

## کنترل بهینه نزدیک حداقل زمان ماهواره دارای اجزای انعطاف پذیر در مانور چرخشی

اصغر ابراهیمی\*، سید علی اکبر موسویان\*\* و مهران میرشمس\*\*\*  
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

(دریافت مقاله: ۸۲/۸/۱۰ - دریافت نسخه نهایی: ۸۴/۱۰/۲۴)

**چکیده** - بهره‌برداری روزافزون از فضای آسمان با ارسال سفینه‌ها و ماهواره‌ها، مقتضی انجام عملیات مختلف نصب و تعمیرات در مدار است، که به نوبه خود کاربرد روباتهای فضانورد را مطرح ساخته است. در این مقاله، به منظور به حداقل رساندن مدت زمان مانور چرخشی فضاپیماهای عامل و نیز ماهواره‌ها، با توجه به محدودیت و هزینه حمل منابع انرژی در فضا، استفاده از کنترل‌کننده‌های حداقل زمان به شکل **bang-bang** مورد بررسی قرار می‌گیرد. اگر فقط مود جسم صلب در مسئله کنترلی در نظر گرفته شود، به دلیل تغییر مقدار ناگهانی ورودی کنترلی، مودهای انعطافی سیستم تحریک خواهند شد و اجزای انعطاف‌پذیر ماهواره به ارتعاش در خواهند آمد. به منظور پیشگیری از این ارتعاشات و با سعی در حفظ حداقل بودن مدت زمان مانور، با هدف نرم‌تر کردن تغییر علامت دادن تابع کنترلی از حالت ناگهانی، به طراحی کنترلر بهینه تقریبی پرداخته شده است. توجه داریم که در واقعیت نیز اعمال نیرو یا گشتاور کنترلی به صورت ناگهانی نبوده و با تأخیرات زمانی ناشی از ثابت زمانی اجزای سیستم کنترلی، وجود جهش با نرخ نامحدود ناممکن است. طراحی این کنترلر بهینه واقعگرایانه، با وارد کردن قیود مشتقات اول و دوم این تابع در معادلات وضعیت، و تبدیل مسئله کنترل بهینه حداقل زمان به مسئله بهینه سازی با توابع مقید، صورت می‌گیرد. سپس برای بررسی عملکرد این کنترلر، اعمال آن بر یک ماهواره نمونه مورد بحث قرار می‌گیرد. در به دست آوردن معادلات دینامیک مسئله، فرض می‌شود که بالکهای خورشیدی تنها اجزای انعطافی ماهواره‌اند. در طراحی کنترلی، برای سادگی فقط مود جسم صلب استفاده شده، ولی اثرات ورودی کنترلی به دست آمده بر روی مدل انعطافی سیستم مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی مجموعه، بیانگر عملکرد مطلوب کنترلر بهینه پیشنهادی است.

**واژگان کلیدی:** مانور زاویه‌ای ماهواره، اجزای انعطاف پذیر، کنترل بهینه، شکل‌دهی فرمان کنترلی

\*\*\* - استادیار

\*\* - دانشیار

\* - دانشجوی دکترا

## Near-Minimum Time Optimal Control of Flexible Spacecraft during Slewing Maneuver

A. Ebrahimi, S. A.A. Mousavian, and M. Mirshams

Department of Mechanical Engineering, K.N. Toosi University of Technology

**Abstract:** The rapid growth of space utilization requires extensive construction, and maintenance of space structures and satellites in orbit. This will, in turn, substantiate application of robotic systems in space. In this paper, a near-minimum-time optimal control law is developed for a rigid space platform with flexible links during an orientating maneuver with large angle of rotation. The time optimal control solution for the rigid-body mode is obtained as a bang-bang function and applied to the flexible system after smoothing the control inputs to avoid stimulation of the flexible modes. This will also reflect practical limitations in exerting bang-bang actuator forces/torques, due to delays and non-zero time constants of existing actuation elements. The smoothness of the input command is obtained by reshaping its profile based on consideration of additional first-order and second-order derivative constraints. The platform is modeled as a linear undamped elastic system that yields an appropriate model for the analysis of planar rotational maneuvers. The developed control law is applied on a given satellite during a slewing maneuver. The simulation results show that the modified realistic optimal input compared to the bang-bang solution agrees well with the practical limitations and also alleviates the vibrating motion of the flexible appendage, which reveals the merits of the new control law developed here.

