

## حل معادله جریان متغیر مکانی به وسیله روش ریاضی آشفته‌گی و تخمین ضریب تصحیح اندازه حرکت در این نوع جریان

صلاح کوچک زاده<sup>۱</sup> و علیرضا وطن خواه<sup>۲</sup>

۱-۲- استادیار و دانشجوی سابق کارشناسی ارشد گروه مهندسی آبیاری و آبادانی دانشکده کشاورزی دانشگاه تهران

تاریخ پذیرش مقاله ۸۰/۳/۳۰

### چکیده

استفاده از معادله تغییرات اندازه حرکت منجر به تبیین معادله دیفرانسیلی (معادله دینامیکی) جریان‌های متغیر مکانی با افزایش یا کاهش بده می شود. حل این معادله منجر به تعیین پروفیل سطح آب در این نوع جریان ها می شود. تا کنون برای این معادله حل تحلیلی به دست نیا مده است، از این رو روش های تقریبی مختلفی برای حل آن پیشنهاد شده است. یکی از این روش ها که در ریاضیات برای حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی ابداع شده است، به نام حل آشفته‌گی معروف می‌باشد. کاربرد این روش برای حل معادله جریان های متغیر مکانی برای اولین بار توسط گیل پیشنهاد شد. از آنجا که توزیع سرعت در مقطع عرضی جریان به شدت غیر یکنواخت است، نادیده گرفتن ضریب تصحیح اندازه حرکت می تواند به تقریب غیر قابل قبول در نتایج منجر شود. به همین دلیل محققین مختلف بر اعمال ضریب تصحیح اندازه حرکت تاکید فراوان داشته اند اما بعلا نامشخص بودن مقدار این ضریب ( $\beta$ ) در این نوع جریان ها ، طراحان در حال حاضر توزیع سرعت در مقطع عرضی را یکنواخت فرض کرده و مقدار  $\beta$  را برابر واحد در نظر می گیرند. در این مقاله با ابقای ضریب تصحیح اندازه حرکت در معادله حاکم، روش تعدیل شده حل آشفته‌گی برای جریان های متغیر مکانی با افزایش بده پیشنهاد شده است. همچنین بر اساس روش ریاضی فوق معادله درجه دومی برای تعیین مقدار  $\beta$  به دست آمد. با استفاده از معادله یاد شده و نتایج آزمایشگاهی گیل مناسب ترین مقدار ضریب ( $\beta$ ) را که بهترین انطباق بین داده های آزمایشگاهی و نتایج حل آشفته‌گی ایجاد می کند تعیین شده است. بر اساس مقایسه نتایج، کاربرد این ضریب برای طراحی سازه ها و در مدل های ریاضی توصیه شده است.

**واژه‌های کلیدی:** روش حل آشفته‌گی، جریان متغیر مکانی، ضریب تصحیح اندازه حرکت

### مقدمه

جریان متغیر مکانی با افزایش بده (شکل ۱) یا جریان متغیر مکانی با کاهش بده (شکل ۲) وجود خواهد داشت. این نوع جریان ها هم در طبیعت و هم در پروژه های مهار، تصفیه ، انتقال و توزیع آب به فراوانی مشاهده می شوند. ورود آب از

جریان های متغیر مکانی جریانی هایی هستند که میزان بده در آنها در طول مجرای جریان تغییر یابد. برحسب مثبت یا منفی بودن میزان تغییرات بده در امتداد جریان، به ترتیب

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f - \frac{2\beta Q q^*}{gA^2}}{1 - \frac{\beta Q^2}{gA^2 D}}$$

نماد های به کار رفته در معادله فوق به صورت زیر تعریف شده اند:

$$dy/dx = \text{شیب سطح آب،}$$

$$S_o = \text{شیب بستر کانال نسبت به افق،}$$

$$S_f = \text{شیب انرژی،}$$

$$Q = \text{دبی در هر موقعیتی مثل } x \text{ (شکل ۳)،}$$

$$q^* = \text{مقدار دبی ورودی در واحد طول کانال و برابر است با}$$

$$q^* = dQ/dx = Q_o/L$$

$$Q_o = \text{دبی در انتهای پایین دست کانال،}$$

$$g = \text{شتاب ثقل،}$$

$$L = \text{طول کلی کانال،}$$

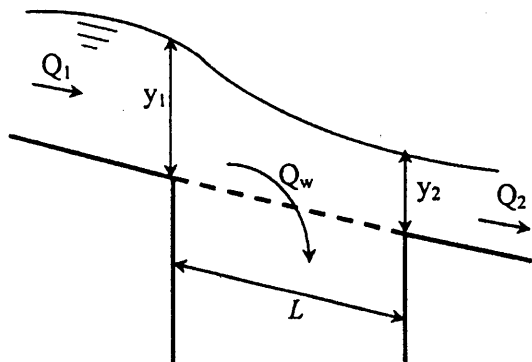
$$A = \text{سطح مقطع جریان در موقعیت } x$$

$$T = \text{عرض کانال در سطح آب،}$$

$$\beta = \text{ضریب تصحیح اندازه حرکت که به دلیل توزیع غیر}$$

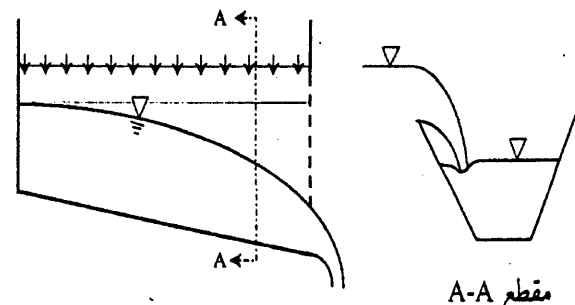
یکنواخت سرعت در مقطع عرضی وارد شده است،

$$D = \text{عمق هیدرولیکی در محل } x \text{ که عبارت است از } D = A/T$$



شکل ۲- شمای جریان متغیر مکانی با کاهش بده

سفره های زیر زمینی به آبراهه ها یا ورود آب جریان سطحی در حوزه های آبریز به مجاری سطحی، جریان متغیر مکانی با افزایش بده را به وجود می آورد. در حالی که نشت از کف مجرا و تبخیر از سطح آب، جریان متغیر مکانی با کاهش بده را به وجود می آورد. در سیستم های زهکشی سطحی شهری، مجاری جمع آوری آب جریان سطحی ناشی از بارندگی بر سطوحی مانند پارکینگ های روباز دارای جریان متغیر مکانی هستند. در بسیاری از سدها شرایط توپوگرافی، هندسی و اقتصادی طراحی سرریزهای جانبی تخلیه طغیان را ایجاب کرده است. در مجاری پایین دست این گونه سرریزها جریان متغیر مکانی وجود خواهد داشت. و بالاخره شبکه های روباز انتقال و توزیع آب معمولا دارای سیستم های آگیری و تاسیسات تخلیه آب مازاد متعددی می باشد که جریان در آنها به صورت متغیر مکانی است.



