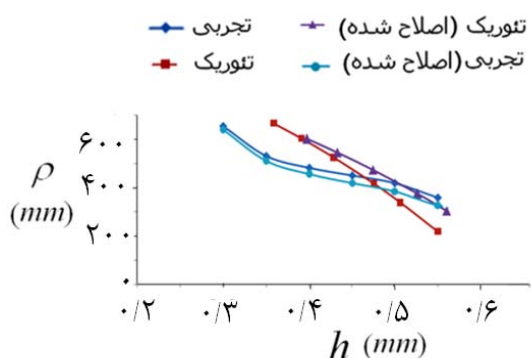
ورودی‌های معین زیر انجام شده، تشریح شده است:

$$E_R = 16 \text{ MPa}, E_S = 200 \text{ GPa},$$

$$S_Y = 165 \text{ MPa}, t = 1 \text{ mm},$$

$$H = 50 \text{ mm}, \nu = 0.3.$$

شکل ۱۷ تغییرات شعاع انحنای تحت خمش ورق را که در مرکز ورق ایجاد می‌شود، با تغییر در مقدار عمق نفوذ نشان می‌دهد. در این شکل چهار دسته از نقاط مشاهده می‌شوند. سری نقاط (مربع) مربوط به نتایج تئوریک حاصل از حل عددی معادلات استخراج شده برای فرآیند است که با منحنی با رنگ قرمز به یکدیگر وصل شده‌اند. این منحنی با در نظر گرفتن تنش تسلیم ثابت ۱۶۵ مگاپاسکال در طی فرآیند به دست آمده است که مبتنی بر فرض رفتار الاستیک-کاملاً پلاستیک ماده ورق برای استخراج معادله دیفرانسیل حاکم است. سری نقاط (لوزی) مربوط به نتایج تجربی حاصل از آزمایش هستند که با منحنی به رنگ آبی تیره به یکدیگر وصل شده‌اند. این نقاط با قرار دادن تنش تسلیم ثابت ۱۶۵ مگاپاسکال ناشی از فرض اولیه و مقادیر شعاع نهایی ورق پس از حذف خمش، در معادله (۲۲) به دست آمده‌اند. سری نقاط (مثلث) که با منحنی به رنگ بنفش به یکدیگر وصل شده‌اند، منحنی اصلاح شده تئوریک است که با در نظر گرفتن اثر افزایش تنش تسلیم (تنش سیلان) به دست آمده است. سری نقاط (گرد) که با منحنی به رنگ آبی روشن به یکدیگر وصل شده‌اند، منحنی اصلاح شده تجربی است که با در نظر گرفتن اثر افزایش تنش تسلیم (تنش سیلان) در معادله (۲۲) برای به دست آوردن شعاع تحت خمش ورق، حاصل شده است.



شکل (۱۷): تغییرات شعاع انحنای تحت خمش ورق با تغییر در مقدار عمق نفوذ.

امکان‌پذیر نیست. زیرا در حین اعمال نیرو بر روی ورق امکان اندازه‌گیری شعاع تحت خمش ورق به صورت مستقیم وجود ندارد و پس از برداشتن بار نیز به دلیل خاصیت برگشت فنری، مقداری از انحنای ایجاد شده در ورق برگشت کرده و در نتیجه شعاع انحنای پس از برداشتن بار از روی آن بزرگ‌تر از مقدار شعاع انحنای تحت خمش است. بنابراین تعیین شعاع انحنای ورق تحت خمش، به صورت مستقیم امکان‌پذیر نیست، ولی برای تعیین آن با اندازه‌گیری شعاع انحنای نهایی ورق (شعاع انحنای ورق پس از حذف ممان خمشی) و با استفاده از رابطه مربوط به برگشت فنری ورق (معادله ۲۲)، می‌توان به صورت غیر مستقیم آن را تعیین کرد. معادله زیر، رابطه بین شعاع خمش نهایی و شعاع تحت خمش ورق را برای یک ورق فلزی با معادله رفتاری الاستیک-کاملاً پلاستیک نشان می‌دهد [۱۷-۱۹].

$$\frac{\rho}{\rho_f} = 1 + 4 \left(\frac{S_Y \rho (1 - \nu^2)}{E t} \right)^3 - 3 \left(\frac{S_Y \rho (1 - \nu^2)}{E t} \right) \quad (15)$$

در معادله فوق، ρ شعاع تحت خمش ورق و ρ_f شعاع نهایی پس از حذف ممان خمشی از روی آن است.