**Keywords:** Slewing spacecraft, Flexible elements, Optimal control, Command shaping

### ۱- مقدمه

یکی از مانورهای ماهواره‌ها در مدار، مانور حول محور عمود بر صفحه مدار (محور pitch) است. این مانور معمولاً به منظور ارتباط با ایستگاه زمینی یا تصویربرداری استریو از یک موضع زمینی انجام می‌پذیرد. در مدارهای نزدیک زمین<sup>۱</sup> (LEO)، راستای قرارگیری بالکهای خورشیدی<sup>۲</sup> معمولاً در راستای حرکت ماهواره (محور roll) است و همین امر باعث می‌شود که انعطاف‌پذیری<sup>۳</sup> بالکها در مانور pitch بروز کند. این امر به‌نوبه خود باعث اثرگذاری بر روی دینامیک حرکت و نیز سیستم کنترلی ماهواره شود، [۱-۳]. بررسی دینامیک و کنترل ماهواره‌های انعطاف‌پذیر در مانور چرخشی، [۴-۶]، و نیز فضایی‌های مجهز به بازوهای روباتیک صلب و انعطاف‌پذیر، [۷-۱۰]، مورد توجه بسیاری از محققان است و از جنبه‌های گوناگونی مورد بحث قرار گرفته است، [۱۰-۱۵]. در تصویربرداری استریو که لازم است از یک موضع زمینی در موقعیتهای متفاوت تصویربرداری شود، سرعت بالای ماهواره در مدار (حدود ۷/۵ Km/s در مدار LEO) ایجاب می‌کند که انجام مانور چرخشی با حداقل زمان صورت پذیرد.

بنابراین کنترلر بهینه حداقل زمان در این گونه مانورها می‌تواند بسیار مفید واقع شود. از طرف دیگر کنترلر بهینه حداقل زمان ماهواره به دلیل ناگهانی بودن تغییرات فرمان کنترلی از نوع bang-bang ممکن است باعث تحریک مودهای انعطافی اجزای انعطاف‌پذیر به‌خصوص بالکهای خورشیدی شود، که این تحریکات و یا اثر آنها بایستی به حداقل رسانده شوند. روشهای متفاوتی برای میرا کردن این ارتعاشات وجود دارد که می‌توان کنترل مقاوم بهینه حداقل زمان با فرض صلب بودن ماهواره که در آن ارتعاشات بالکها به عنوان نامعینی<sup>۴</sup> وارد دینامیک ماهواره می‌شوند [۱۶]، و همچنین وارد کردن مشتقات فرمان کنترلی  $\dot{u}(t)$  و  $\ddot{u}(t)$  در معادلات وضعیت<sup>۵</sup> را از آن جمله دانست [۱۷-۱۸]. در مراجع اخیر، توابع  $\dot{u}(t)$  و  $\ddot{u}(t)$  در معادلات وضعیت گنجانده شده و با استفاده از اصل حداقل یابی پونتریاگین<sup>۶</sup> و تشکیل هامیلتونین<sup>۷</sup> و حل معادلات وضعیت و کمک وضعیت، شکل تابع کنترلی  $u(t)$  به‌دست آمده است.

در مقاله حاضر، ابتدا دینامیک ماهواره در مانور زاویه‌ای pitch با اعمال انعطاف‌پذیری بالکها بررسی شده است. سپس با استفاده از تحلیل مودال، معادلات دیفرانسیل حرکت از حالت ممزوج<sup>۸</sup> خارج شده‌اند و معادلاتی را که بیانگر

مرکب وجود دارد که در اینجا از روش لاگرانژ استفاده خواهیم کرد. با در نظر داشتن معادلات لاگرانژ به صورت زیر:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (1)$$

معادلات حرکت سیستم را به دست می آوریم. با توجه به شکل (۱) خواهیم داشت:

$$\bar{r}(x, t) = (b+x)\hat{x}_1 + y\hat{x}_2 \quad (2)$$

$$\bar{V}(x, t) = -\dot{\theta}y\hat{x}_1 + [(b+x)\dot{\theta} + \dot{y}]\hat{x}_2 \quad (3)$$