شکل ۱- شمای جریان متغیر مکانی با افزایش بده

فراوانی وقوع جریان های متغیر مکانی اهمیت مطالعه و تدقیق در روابط حاکم بر آن را تبیین می کند. به نظر می رسد که هیندز اولین کسی بود که با کاربرد اصول فیزیکی شکل متقن از رابطه حاکم بر جریان متغیر مکانی با افزایش بده را ارائه کرد (Hinds, 1926). پس از کار اساسی هیندز محققین مختلفی از قبیل مییر پیترو و فیور (Meyer-Peter and Faver, 1934) و لی (Li, 1955) در جهت تبیین روابط کاملتر حاکم بر جریان متغیر مکانی و ارائه راه حل برای این روابط فعالیت کرده اند. کاربرد معادله اندازه حرکت در جهت جریان برای جریان متغیر مکانی با افزایش بده (شکل ۱) به معادله دیفرانسیلی پروفیل سطح آب در این نوع جریان منجر شده است. شکل این معادله دیفرانسیلی به صورت زیر است (۵،۲):

دائمی)، حذف آثار متقابل و تعیین مقادیر صحیح برای آنها امری بس دشوار می باشد. به دلایل یاد شده کاربران مدل های ریاضی معمولاً مقدار ضریب تصحیح اندازه حرکت را برابر واحد فرض کرده و مدل را به اجرا در می آورند. مطالعات آزمایشگاهی جریان های متغیر مکانی از این رو اهمیت دارند که نقش پارامترهای فیزیکی مؤثر در پدیده به تفکیک قابل مشاهده هستند.

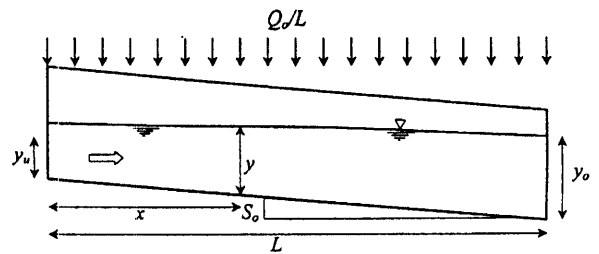
در این مقاله علاوه بر ارائه روش تعدیل شده حل آشفتگی برای جریان های متغیر مکانی با افزایش بده در حالت زیر بحرانی و با در نظر گرفتن ترم اصطکاک، با استفاده از نتایج آزمایشگاهی گیل مناسبترین ضریب تصحیح اندازه حرکت،  $\beta$ ، که بهترین انطباق را بین داده های آزمایشگاهی و نتایج حل آشفتگی ایجاد می کند تعیین شده است.

### مواد و روش ها

#### روش ریاضی حل آشفتگی

برای حل معادله حاکم بر جریان متغیر مکانی با افزایش بده اغلب محققین از روشهای عددی انتگرال گیری استفاده کرده اند. با وارد کردن بعضی فرضیات ساده کننده، کمپ معادله را از حالت غیر خطی به خطی تبدیل کرد و یک حل جبری برای آن به دست آورد (Camp, 1940). برای معادله دیفرانسیل غیر خطی حاکم، گیل با کاربرد راه حل آشفتگی، حل های جبری تقریبی به دست آورده است (Gill, 1977). گیل با مقایسه نتایج حاصل از راه حل آشفتگی با نتایج حل عددی لی (Li, 1955) نتیجه گیری کرده است که راه حل های به دست آمده برای محدوده خاصی از جریان زیر بحرانی نتایج مطلوبی ارائه می کنند. نتایج به دست آمده از کوشش های اولیه گیل نشان می دهد که با مطالعات وسیعتر دستیابی به راه حل جبری برای معادله غیر خطی حاکم محتمل است. از این رو در این مقاله ابتدا راه حل آشفتگی معرفی می شود سپس با وارد کردن ضریب تصحیح اندازه حرکت معادلات مربوطه به دست می آیند. به کمک معادلات به دست آمده و همچنین مشاهدات آزمایشگاهی گیل مقادیر ضریب تصحیح برآورد شده است. گیل راه حل های خود را ابتدا برای جریان زیر بحرانی بدون در نظر گرفتن اصطکاک، و سپس برای جریان مرکب (زیر بحرانی و فوق بحرانی) با در نظر گرفتن اصطکاک و بدون اصطکاک برای کانال های مستطیلی عریض ارائه کرده است.

آزمایشگاهی و نظری محققین مختلف منجر به ارائه روش هایی برای حل معادله دینامیکی جریان های متغیر مکانی (معادله ۱) شده است. روشی که برای حل معادلات غیر خطی ابداع شده است و به نام روش حل آشفتگی (Perturbation solution) معروف شده است یکی از این روش ها است که کاربرد آن برای حل معادله (۱) برای اولین بار توسط گیل پیشنهاد شده است (Gill, 1977).