با استفاده از ابزار اندازه‌گیری مخصوص عمق‌سنج مجهز به ساعت اندیکاتور با کوچک‌ترین تقسیم‌بندی ۰/۰۱ میلی‌متر و به روشی که در شکل ۱۶ نشان داده شده است، شعاع خمش ورق پس از خروج از زیر غلتک شکل به صورت غیرمستقیم اندازه‌گیری می‌شود.



شکل (۱۶): نحوه اندازه‌گیری شعاع خمش نهایی ورق.

۴- تجزیه و تحلیل نتایج

در اینجا نتایج حل کامل عددی معادلات خمش پلاستیک ورق بر روی بستر لاستیکی را که برای یک فرآیند خمش با

شعاع خمش تحت خمش ورق مربوط می‌شود. با عنایت به توضیحات و تحلیلی که در ذیل ارائه شده است، روشن خواهد شد که این اختلاف به‌غیر از مدل کردن و فرمولاسیون استخراج شده برای مسئله، به منابع دیگری نیز مربوط می‌شود که در اینجا بعضی از آنها سهم عمده‌ای را نیز به‌خود اختصاص می‌دهند. این موارد عبارت‌اند از: تفاوت رفتار واقعی ماده ورق با رفتار فرضی که مبنای استخراج معادلات مسئله و فرمولاسیون آن واقع شده است، تعیین غیر مستقیم شعاع تحت خمش ورق به‌دلیل عدم امکان اندازه‌گیری مستقیم و تأثیرپذیری از پدیده برگشت فنری ورق، دقت در انجام آزمایش و اندازه‌گیری پارامترهای مؤثر در نتایج آزمایش. در اینجا با بررسی میزان اثر این عوامل در محدوده آزمایش انجام شده و حذف مقادیر اختلاف ناشی از این عوامل، دقت فرمولاسیون بررسی می‌شود.

ماده ورق مورد آزمایش دارای خاصیت کرنش سختی می‌باشد و این با رفتار فرضی که مبنای استخراج معادلات مسئله و فرمولاسیون آن واقع شده است، متفاوت می‌باشد. این محدودیت به‌دلیل عدم دسترسی به ورقی با جنس مطابق با مدل انتخابی (بدون خاصیت کار سختی) ایجاد شده است و به‌ناچار در نقش یک عامل مداخله‌کننده در نتایج، دخالت کرده است. این دخالت از دو ناحیه است: اول این که به‌دلیل استفاده از تنش تسلیم ثابت کوچک‌تر از مقدار واقعی (تنش سیلان) ورق در معادلات استخراج شده، منحنی شعاع تحت خمش ورق ناشی از حل تئوریک تغییر کرده و جابه‌جا می‌شود و دوم این که چون به‌صورت مستقیم تعیین شعاع تحت خمش ورق در حین فرآیند خمش امکان‌پذیر نیست و این پارامتر باید از طریق غیر مستقیم و از روی شعاع خمش نهایی و با استفاده از رابطه ریاضی که به برگشت فنری مربوط می‌شود، تعیین شود، استفاده از تنش تسلیم ثابت کوچک‌تر از مقدار واقعی (تنش سیلان) در این روابط سبب ایجاد تغییر در شکل منحنی شعاع خمش و جابه‌جایی آن می‌شود. برای ارزیابی میزان اثرگذاری این عوامل در نتایج آزمایش، منحنی تئوریک اصلاح شده و منحنی تجربی اصلاح شده (شکل ۱۷) به‌دست آمده و ترسیم شده‌اند تا اختلافی که به‌دقت مدل استخراجی و فرمولاسیون مسئله مربوط است، تا حدودی از اختلاف مربوط به عوامل فوق جدا و حدود تقریبی آن تعیین