در معادلات فوق  $Q_i, U, T$  به ترتیب انرژی جنبشی، پتانسیل و نیروی تعمیم یافته،  $b$  فاصله مرکز جرم ماهواره (مبدأ مختصات) تا محل اتصال بالکها،  $x$  فاصله نقطه مفروض بر روی بالک تا نقطه اتصال  $C$ ،  $\theta$  مقدار زاویه چرخش در لحظه  $t$ ،  $\bar{r}(x, t)$  اندازه انحراف نقطه  $x$  از حالت استاتیک،  $\bar{V}(x, t)$  بردار موقعیت،  $\bar{V}(x, t)$  بردار سرعت در موقعیت مورد نظر و  $\bar{\omega} = \dot{\theta}\hat{x}_3$  سرعت زاویه ای چرخش اند. انرژی جنبشی کل ماهواره  $T$ ، برابر مجموع انرژی جنبشی بدنه ماهواره  $T_1$  و انرژی جنبشی بالکها  $2T_2$  خواهد بود:

$$T = T_1 + 2T_2 \quad (4)$$

انرژی جنبشی بدنه ماهواره برابر  $T_1 = \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}^2$  است که  $I_3$  ممان اینرسی حول محور  $x_3$  است. انرژی جنبشی هر یک از دو بالک  $T_2$  برابر است با:

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \cdot \bar{V} \cdot \bar{V} dx \quad (5)$$

که در آن  $L$  طول و  $\rho$  جرم بر واحد طول است. با استفاده از این روابط و صرف نظر کردن از جمله های شامل  $y^2$  (به دلیل کوچک بودن میزان انحراف بالکها از حالت استاتیک) خواهیم داشت:

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \rho \int_0^L \dot{y}^2 dx + 2\dot{\theta}\rho \int_0^L (b+x)\dot{y} dx \quad (6)$$

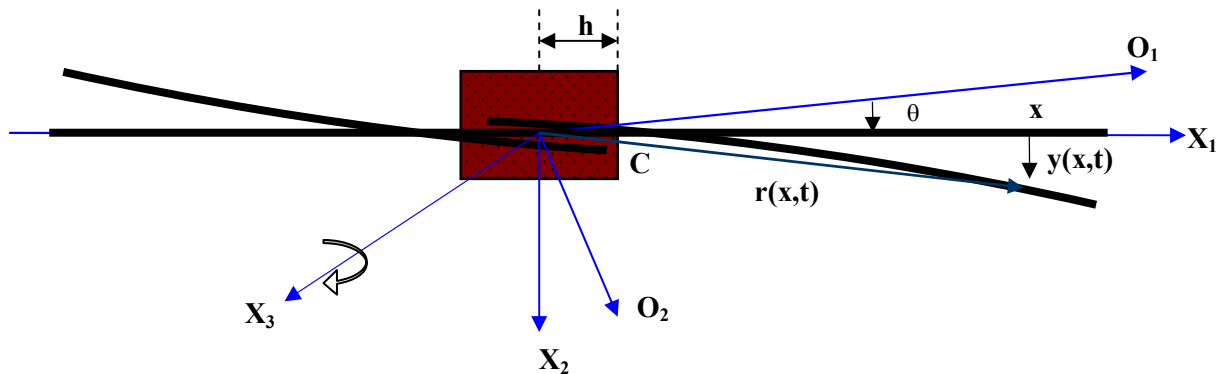
که در آن جمله هایی را که معرف ممان اینرسی اند به صورت زیر با هم ادغام کرده ایم:

$$I = I_3 + 2\rho \int_0^L (x+b)^2 dx \quad (7)$$

وضعیت برای هر مود ارتعاشی اند استخراج شده است. از این معادلات به عنوان معادلات وضعیت در بررسی مسئله کنترل استفاده شده است. به منظور کاهش اثرات ارتعاشی ناشی از اعمال کنترل bang-bang، توابع ورودی کنترلی را به صورت منحنی درجه یک و دو شکل دهی کرده و سپس اثرات اعمال این گشتاور کنترلی را که با واقعیت بیشتر نزدیک اند ارزیابی می شوند. لازم به ذکر است که در این مقاله به جای حل مسئله از روش معمول، مسئله کنترل بهینه به مسئله بهینه سازی با توابع مقید به گونه ای که شرایط لازم و کافی برای بهینگی را برآورده کند، تبدیل می شود. البته نتایج به دست آمده از شبیه سازی در تطابق با نتایج حاصله از روش معمول در نظریه کنترل بهینه است [۱۹-۲۰]. در پایان نتایج شبیه سازی برای ماهواره سپهر که دارای قابلیت تصویربرداری استریو است و می توان بالکهای خورشیدی آن را در چنین مانوری انعطاف پذیر دانست برای دو مود صلب و انعطاف پذیر مورد بررسی قرار می گیرد.