شکل ۳- نمادهای به کار رفته در مطالعه جریان متغیر مکانی با افزایش بده

در کاربرد روش حل آشفتگی، گیل برای سادگی محاسبات ضریب تصحیح اندازه حرکت ( $\beta$ ) را برابر واحد در نظر گرفته است. از آنجایی که توزیع سرعت در مقطع عرضی کانال سرریز جانبی بسیار غیر یکنواخت است، نادیده گرفتن ضریب تصحیح اندازه حرکت میتواند به تقریب غیر قابل قبول در نتایج منجر شود. به همین دلیل محققین مختلف، صرفنظر از روش حل به کار رفته، بر اعمال ضریب اندازه حرکت تاکید فراوان داشته اند. لیکن به دلیل نامشخص بودن مقدار این ضریب در این نوع جریان ها، طراحان در حال حاضر توزیع سرعت را در مقطع عرضی یکنواخت فرض کرده و مقدار  $\beta$  را برابر واحد در نظر می گیرند. به علاوه بسیاری از مدل های ریاضی در بر دارنده ضریب تصحیح اندازه حرکت به عنوان یک پارامتر فیزیکی هستند که مقدار آن پیش از اجرای مدل باید معلوم باشد. روشن است که میزان صحت نتایج اخذ شده از چنین مدل های ریاضی بستگی تام به مقادیر به کار رفته برای این پارامترهای فیزیکی دارد. معمولاً مقادیر پارامترهای فیزیکی مدل های ریاضی در مرحله تطبیق مدل ها تعیین می شوند. برای تطبیق مدل در جریان های متغیر مکانی، یافتن داده های صحرائی به سادگی امکان پذیر نیست. حتی در صورت وجود داده های صحرائی برای انواع جریان های دیگر (از قبیل جریان متغیر و جریان های غیر

مخلوط، گیل یک بار حل را با صرفنظر کردن از اصطکاک و بار دیگر با دخالت اصطکاک به دست آورد. در حالت رژیم مخلوط برای جریان فوق بحرانی معادله حاکم را با پارامترهای مناسب این جریان بدون بعد کرد و جواب های به دست آمده در شرایط بدون اصطکاک را با نتایج عددی لی مقایسه کرد.

### نتایج

حل معادله حاکم برای جریان های زیر بحرانی و با در نظر گرفتن اصطکاک

برای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر جریان (معادله ۳) از اندیس مربوط به مقادیر بدون بعد برای رعایت اختصار صرفنظر می کنیم، بنابراین معادله (۳) به صورت زیر در می آید:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Gy^3 - \frac{G_f F_o^2 x^2}{8} - 2\beta F_o^2 xy}{y^3 - \beta F_o^2 x^2}$$

یادآوری می شود که تمام پارامترها در معادله (۴) بدون بعد می باشند. با در نظر گرفتن  $F_o^2$  به عنوان پارامتر آشفستگی، حل معادله (۴) از طریق سری زیر صورت می گیرد:

$$y = 1 + F_o^2 y_1 + F_o^4 y_2 + \dots$$

در این سری  $y_1$  و  $y_2$  و... توابعی از  $x$  بوده و به تعیین مقادیر آنها باید پرداخت. به همین منظور، برای به دست آوردن  $y_1$  باید این تقریب را بپذیریم که از ترم های دارای  $F_o$  با توان بیش از ۲ صرفنظر کنیم. سپس با به بدست آوردن  $y_1$  و جایگزین نمودن مقدار آن در سری فوق و صرفنظر کردن از ترم های دارای  $F_o$  با توان های بیش از چهار مقدار  $y_2$  به دست می آید.

شرط مرزی  $y=1$  ( $y^*=y/y_o=1$ ) در  $x=1$  ( $x^*=x/L=1$ ) مقادیر  $y_1=y_2=y_3=\dots=0$  می دهد. برای تقریب یک نقطه ای که در آن از ترم هایی که در آنها توان  $F_o$  از دو بیشتر است صرفنظر می شود خواهیم داشت:

$$y = 1 + F_o^2 y_1$$

$$y^3 = (1 + F_o^2 y_1)^3 \approx 1 + 3F_o^2 y_1$$

اگر  $k = G/F_o^2$  باشد، این ضریب موقتا وارد محاسبات شده و سپس حذف می گردد.

$$Gy^3 = kF_o^2 (1 + 3F_o^2 y_1) \approx kF_o^2$$

$$2\beta F_o^2 xy = 2\beta F_o^2 x(1 + F_o^2 y_1) \approx 2\beta F_o^2 x$$

در معادله حاکم فرض بر این است که جریان ورودی به داخل کانال مؤلفه مومنتوم در جهت جریان ندارد. در غیر این صورت باید یک ترم اضافی در معادله کنترل وارد گردد (Fox and Goodwill, 1970). ترم  $S_f$  نماینده افت اصطکاکی است و در این مقاله از فرمول داری و ایسباخ برای تحلیل افت اصطکاکی در کانال مستطیلی عریض استفاده شده است. برای بیان معادله حاکم به صورت بی بعد، پارامترهای معادله با فاکتورهای زیر به صورت بی بعد در آمده است:

$$Q = \frac{Q_o}{L} x; \quad x_o = \frac{x}{L}; \quad y_o = \frac{y}{y_o}$$

$$A = by = by_o y_o; \quad F_o = \frac{Q_o}{b\sqrt{gy_o^3}}; \quad G = \frac{S_o L}{y_o}$$

که در آن:

$$F_o = \text{عدد فرود در انتهای پایین دست کانال،}$$

$$b = \text{عرض ثابت کانال، و}$$

$$y_o = \text{عمق در انتهای پایین دست کانال می باشد.}$$

به وسیله پارامترهای فوق، معادله حاکم بر جریان (معادله ۱) را می توان به شکل زیر باز نویسی کرد:

$$\frac{dy^*}{dx^*} = \frac{Gy^{*3} - \frac{S_f Ly_o^3}{y_o} - 2\beta F_o^2 x_o y_o}{y^{*3} - \beta F_o^2 x_o^2}$$

با توجه به فرمول داری و ایسباخ شیب خط انرژی برای کانال های مستطیلی عریض به شکل زیر قابل محاسبه می باشد:

$$S_f = \frac{f}{8} \left( F_o^2 \frac{x_o^2}{y_o^3} \right)$$

با جانشینی مقدار فوق در معادله (۲)، معادله حاکم به صورت زیر در می آید:

$$\frac{dy^*}{dx^*} = \frac{Gy^{*3} - \frac{G_f F_o^2 x_o^2}{8} - 2\beta F_o^2 x_o y_o}{y^{*3} - \beta F_o^2 x_o^2}$$