بررسی منحنی تئوریک نشان می‌دهد که رابطه بین شعاع خمش تحت خمش ورق و عمق نفوذ را می‌توان با دقت نسبتاً خوبی با تقریب خطی نشان داد. این رابطه برای مثال حل شده $\rho = (-2340 \times h + 1518)$ است و خط تقریب زده شده در شکل مشاهده می‌شود. این رابطه بسیار با اهمیت است و اهمیت آن از این جهت است که می‌توان آن را به‌عنوان ابزاری قوی در پیش‌بینی فرآیند مورد استفاده قرار داد. در دست داشتن چنین رابطه‌ای این امکان را فراهم می‌سازد که بدون حل پیچیده معادلات دیفرانسیل حاکم بر فرآیند و بدون نیاز به سطح دانش و مهارت بالا برای استفاده‌کننده، با استفاده از یک رابطه بسیار ساده، عمق نفوذ لازم برای رسیدن به قطر مطلوب ورق را محاسبه کرده و در کنترل فرآیند مورد استفاده قرار داد. با پیش‌بینی عمق نفوذ قبل از عملیات خمش و تنظیم آن بر روی ماشین خم‌کاری می‌توان در عملیات خم‌کاری بدون انجام سعی و خطا، به ورق خمیده با قطر مطلوب دست یافت. تعیین‌کننده مقدار ثابت‌های این معادله تقریبی، پارامترهای فرآیند هستند که پس از جایگذاری در معادلات خمش پلاستیک و تکرار روند حل عددی برای شرایط خاص تعیین می‌شوند.

مقایسه نتایج تجربی و تئوریک نشان می‌دهد عمق نفوذ آستانه تسلیم تجربی ۱۶٪ کوچک‌تر از مقدار تئوریک آن است. این امر کاملاً طبیعی و مورد انتظار بوده است. زیرا در مدل انتخابی (مدل وینکلر) المان‌های بستر الاستیک مستقل از هم فرض می‌شوند، درحالی‌که در عمل اجزاء بستر لاستیکی که المان‌هایی عمودی و مجاور یکدیگرند و به یکدیگر چسبیده‌اند برای تغییر شکل و جمع شدن که در اثر نفوذ ورق به سمت بستر اتفاق می‌افتد، همگی تمایل به انبساط جانبی دارند و این امر سبب می‌شود که همه آنها در مقابل انبساط المان جانبی مقاومت نشان دهند و برای جبران این تمایل در شرایط عمق نفوذ یکسان، این مقاومت باید با نیروی نفوذ بیشتر جبران شود که در نهایت منجر به افزایش مدول بستر می‌شود.

واقعیت دیگری که در بررسی نتایج آشکار می‌شود، شبیه منحنی‌ها و اختلاف نسبتاً زیاد نتایج تئوریک و تجربی است که در عمق نفوذ زیاد مشاهده می‌شود. این اختلاف در عمق نفوذ ۰/۵۵ میلی‌متر به حدود ۴۰٪ می‌رسد که درصد خطای

شود. حل مکرر معادلات به دست آمده به ازای مقادیر مختلف پارامترهای ورودی مسئله نشان می‌دهد که کاهش مقدار تنش تسلیم سبب کاهش در شعاع خمش تحت خمش ورق در عمق نفوذ یکسان می‌شود و شیب منحنی به دست آمده برای آن نیز بیشتر از شیب منحنی مربوط به ماده‌ای با تنش تسلیم بزرگ‌تر است. این امر با قرار دادن مقادیر کوچک‌تر تنش تسلیم در معادلات و حل آنها آشکار می‌شود. برای این مسئله در شعاع خمش حدود ۳۰۰ میلی‌متر برای ورق که در عمق نفوذ حدود ۰/۵ میلی‌متر اتفاق می‌افتد، حداکثر کرنش به ۰/۱۶ درصد می‌رسد و با مراجعه به منحنی تنش-کرنش ورق (شکل ۱۱) معلوم می‌شود که تنش سیلان ماده به حدود ۲۰۰ مگاپاسکال می‌رسد. البته این مقدار کرنش در لایه خارجی ورق اتفاق می‌افتد و به سمت مرکز ضخامت ورق به صورت خطی کاهش پیدا کرده و به مقدار آغازین یعنی مقدار ۱۶۵ مگاپاسکال می‌رسد. اگر مقدار متوسط مقادیر حداکثر و حداقل را که مقدار ۱۸۲/۵ مگاپاسکال می‌باشد، به عنوان متوسط تنش تسلیم در ناحیه تسلیم شده از ورق در نظر گرفته شود و معادلات به دست آمده برای مسئله با این مقدار تنش تسلیم حل شود، منحنی تئوریک اصلاح شده حاصل از سری نقاط (مثلث) به دست می‌آید که به منحنی تئوریک واقعی ورق به این منحنی خیلی نزدیک است. البته برای دستیابی به نتایج دقیق‌تر باید معادلات حاکم بر مسئله با در نظر گرفتن خاصیت کرنش برای ماده ورق استخراج و با حل آنها معادلات مربوطه استخراج شود. در تمامی مقادیر عمق نفوذ مقدار منحنی اصلاح شده تئوریک بالاتر از منحنی تئوریک است و به معنی این است که اختلاف واقعی در تمامی نقاط بسیار کمتر مقدار ظاهری آن می‌باشد. به طور مثال مقادیر شعاع خمش تحت بار تئوریک و تئوریک اصلاح شده به ترتیب ۲۱۸ و ۳۰۵ میلی‌متر در عمق نفوذ ۰/۵۵ میلی‌متر است که مقدار ۸۷ میلی‌متر افزایش در شعاع خمش را نشان می‌دهد. این مقدار افزایش معادل با حدود ۶۲ درصد کاهش اختلاف بین نتایج تجربی و تئوریک است.