## ۲- معادلات حرکت و مدلسازی دینامیکی

دستگاه مختصات بدنی  $B^9$  و دستگاه مختصات مداری  $O^{10}$  را با مبدأ قرار گرفته بر روی مرکز جرم ماهواره در نظر می گیریم. در دستگاه مختصات مداری، محور  $O_2$  را به سمت مرکز زمین (محور yaw) و محور  $O_3$  را عمود بر صفحه مداری (محور pitch) در نظر می گیریم. محور  $O_1$  به گونه ای است که دستگاه مختصات راستگرد باشد (محور roll). این محور معمولاً در راستای بردار سرعت و در صورت دایروی بودن مدار، مماس بر مسیر حرکت خواهد بود. در اینجا، موقعیتی را که ماهواره حول محور  $O_3$  به اندازه  $\theta$  چرخیده است، در نظر می گیریم، شکل (۱). با فرض انعطاف پذیر بودن بالکهای خورشیدی و به منظور پیچیده نشدن معادلات، هر بالک را معادل یک تیر فرض می کنیم [۲۱]. روشهای متعددی مانند روش هامیلتون و لاگرانژ [۲۲]، و روش کین [۲۳]، برای بررسی دینامیک سیستمهای



شکل ۱- مقطع شماتیک ماهواره در حال چرخش از منظر محور  $X_3$  و  $O_3$

اینکه  $\delta W = Q\delta\theta$  که در آن  $Q$  نیروی تعمیم یافته متناظر با مختصه  $\theta$  در معادله (۱) است، نتیجه می گیریم:

$$Q_1 = u \quad (۱۳)$$

$$Q_i = 0 \quad (i)1)$$

حال با تعریف بردار وضعیت  $X^{13}$  به صورت زیر:

$$X = [\theta, q_2, q_3, \dots, q_n]^T \quad (۱۴)$$

و باقراردادن مقادیر  $Q_i, U, T$  از معادلات اخیر، در معادله (۱)، معادله وضعیت ماهواره در مانور چرخشی به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{bmatrix} M_{\theta\theta} & M_{\theta q} \\ M_{q\theta} & M_{qq} \end{bmatrix} \ddot{X} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{qq} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (۱۵)$$

که در آن:

$$M_{\theta\theta} = I = I_3 + 2\rho \int_0^L (b+x)^2 dx \quad (۱۶-الف)$$

$$[M_{qq}]_{ij} = \rho \int_0^L \Phi_i(x)\Phi_j(x) dx \quad (۱۶-ب)$$

$$[M_{\theta q}]_i = [M_{q\theta}]_i^T = \rho \int_0^L (r+x)\Phi_i(x) dx \quad (۱۶-ج)$$

$$[K_{qq}]_{ij} = \rho \int_0^L EI\Phi_i''(x)\Phi_j''(x) dx \quad (۱۶-د)$$

توابع شکل مودال  $\Phi_i(x)$  برای تیر یک سرگیردار<sup>۱۴</sup> به طول  $L$  توسط معادلات زیر به دست می آیند [۲۲]:

$$\Phi_i(x) = (\cos hk_i x - \cos k_i x) - \alpha_i (\sin hk_i x - \sin k_i x) \quad (۱۷-الف)$$

$$\alpha_i = \frac{\sinh k_i L - \sin k_i L}{\cosh k_i L + \cos k_i L} \quad (۱۷-ب)$$

انرژی پتانسیل سیستم نیز که فقط مربوط به بالکها خواهد بود با فرض اولیه ای که بالکها را معادل تیر در نظر گرفته ایم به صورت زیر نوشته می شود، [۲۲]:

$$U = \int_0^L EI(y'')^2 dx \quad (۸)$$

علامت ( $'$ ) معادل عملگر دیفرانسیل  $\frac{d}{dx}$  و  $EI$  سختی خمشی تیر است. حال  $y(x,t)$  را که نشان دهنده انعطاف پذیری سیستم است به صورت حاصل ضرب مختصات تعمیم یافته  $q(t)$  و تابع شکل مود  $\Phi(x)$  می نویسیم:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^n q_i(t)\Phi_i(x) \quad (۹)$$