که در آن:

$$G_f = fL/y_o = \text{ضریب زبری داری و ایسباخ می باشد.}$$

با فرض توزیع یکنواخت سرعت در مقطع جریان، گیل مقدار  $\beta$  را برابر با واحد در نظر گرفت و معادله حاکم را برای جریان با رژیم مخلوط یعنی جریانی که در آن رژیم زیر بحرانی و فوق بحرانی اتفاق می افتد، حل کرد. برای حالت اخیر یا رژیم جریان

$$\frac{dy_2}{dx} = 4\beta\left(\beta - k + \frac{G_f}{24}\right)x + \left(\frac{3G_f}{8}\left(\beta - k + \frac{G_f}{24}\right) + 5\beta k\right)x^2 + \left(-6\beta^2 + \frac{3}{8}kG_f\right)x^3 - \frac{2G_f}{3}x^4 - \frac{G_f^2}{64}x^5$$

$$y_2 = 2\beta\left(\beta - k + \frac{G_f}{24}\right)x^2 + \left(\frac{3G_f}{8}\left(\beta - k + \frac{G_f}{24}\right) + 5\beta k\right)\frac{x^3}{3} + \left(-6\beta^2 + \frac{3}{8}kG_f\right)\frac{x^4}{4} - \left(\frac{2G_f}{3}\right)\frac{x^5}{5} - \left(\frac{G_f^2}{64}\right)\frac{x^6}{6} + C'$$

برای موقعیت مرزی  $y=1$  در  $x=1$  مقدار  $y_2$  برابر صفر خواهد بود بنابراین داریم:

$$0 = 2\beta\left(\beta - k + \frac{G_f}{24}\right) + \left(\frac{3G_f}{8}\left(\beta - k + \frac{G_f}{24}\right) + 5\beta k\right)\frac{1}{3} + \left(-6\beta^2 + \frac{3}{8}kG_f\right)\frac{1}{4} - \left(\frac{2G_f}{3}\right)\frac{1}{5} - \left(\frac{G_f^2}{64}\right)\frac{1}{6} + C'$$

$$C' = \frac{-\beta^2}{2} + \frac{\beta G}{3F_0^2} - \frac{3\beta G_f}{40} + \frac{G G_f}{32F_0^2} - \frac{G_f^2}{384}$$

$$y_2 = \left(\frac{-\beta^2}{2} + \frac{\beta G}{3F_0^2} - \frac{3\beta G_f}{40} + \frac{G G_f}{32F_0^2} - \frac{G_f^2}{384}\right) + 2\left(\beta^2 - \frac{\beta G}{F_0^2} + \frac{\beta G_f}{24}\right)x^2 + \left(\frac{5\beta G}{3F_0^2} + \frac{\beta G_f}{8} - \frac{GG_f}{8F_0^2} + \frac{G_f^2}{192}\right)x^3 - \left(\frac{3}{2}\beta^2 - \frac{3G G_f}{32F_0^2}\right)x^4 - \left(\frac{2\beta G_f}{15}\right)x^5 - \left(\frac{G_f^2}{384}\right)x^6 \quad (6)$$

و بنابراین عمق در هر نقطه با قرار دادن معادلات (۵) و (۶) در معادله زیر (بادر نظرگرفتن تقریب مرتبه دوم) قابل محاسبه می‌باشد.

$$y = 1 + F_0^2 y_1 + F_0^4 y_2$$

اگر عمق جریان در انتهای بالا دست با  $y_u$  نشان دهیم، با قرار دادن  $x = 0$  عمق نسبی بالا دست،  $y_u/y_0$  به شکل زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$y_u/y_0 = 1 + \beta F_0^2 - G + \frac{G_f F_0^2}{24} - \frac{\beta^2 F_0^4}{2} + \frac{\beta G F_0^2}{3} - \frac{3\beta G_f F_0^4}{40} + \frac{GG_f F_0^2}{32} - \frac{G_f^2 F_0^4}{384}$$

و یا

$$A\beta^2 + B\beta + C = 0$$

با جانشینی مقادیر فوق در معادله (۴) خواهیم داشت:

$$\frac{d(l + F_0^2 y_1)}{dx} = \frac{kF_0^2 - \frac{G_f}{8}F_0^2 x^2 - 2\beta F_0^2 x}{1 + 3F_0^2 y_1 - \beta F_0^2 x^2}$$

$$\left(1 + 3F_0^2 y_1 - \beta F_0^2 x^2\right)^2 \frac{dy_1}{dx} = kF_0^2 - \frac{G_f}{8}F_0^2 x^2 - 2\beta F_0^2 x$$

$$F_0^2 \frac{dy_1}{dx} = kF_0^2 - \frac{G_f}{8}F_0^2 x^2 - 2\beta F_0^2 x$$

$$\frac{dy_1}{dx} = k - 2\beta x - \frac{G_f}{8}x^2$$

$$y_1 = c + kx - \beta x^2 - \frac{G_f}{24}x^3$$

برای موقعیت مرزی  $y=1$  در  $x=1$  مقدار  $y_1$  برابر صفر خواهد بود بنابراین داریم:

$$0 = c + k - \beta - \frac{G_f}{24} \Rightarrow c = \beta - k + \frac{G_f}{24}$$

$$y_1 = \beta - k + \frac{G_f}{24} + kx - \beta x^2 - \frac{G_f}{24}x^3 F_0^2$$

$$y_1 = \beta - \frac{G}{F_0^2} + \frac{G_f}{24} + \frac{G}{F_0^2}x - \beta x^2 - \frac{G_f}{24}x^3$$

حال برای به دست آوردن  $y_2$  با جمع ترمهای شامل  $F_0^4$  (از ترمهایی که در آن توان  $F_0$  از چهار بیشتر است صرفنظر می‌شود) خواهیم داشت:

$$y = 1 + F_0^2 y_1 + F_0^4 y_2$$

$$y^3 \approx 1 + 3F_0^2 y_1 + 3F_0^4 y_1^2 + 3F_0^4 y_2$$

$$Gy^3 = kF_0^2 \left(1 + 3F_0^2 y_1 + 3F_0^4 y_1^2 + 3F_0^4 y_2\right) \approx kF_0^2 + 3kF_0^4 y_1$$

$$2\beta F_0^2 x y = 2\beta F_0^2 x \left(1 + F_0^2 y_1 + F_0^4 y_2\right) \approx 2\beta F_0^2 x + 2\beta x F_0^4 y_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(1 + F_0^2 y_1 + F_0^4 y_2\right)}{dx} = F_0^2 \frac{dy_1}{dx} + F_0^4 \frac{dy_2}{dx}$$