محاسبه می‌شود. در این مسئله برای عمق نفوذ حدود ۰/۵ میلی‌متر با توضیحی که در بالا ذکر شد، اگر تنش تسلیم متوسط ۱۸۲/۵ مگاپاسکال در عمق نفوذ ۰/۵۵ میلی‌متر در نظر گرفته شود و افزایش تنش تسلیم به صورتی فرض شود که با افزایش عمق نفوذ به طور خطی افزایش پیدا کند و در هر نقطه مقدار متوسط افزایش یافته در معادله (۲۲) قرار داده شده و مقدار شعاع واقعی تحت خمش ورق محاسبه شود، منحنی تجربی اصلاح شده شکل ۱۷ برای شعاع تحت خمش ورق به دست می‌آید. همان‌طور که در مشاهده می‌شود، این منحنی در تمامی محدوده تغییرات عمق نفوذ، پایین‌تر از منحنی تجربی می‌باشد و این به معنی آن است که شعاع تحت خمش واقعی ورق کوچک‌تر از مقدار نشان داده شده در منحنی تجربی است و اختلاف واقعی در تمامی نقاط کمتر مقدار ظاهری آن می‌باشد. به طور مثال مقادیر شعاع خمش تحت بار تجربی و تجربی اصلاح شده به ترتیب ۳۵۹ و ۳۲۸ میلی‌متر در عمق نفوذ ۰/۵۵ میلی‌متر است که مقدار ۳۱ میلی‌متر کاهش در شعاع خمش را نشان می‌دهد. این مقدار کاهش معادل با حدود ۲۲ درصد کاهش اختلاف ظاهری بین نتایج تجربی و تئوریک می‌باشد.

بخشی از اختلاف در نتایج که ممکن است حاصل از عدم دقت در انجام آزمایش و اندازه‌گیری پارامترهای مؤثر در آن باشد. اگر چه نمی‌توان آن را حذف کرد، ولی برای به حداقل رساندن این خطا چندین تدبیر به کار برده شده است: اولاً، در برش ورق به جای استفاده از روش‌های معمول برش، از روش برش با جت آب و ذرات ساینده استفاده شده است تا هیچ‌گونه خمش اولیه در نمونه‌های مورد آزمایش ایجاد نشود، ثانیاً، با استفاده از یک ساعت اندیکاتور، اندازه‌گیری غیر مستقیم عمق نفوذ از طریق طوق مدرج حرکت عمودی میز ماشین با اندازه‌گیری مستقیم از طریق ساعت اندیکاتور جایگزین شده و دقت اندازه‌گیری و باردهی این پارامتر ورودی فرآیند با تقسیم‌بندی ۰/۰۱ میلی‌متر امکان‌پذیر شده است و علاوه بر این برای افزایش دقت، آزمایش‌ها بر روی یک ماشین فرز انجام شده است که قابلیت و ایجاد و کنترل حرکت ظریف و دقیق را داشته باشد. البته خطاهای ناشی از تعیین نادرست مقادیر مشخصات مکانیکی ورق و لاستیک‌ها نیز می‌تواند عامل مهمی در ایجاد اختلاف بین نتایج باشد که در

به دلیل استفاده از تنش تسلیم ثابت کوچک‌تر از مقدار واقعی (تنش سیلان) ورق مقدار برگشت فنری ایجاد شده در شعاع خمش از مقدار واقعی آن کاهش می‌یابد و در نتیجه شعاع خمش تحت بار ورق بزرگ‌تر از مقدار واقعی آن

الاستیک- پلاستیک ورق برای نواحی تغییر شکل الاستیک و پلاستیک ورق استخراج شده‌اند.