که در آن  $n$  تعداد موده های مفروض است. بدین ترتیب، انرژی های جنبشی  $T$  و پتانسیل  $U$  به صورت زیر در خواهند آمد:

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \rho \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{q}_i(t)\dot{q}_j(t) \int_0^L \Phi_i(x)\Phi_j(x) dx \right) + 2\dot{\theta}\rho \sum_{i=1}^n \dot{q}_i(t) \int_0^L (b+x)\Phi_i(x) dx \quad (۱۰)$$

$$U = EI \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i(t)q_j(t) \int_0^L \Phi_i''(x)\Phi_j''(x) dx \quad (۱۱)$$

از سوی دیگر، تنها نیروی اعمالی بر ماهواره طی مانور چرخشی، گشتاور کنترلی  $u(t)$  است، بنابراین بر اساس مفهوم کار مجازی<sup>۱۲</sup> می توان نوشت:

$$\delta W = u(t)\delta\theta \quad (۱۲)$$

که در آن  $\delta W$  کار مجازی نیروهای اعمالی است. با توجه به

$$J = \int_0^{t_f} dt = t_f \quad (20)$$

زمان شروع مانور  $t_0 = 0$  و زمان پایان مانور است. معادله (۱۸) را می‌توان به صورت زیر برای هر مود تجزیه کرد [۲۲]:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 &= \phi_1 u \\ \ddot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 &= \phi_2 u \\ &\vdots \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن  $y_i$  مختصات  $i$  ام،  $\omega_i$  مقدار ویژه  $i$  ام (فرکانس طبیعی مود  $i$  ام) و  $\phi_i$  المان بردار ویژه<sup>۱۶</sup> برای  $i$  امین مود هستند. معادله اول از معادلات (۲۱) مربوط به  $y_1 = \theta$  است که نشان‌دهنده مود صلب،  $\omega_1 = 0$  بوده و خواهیم داشت:

$$\ddot{y}_1 = \phi_1 u_1 \quad \text{or} \quad \theta = \phi_1 u_1 \quad (22)$$

شرایط مرزی مربوطه عبارت‌اند از:

$$\theta(0) = \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}(t_f) = 0 \quad (23)$$

$$\theta(t_f) = \theta_f$$

با فرض  $\theta_1 = \theta$  و  $\theta_2 = \dot{\theta}$  خواهیم داشت:

$$\dot{\theta}_1 = \theta_2 \quad \text{and} \quad \dot{\theta}_2 = \phi_1 u_1 \quad (24)$$

در این صورت شرایط مرزی (۲۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\theta_1(0) = 0, \quad \theta_1(t_f) = \theta_f \quad (25)$$

$$\theta_2(0) = \theta_2(t_f) = 0$$

با مد نظر داشتن معیار بهینگی طبق معادله (۲۰)، تابع هامیلتونین را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۲۴]:

$$H = 1 + \lambda_1 \dot{\theta}_1 + \lambda_2 \dot{\theta}_2 = 1 + \lambda_1 \theta_2 + \lambda_2 \phi_1 u_1 \quad (26)$$

که در آن  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  متغیرهای وضعیت همراه<sup>۱۷</sup> هستند. با استفاده از اصل حداقل‌یابی پونتریاگین، ورودی کنترلی که شرایط لازم و کافی برای بهینه بودن را ارضا کند، کنترل از نوع bang-bang خواهد بود که برای مسئله فوق به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_1(t) = u_{\max} [I(t) - 2I(t-t_1) + I(t-t_f)] \quad (27)$$

که در آن  $I(t-t_i)$  تابع پله ای واحد با نقطه شروع  $t_i$  است. زمان پایان مانور  $t_f$  و زمان کلیدزنی<sup>۱۸</sup>  $t_1$  با توجه به معادلات وضعیت و شرایط مرزی مسئله به دست می‌آیند.

$$\cos k_i \cdot L \cdot \cos h k_i L = -1 \quad (17-ج)$$

شرایط مرزی حاکم بر این مسئله به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = \Phi''(L) = \Phi'''(L) = 0 \quad (17-د)$$

به این ترتیب با در نظر داشتن معادلات (۱۷) که بیانگر چگونگی گیردار بودن تیر حامل بالکها هستند و با استفاده از معادلات (۱۶)، کلیه اجزای معادله (۱۵) قابل محاسبه‌اند. این معادله به عنوان معادله وضعیت ماهواره در طراحی کنترلر مورد نظر خواهد بود.