با جانشینی مقادیر فوق در معادله (۴) خواهیم داشت:

$$F_0^2 \frac{dy_1}{dx} + F_0^4 \frac{dy_2}{dx} = \frac{kF_0^2 + 3kF_0^4 y_1 - \frac{G_f}{8}F_0^2 x^2 - 2\beta F_0^2 x - 2\beta F_0^4 x y_1}{1 + 3F_0^2 y_1 + 3F_0^4 y_1^2 + 3F_0^4 y_2 - \beta F_0^2 x^2}$$

$$\left(1 + 3F_0^2 y_1 - \beta F_0^2 x^2\right)^2 F_0^2 \frac{dy_1}{dx} + F_0^4 \frac{dy_2}{dx} = kF_0^2 + 3kF_0^4 y_1 - \frac{G_f}{8}F_0^2 x^2 - 2\beta F_0^2 x - 2\beta F_0^4 x y_1$$

$$F_0^2 \left(\frac{dy_1}{dx} - \left(k - 2\beta x - \frac{G_f}{8}x^2\right)\right) + \left(3F_0^4 y_1 - \beta F_0^4 x^2\right) \frac{dy_1}{dx}$$

$$+ F_0^4 \frac{dy_2}{dx} = 3kF_0^4 y_1 - 2\beta F_0^4 x y_1$$

از طرفی  $dy_1/dx = k - 2\beta x - G_f x^2/8$  خواهیم داشت:

$$\left(3F_0^4 y_1 - \beta F_0^4 x^2\right) \frac{dy_1}{dx} + F_0^4 \frac{dy_2}{dx} = 3kF_0^4 y_1 - 2\beta F_0^4 x y_1$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \left(\beta x^2 - 3y_1\right) \frac{dy_1}{dx} + (3k - 2\beta x)y_1$$

در معادله فوق خواهیم داشت:  $dy_1/dx$  و  $y_1$  را با جانشینی مقادیر

$$\frac{dy_2}{dx} = \left[\beta x^2 - 3\left(\beta - k + \frac{G_f}{24} + kx - \beta x^2 - \frac{G_f}{24}x^3\right)\right] \left(k - 2\beta x - \frac{G_f}{8}x^2\right)$$

$$+ (3k - 2\beta x) \left(\beta - k + \frac{G_f}{24} + kx - \beta x^2 - \frac{G_f}{24}x^3\right)$$

که در آن:

$$A = \frac{-F_0^4}{2}$$

$$B = F_0^2 + \frac{GF_0^2}{3} - \frac{3GF_0^4}{40}$$

$$C = 1 - G - \frac{y_u}{y_o} + \frac{GF_0^2}{24} + \frac{GGF_0^2}{32} - \frac{GF_0^4}{384}$$

با در دست داشتن اعماق دو انتهای بالادست و پایین دست در کانال جانبی،  $y_u$  و  $y_o$ ، برای بده‌های مختلف، می‌توان مقادیر  $\beta$  را از معادله (۸) به دست آورد.

با در دست داشتن اعماق دو انتهای بالادست و پایین دست در کانال جانبی،  $y_u$  و  $y_o$ ، برای بده‌های مختلف، می‌توان مقادیر  $\beta$  را به کمک معادله (۸) به دست آورد.

یاد آوری می‌شود که برای محاسبه  $G_f$  ضروری است که ضریب دارسی وایسباخ،  $f$ ، معین باشد. گیل مقدار آن را برای جریان دائمی یکنواخت در کانال آزمایشگاهی و در مجموعه‌ای از آزمایشات ۰/۰۲۶ به دست آورد. بدیهی است که مقدار  $f$  به شرایط هیدرولیکی جریان و مشخصا به عدد رینولدز ارتباط دارد. چنانچه جدار از نظر هیدرولیکی زبر باشد می‌توان مقدار ثابتی برای  $f$  در نظر گرفت در غیر این صورت مقدار متغیری برای آن باید ملحوظ داشت. در اینجا به خاطر سهولت محاسبات مقدار  $f$  ثابت فرض شده است. فرض یاد شده مادامی که تغییرات  $f$  ناچیز باشد (یعنی بتوان آن را ثابت فرض کرد) برای کانال‌های مستطیلی عریض صادق می‌باشد. برخی از اختلافات مشاهده شده بین نتایج تئوری و آزمایشگاهی را ممکن است به عامل اخیر منسوب کرد.

### نتایج

جدول (۱) مشاهدات آزمایشگاهی گیل که در یک کانال مستطیلی شیبدار به طول پنج متر و عرض ۷۶/۲ میلیمتر و عمق ۲۵۰ میلیمتر انجام شده، ارائه گردیده است (Gill, 1977). مشاهدات آزمایشگاهی گیل برای نوزده آزمایش در معادله (۸) قرار داده شده اند و مقادیر  $\beta$  برای اعماق مشاهده شده محاسبه شده اند. جدول (۲) اعماق نسبی ( $y/y_o$ ) مشاهده شده در نوزده آزمایش قید شده اند. مقدار متوسط ضریب تصحیح اندازه حرکت،  $\beta_{avg}$ ، نیز محاسبه شده است که برابر است با ۱/۵۲. در جداول ۳، ۴، و ۵ اعماق نسبی (پروفیل‌های بدون بعد) محاسبه شده با مقادیر  $\beta=1$ ،  $\beta_{avg}$ ، و  $\beta_{com}$  قید شده است. پروفیل‌های