معادلات دیفرانسیل استخراج شده برای یک مسئله خاص به صورت تحلیلی- عددی حل شدند. نتایج حل عددی معادلات نشان می‌دهند که در محدوده حل شده، رابطه‌ای تقریباً خطی بین عمق نفوذ و شعاع تحت خمش ورق برقرار است که این رابطه را می‌توان به عنوان ابزاری بسیار کارا و مؤثر در کنترل فرآیند مورد استفاده قرار گیرد و می‌توان به کمک آن، ورق را بدون سعی و خطا که مستلزم صرف وقت و هزینه زیاد است، به قطر مطلوب رسانید. همچنین این دستاورد، امکان اتوماتیک کردن فرآیند را فراهم می‌کند.

با انجام تعدادی آزمایش خمش ورق فولادی بر روی یک بستر لاستیکی، اعتبار معادلات استخراج شده برای خمش پلاستیک ورق در این فرآیند مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج آزمایش‌ها حاکی از آن است که معادلات استخراج شده برای این فرآیند، به عنوان اولین سعی در فرمولاسیون مسئله دارای نسبتاً مناسب بوده و قابل قبول می‌باشد.

اهمیت این تحقیق در این است که نو بوده و اولین کاری است که برای تحلیل و فرمولاسیون این فرآیند نسبتاً جدید ارائه شده است.

مراجع

1. Yang, M. and Shima S. "Simulation of Pyramid Type Three-roll Bending Process", Int. J. Mech. Sci., Vol. 30, No. 12, pp. 877-886, 1988.
2. Yang, G., Mori, K.I., and Osakada, K.M. "Determination of Forming Path in Three-roll Bending, Using FEM Simulation and Fuzzy Reasoning", J. Mat. Processing Tech., Vol. 45, No's. 1-4, pp. 161-166, 1994.
3. Gandhi, A.H. and Raval, H.K. "Analytical and Empirical Modeling of Top Roller Position for Three-roller Cylindrical Bending of Plates and Its Experimental Verification", J. Mat. Processing Tech., Vol. 197, No's. 1-3, pp. 268-278, 2008.
4. Hua, M., Baines, K., and Cole, I.M. "Continuous Four-roll Plate Bending: a Production Process for the Manufacture of Single Seamed Tubes of Large and Medium Diameters", Int. J. Machine Tools and Manufacture, Vol. 39, No. 6, pp. 905-935, 1999.
5. Hua, M. and Lin, Y.H. "Effect of Strain Hardening on the Continuous Four-roll Plate Edge Bending Process", J. Mat. Processing

این آزمایش سعی شده است که با تهیه نمونه‌های تست کشش براساس استانداردهای موجود، این نوع خطا نیز به حداقل برسد. در نتیجه اختلاف در نتایج که ناشی از خطای انجام آزمایش و اندازه‌گیری عمق نفوذ واقعی باشد، در این آزمایش به حداقل رسیده است.

بنابراین با توجه به توضیحاتی که در بالا داده شد، با در نظر گرفتن منحنی‌های اصلاح‌شده تئوریک و تجربی نشان داده شد که در مجموع از ۴۰ درصد اختلاف ظاهری بین نتایج تئوریک و تجربی در عمق نفوذ زیاد مقدار ۳۲/۸ درصد به تفاوت رفتار جنس ماده ورق با رفتار فرضی برای فرمولاسیون فرآیند مربوط می‌شود و باقی‌مانده درصد خطا ۷/۳ درصد می‌باشد که به فرمولاسیون و خطاهای آزمایش و اندازه‌گیری پارامترها برمی‌گردد و در ابتدای تسلیم حداکثر به ۲۳ درصد می‌رسد که عمدتاً به دلیل آغاز تسلیم در عمق نفوذ تئوریک بیشتر می‌باشد. در نتیجه با حذف اختلاف ناشی از عوامل عمده غیر از فرمولاسیون مسئله (که به دلیل در دسترس نبودن ماده الاستیک- کاملاً پلاستیک برای ورق که مطابق با فرض اولیه برای تحلیل مسئله باشد، ایجاد شده است) به نظر می‌رسد با توجه به این که تحلیل ارائه شده در این تحقیق اولین فرمولاسیون ارائه شده برای تحلیل خمش پلاستیک ورق در این فرآیند است، قابل قبول به نظر می‌رسد و دستیابی به نتایج بهتر و دقیق‌تر نیازمند تحقیقات بیشتر در زمینه این فرآیند و فرمولاسیون آن است.