مشاهده شده سطح آب و پروفیل‌های محاسبه شده به ازای سه مقدار  $\beta$ ، یعنی  $\beta=1$  محاسبه شده برای هر آزمایش،  $\beta=1$  و  $\beta_{avg}$  در شکل (۴) ترسیم و مقایسه شده اند. همانطور که در شکل مشهود است صحت نتایج روش آشفنگی مانند سایر روش‌های حل معادله جریان متغیر مکانی به مقدار انتخاب شده  $\beta$  بستگی تام دارد. فرض توزیع یکنواخت سرعت در مقطع جریان که منجر به اعمال  $\beta=1$  می‌شود، پروفیل سطح آبی را ایجاد می‌کند که اختلاف محسوس با پروفیل مشاهده شده دارد. بنابراین ضروری است که ضریب تصحیح اندازه حرکت، همانطور که سایر محققین بر دخالت آن در حل معادله حاکم تاکید کرده اند، در نظر گرفته شود. دامنه تغییرات ضریب تصحیح محاسبه شده برای سری آزمایشات انجام شده بین  $1/19 < \beta < 2/72$  می‌باشد. اگر چه دامنه تغییرات وسیع به نظر می‌رسد، دقت در اعداد (شکل ۴) نشان می‌دهد که حدود نود درصد داده‌ها زیر محدوده ۱/۶۶ قرار دارند. اعمال  $\beta$  محاسبه شده از هر آزمایش پروفیل سطح آبی را ایجاد می‌کند که اختلاف بسیار ناچیزی با پروفیل مشاهده شده دارد.

در طراحی‌ها ضروری است که یک مقدار معین برای  $\beta$  در نظر گرفت، گرچه به نظر می‌رسد که دامنه تغییرات  $\beta$  محاسبه شده نسبتا وسیع است، متوسط مقدار تصحیح اندازه حرکت،  $\beta_{avg}$ ، تعیین شده و این مقدار در محاسبه پروفیل سطح آب مجدداً به کار گرفته شده است. همانطور که مشاهده می‌شود پروفیل‌های محاسبه شده به کمک  $\beta_{avg}$  بسیار نزدیکتر به پروفیل مشاهده شده تا پروفیل محاسبه شده به کمک  $\beta=1$  است. بنابراین  $\beta_{avg}=1/52$  که پروفیل‌های سطح آب با انطباق قابل قبول با مقادیر مشاهده شده ایجاد کرده است، قابل توصیه می‌باشد.

همانطور که قبلاً گفته شد، ضریب زبری دارسی وایسباخ ثابت نبوده و تابعی از عدد رینولدز می‌باشد. بنابراین ثابت فرض کردن آن منجر به مقداری تقریب در محاسبات می‌شود. همچنین روش ارائه شده بر اساس عریض بودن کانال و تساوی عمق جریان و شعاع هیدرولیکی استوار شده است. این فرض با داده‌های آزمایشگاهی گیل سازگاری کامل نداشته که این مسئله خود منجر به وارد کردن مقداری تقریب در محاسبات می‌شود. لذا به نظر می‌رسد اعمال ضریب  $\beta$  نه تنها اثر توزیع غیر یکنواخت سرعت را تصحیح کرده بلکه اثر تقریبات فوق را

جدول ۱- عمق اندازه‌گیری شده جریان در موقعیت‌های مشخص  $x$  (گیل، ۱۹۷۷)  $(Q_0=(8/9)Q)$ .

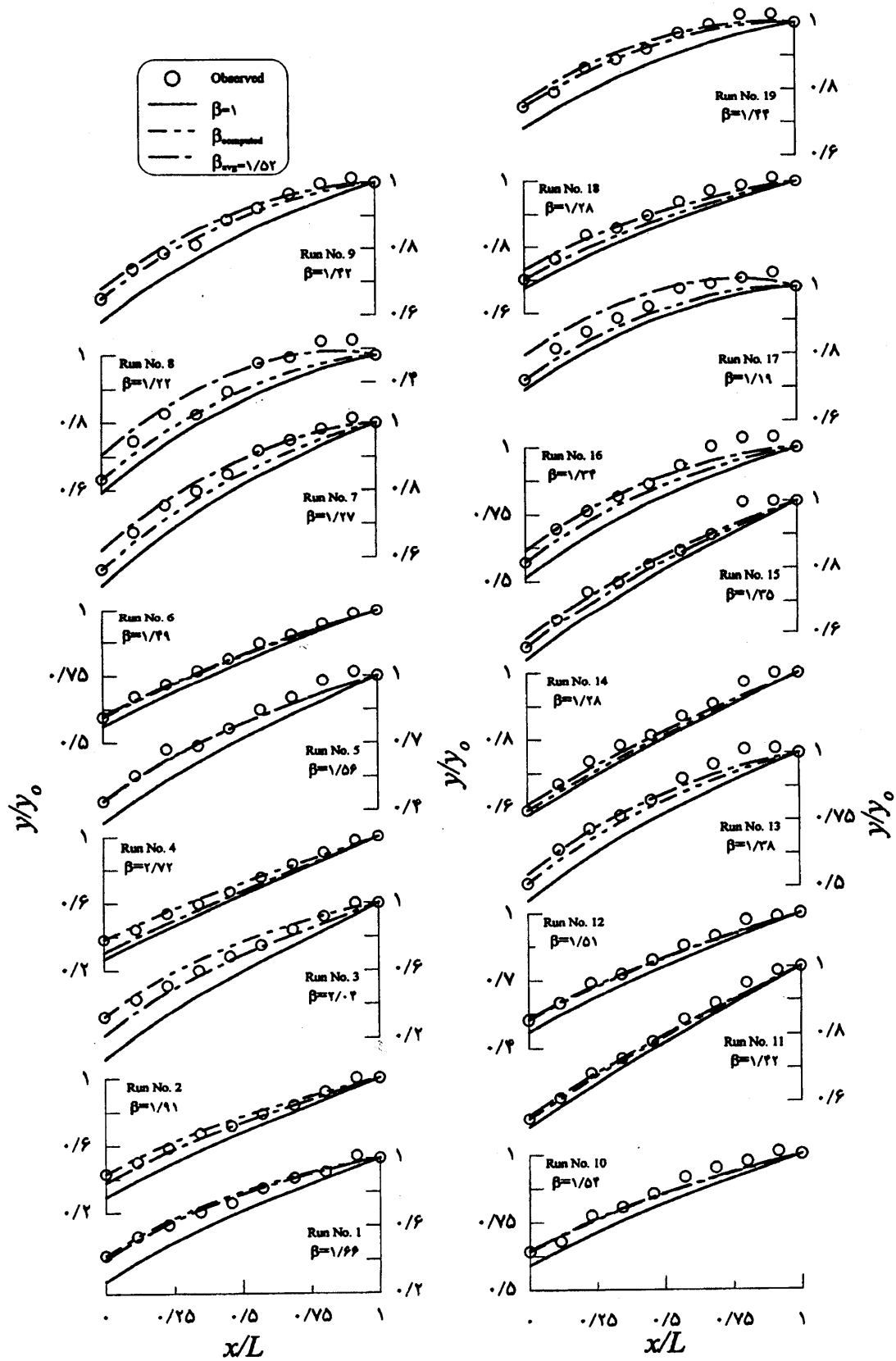
Run No.	$S_0$	Q cm <sup>3</sup> /s	L cm	عمق جریان به سانتیمتر در موقعیت‌های مشخص $x$									
				4.0 m	3.6 m	3.2 m	2.8 m	2.4 m	2.0 m	1.6 m	1.2 m	0.8 m	0.5 m
1	0.01019	806.45	350.0	1.37	1.74	1.96	2.20	2.37	2.65	2.85	2.96	3.27	3.22
2	0.01019	806.45	350.0	1.67	1.94	2.26	2.60	2.77	3.05	3.25	3.56	3.87	3.87
3	0.01019	604.84	350.0	0.87	1.14	1.36	1.60	1.82	2.00	2.25	2.46	2.67	2.67
4	0.01019	604.84	350.0	1.67	1.94	2.36	2.60	2.92	3.30	3.65	3.96	4.27	4.37
5	0.00727	535.08	350.0	1.22	1.54	1.86	1.90	2.12	2.35	2.50	2.71	2.82	2.77
6	0.00727	760.14	350.0	2.87	3.24	3.46	3.70	3.92	4.20	4.35	4.56	4.77	4.82
7	0.00727	760.14	350.0	1.87	2.24	2.51	2.65	2.82	3.05	3.15	3.26	3.37	3.32
8	0.00683	809.35	350.0	2.07	2.44	2.71	2.70	2.92	3.20	3.25	3.41	3.42	3.27
9	0.00683	809.35	350.0	2.32	2.64	2.81	2.90	3.17	3.30	3.45	3.56	3.62	3.57
10	0.00683	809.35	350.0	2.87	3.04	3.46	3.60	3.82	4.10	4.25	4.36	4.52	4.47
11	0.00683	592.30	350.0	2.37	2.64	2.96	3.15	3.37	3.65	3.85	4.11	4.27	4.32
12	0.00683	592.30	350.0	1.87	2.14	2.46	2.60	2.82	3.05	3.20	3.46	3.52	3.57
13	0.00683	592.30	350.0	1.47	1.84	2.06	2.20	2.37	2.60	2.75	2.91	2.92	2.87
14	0.00571	516.06	350.0	2.37	2.69	2.96	3.15	3.27	3.50	3.95	3.91	4.02	4.02
15	0.00571	516.06	350.0	1.77	2.04	2.31	2.40	2.57	2.70	2.85	3.16	3.17	3.17
16	0.00571	516.06	350.0	1.47	1.79	1.96	2.10	2.22	2.40	2.58	2.66	2.67	2.57
17	0.00571	816.33	350.0	2.47	2.79	2.96	3.10	3.22	3.40	3.45	3.51	3.57	3.42
18	0.00571	816.33	350.0	3.07	3.34	3.66	3.75	3.92	4.10	4.25	4.32	4.42	4.37
19	0.00571	816.33	350.0	2.77	2.94	3.21	3.30	3.42	3.60	3.70	3.81	3.82	3.72

که نتایج حل آشفتگی برای محدوده‌ای از جریان زیر بحرانی در حالت بدون اصطکاک نتایج رضایت بخشی را در مقایسه با نتیجه لی به دست می‌دهد. از آنجا که توزیع سرعت در مقطع عرضی در این نوع جریان‌ها بسیار غیر یکنواخت است محققین مختلف بر دخالت این ضریب در حل معادله تاکید بسیار کرده‌اند. در این مقاله با وارد کردن ضریب تصحیح اندازه حرکت برای جریان زیر بحرانی، روش حل آشفتگی تعدیل شده و بر اساس آن رابطه‌ای برای محاسبه ضریب تصحیح اندازه حرکت ارائه شد. به کمک رابطه اخیر و نتایج آزمایشگاهی گیل میزان ضریب تصحیح اندازه حرکت برای هر آزمایش تعیین شد. پروفیل‌های محاسبه شده با ضریب تصحیح اندازه حرکت برابر با واحد در تمام موارد پایین تر از پروفیل مشاهده شده قرار دارد. این موضوع نشان می‌دهد که دخالت دادن ضریب تصحیح اندازه حرکت در روش حل آشفتگی نیز مانند سایر روش‌های دیگر حل ضرورت دارد. اگر چه به نظر می‌رسد که محدوده ضرایب تصحیح محاسبه شده نسبتاً وسیع است، به کار گرفتن متوسط ضریب تصحیح نتایج کاملاً رضایت بخشی داده است. بدین معنی که پروفیل‌های محاسبه شده به کمک متوسط ضریب تصحیح اندازه حرکت به پروفیل‌های مشاهده شده نزدیک است. از این رو می‌توان کاربرد مقدار متوسط ضریب تصحیح اندازه حرکت  $(\beta_{avg}=1/52)$  در طراحی‌ها و در مدل‌های ریاضی توصیه نمود.