در میان مراجع ذکر شده در بررسی پیشینه تحقیقات منتشر شده به ویژه مراجع [۸-۹] که اختصاصاً به بررسی خمش قطعات در این فرآیند خاص پرداخته‌اند، علاوه بر این که مطالعات آنها از نوع تجربی و شبیه‌سازی بوده است، مطالعه دقیق فرآیند و آزمایش‌ها بر روی پروفیل و قوطی خاصی صورت گرفته است و قطعه مورد نظر به شکل یک ورق ساده نبوده است، در نتیجه امکان مقایسه نتایج این تحقیق با یافته‌های آنها وجود ندارد.

۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق مسئله خمش پلاستیک ورق فلزی در فرآیند خمش ورق بر روی بستر لاستیکی تخت مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته و معادلات دیفرانسیل حاکم بر تغییر شکل

13. Ugural, A.C. "Stresses in Plates and Shells", McGraw-Hill, Boston, 1999.
14. Ventsel, E. and Krauthammer, T. "Thin Plates and Shells-theory, Analysis, and Applications", Appl. Mech. Rev., Vol. 55, No. 4, 2002.
15. Szilard, R. "Theories and Applications of Plate Analysis", John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2004.
16. Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S. "Theory of Plate and Shells", 2nd Ed., McGraw-Hill, Editions, London, 1959.
17. Ugural, A.C. and Fenster, S.K. "Advanced Strength and Applied Elasticity", 4th Ed., Prentice-Hall, New Jersey, 2003.
18. Ward, I.M. "Mechanical Properties of Solid Polymers", John Wiley & Sons, Chichester, 1979.
19. Jhonson, W. and Mellor, P.B. "Engineering Plasticity", Ellis Horwood, UK, 1983.
20. Tlusty, G. "Manufacturing Processes and Equipment", Prentice Hall, New Jersey, 2000.
21. Hosford, W.F. and Caddell, R.M. "Metal Forming: Mechanics and Metallurgy", Prentice Hall, New Jersey, 1983.
6. Lin, Y.H. and Hua, M. "Influence of Strain Hardening on Continuous Plate Roll-bending Process", Int. J. Non-linear Mech., Vol. 35, No. 5, pp. 883-896, 2000.
7. Vollertsen, F., Sprenger, A., Kraus, J., and Arnet, H. "Extrusion, Channel and Profile Bending: a Review", J. Mat. Processing Tech., Vol. 87, No's. 1-3, pp. 1-27, 1999.
8. Kwon, H.C., Im, Y.T., Ji, D.C., and Rhee, M.H. "The Bending of an Aluminum Structural Frame With a Rubber Pad", J. Mat. Processing Tech. Vol. 113, No's. 1-3, pp. 786-791, 2001.
9. Lee, J.W., Kwon, H.C., Rhee, M.H., and Im, Y.T. "Determination of Forming Limit of a Structural Aluminum Tube in Rubber Pad Bending", J. Mat. Processing Tech. Vol. 140, No's. 1-3, pp. 487-493, 2003.
10. Geiger, M., Engel, U., and Ende, A.V. "Investigations on the Sheet Bending Process with Elastic Tools", J. Mat. Processing Tech. Vol. 27, No's.1-3, pp. 265-277, 1991.
11. Zhang, L.C., Lu, G., and Leong, S.C. "V-shaped Sheet Forming by Deformable Punches", J. Mat. Processing Tech., Vol. 63, No's. 1-3, Pp. 134-139, 1997.
12. Ramezani, M., Ripin, Z. M, and Ahmad, R. "Sheet Metal Forming with the Aid of Flexible Punch, Numerical Approach and Experimental Validation" CIRP J. Manufacturing Sci. and Tech., Vol. 3, No. 3, pp. 196-203, 2010.