نیز به نحو مؤثری جریان نموده است. از این رو در تطابق بین نتایج آزمایشگاهی و نتایج تئوری به نظر می‌رسد که تمامی تقریبات به کمک ضریب  $\beta$  جبران شده‌اند. اگر چه با توجه به مطالب یاد شده ممکن است مقداری که برای ضریب تصحیح اندازه حرکت پیشنهاد شده با مقدار واقعی این ضریب که فقط اثر توزیع غیر یکنواخت سرعت را در بر دارد، 
$$\beta = \frac{1}{A} \int_A \frac{V^2}{\bar{V}^2} dA$$
 قدری متفاوت باشد، اما به نظر می‌رسد که این مقدار را برای طراحی می‌توان به کار برد. در شرایط خاصی که عریض بودن کانال و ثابت بودن ضریب زبری داری و ایسباخ صحت داشته باشد تعریف  $\beta$  حاصل از حل آشفتگی و تعریف متداول آن سازگاری کامل دارند.

### بحث

معادله دیفرانسیل غیر خطی جریان متغیر مکانی با افزایش بده دارای حل تحلیلی نیست از این رو روش‌های مختلفی برای حل آن پیشنهاد شده است. یکی از این روش‌ها روشی است که در ریاضیات به نام حل آشفتگی معروف است. کاربرد این روش برای حل معادله جریان متغیر مکانی اولین بار توسط گیل مطرح شد. گیل ضریب تصحیح اندازه حرکت را برابر واحد در نظر گرفته بود. حل‌هایی که گیل به دست آورد نشان می‌داد



شکل ۴- مقایسه پروفیل‌های مشاهده شده و محاسبه شده به ازای مقادیر مختلف ضریب تصحیح اندازه حرکت



### تشکر و قدردانی

مقاله حاضر بخشی از نتایج طرح تحقیقاتی ۷۱۱/۳/۵۳۹ می‌باشد. بدین وسیله از معاونت محترم پژوهشی دانشگاه تهران که امکان مالی انجام این تحقیق را فراهم کرده اند تشکر و قدر دانی می‌شود.

### لیست نمادها

$A$  = سطح مقطع جریان در موقعیت  $x$

$b$  = عرض ثابت کانال

$D$  = عمق هیدرولیکی در محل  $x$  که عبارت است از  $D = A/T$

$f$  = ضریب زبری دارسی وایسباخ

$F_o$  = عدد فرود در انتهای پایین دست کانال

$g$  = شتاب ثقل

$G = S_o L / y_o$

$G_f = f L / y_o$

$L$  = طول کلی کانال

$Q$  = دبی در هر مقطعی به فاصله  $x$  از انتهای بالادست

$Q_o$  = دبی در انتهای پایین دست کانال

$q^*$  = مقدار دبی ورودی به کانال در واحد طول کانال و برابر

است با  $q^* = dQ/dx = Q_o/L$

$S_o$  = شیب بستر کانال نسبت افق

$S_f$  = شیب انرژی

$T$  = عرض کانال در سطح آب

$x$  = فاصله مقطع از بالا دست

$x^* = x/L$

$y$  = عمق در مقطعی به فاصله  $x$  از انتهای بالادست

$y_u$  = عمق جریان در انتهای بالا دست کانال

$y_o$  = عمق جریان در انتهای پایین دست کانال

$y^* = y/y_o$

$y_n = y_1, y_2, \dots, y_n$  = توابع عمق در سری آشفتگی

$\beta$  = ضریب تصحیح اندازه حرکت که به دلیل توزیع بریر

یکنواخت سرعت در مقطع عرضی وارد شده است

### REFERENCES

1. Camp, T. R., Lateral spillway channels, Transactions, ASCE, Vol. 105, 1940.
2. Chow, V.T., Open channel hydraulics, McGraw-Hill Co. Inc., New York, 1959.
3. Fox, J.A. and I.M. Goodwill, Spatially varied flow in open channel, Proc. Instn. Civ. Engrs., London, Vol 46, Paper No 7298, 1970.
4. Gill, M. A., Perturbation solution of spatially varied flow in open channels, J. of Hydaraulic Research, IAHR, Vol. 15, No. 4, 1977.
5. Henderson, F.M., Open channel flow, Macmillan Co. New York, 1966.
6. Hinds, J., Side channel spillways, Transactions, ASCE, Vol. 98, 1926.
7. LI, Wen-Hsiung, Open channels with nonuniform discharge, Transactions, ASCE, Vol. 120, 1955.
8. Meyer-Peter, E. and H. Favre, Analysis of Boulder dam spillways made by Swiss Laboratory, Engineering News-Record, Vol. 113, No. 17, 1934

## Applying the Perturbation Solution to Estimate the Momentum Correction Factor in Spatially Varied Flows

S. KOUCHAKZADEH<sup>1</sup> AND A.R.VATANKHAH<sup>2</sup>

1&2- Assistant Professor and Former Graduate Student, Faculty of Agriculture  
University of Tehran, Karaj, Iran.

Accepted June. 20, 2001

### SUMMARY

Based on the momentum principle, ordinary non-linear differential equations for the spatially varied flows with increasing or decreasing discharge were obtained. The solution to these equations resulted in predicting the water surface profiles for this kind of flow. Analytical solutions for the equations have not been obtained yet, different approximate solutions, however, were proposed by researchers. One of these solutions is the perturbation solution which was proposed by Gill, for the first time, for solving the governing equation of the spatially varied flow with increasing discharge. The momentum correction coefficient,  $\beta$  was taken as unity in Gill's analysis. The velocity distribution in this type of flow is highly non – uniformly distributed in the cross section; hence, an appreciable value of  $\beta$  is anticipated. Accordingly, taking  $\beta$  as unity might result in a highly approximate solution. Despite the fact that almost all the researchers emphasized on applying a reasonable value for  $\beta$  in the solution of the governing equation, the value of the correction coefficient for this type of flow has not been thoroughly investigated yet. Therefore, because of scarcity of data, designers have been taking  $\beta$  as unity. In this research, the momentum correction coefficient was kept in the governing equation and a modified perturbation solution for the spatially varied flow was obtained. Based on Gill's data and the proposed modified solution values of  $\beta$  for each run were obtained too. According to the computed values of  $\beta$  a mean value of 1.52 for the momentum correction coefficient of spatially varied flows with increasing discharge was recommended. It was shown that the computed water surface profiles using the proposed mean value reasonably fits the observed data. Consequently, the use of the proposed mean value is recommended for the design purposes.

**Key words:** Perturbation solution, Spatially varied flow, Momentum correction coefficient