### ۳- طراحی کنترلر حداقل زمان برای مود صلب

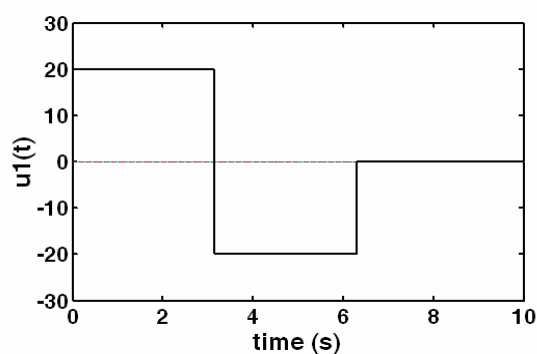
در این قسمت از مقاله کنترل کننده‌ای طراحی شده است که فقط مورد صلب (اولین مود استخراج شده از تحلیل مودال که در آن  $\omega = 0$  است) در نظر گرفته می‌شود و قانون کنترلی استخراج شده بر روی مدل سیستم با مودهای انعطافی بعدی یعنی مود دوم با فرکانس  $\omega_2$  و مود سوم با فرکانس  $\omega_3$  اعمال گشته و نتایج آن استخراج می‌شوند. بنابراین در استخراج قانون کنترلی در این قسمت فقط مود صلب مورد توجه است و آثار اعمال این قانون کنترلی بر روی مودهای انعطافی مطالعه شده است. معادله وضعیت ماهواره در مانور زاویه‌ای pitch یعنی معادله (۱۵) را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

$$M\ddot{X} + KX = Fu \quad (18)$$

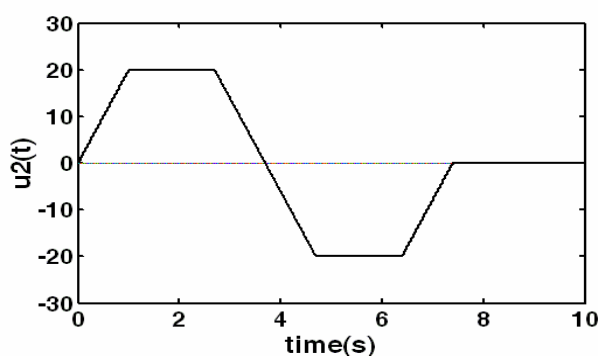
که در آن  $X$  بردار تعمیم یافته جابه جایی است که با معادله (۱۴) تعریف می‌شود.  $M$  و  $K$  و  $F$  به ترتیب ماتریسهای مثبت معین جرمی، سختی و کنترلی هستند که قبلاً توسط معادلات (۱۶) تعریف شده‌اند. فرمان کنترلی  $u(t)$  را به صورت زیر محدود می‌کنیم:

$$-u_{\max} \leq u(t) \leq u_{\max} \quad (19)$$

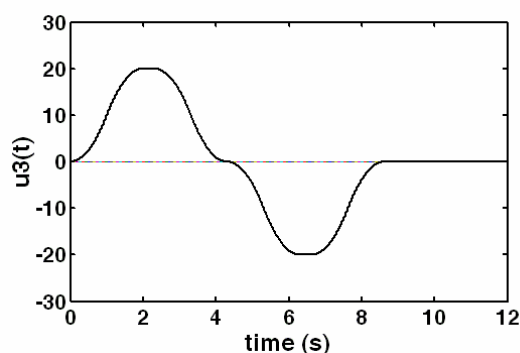
وظیفه کنترل بهینه حداقل زمان، انتقال سیستم از یک وضعیت اولیه  $X_0 = [0, 0, \dots, 0]$  به یک وضعیت نهایی معین  $X_f = [\theta_f, 0, 0, \dots, 0]$  در حداقل زمان است. بنابراین معیار بهینگی<sup>۱۵</sup> به صورت زیر خواهد بود:



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۲- توابع ورودی کنترلی الف- شکل bang-bang. ب- با قید مشتق اول، ج- با قید مشتق دوم

غیرصلب سیستم تحریک خواهند شد و موجب ارتعاش می‌شوند. این ارتعاشات پس از پایان مانور نیز باقی خواهد ماند و باعث بروز اختلال در وضعیت ماهواره می‌شوند. روشی که برای کاهش این ارتعاشات به کار خواهیم گرفت، ملایم کردن مدت زمان تغییر دادن تابع کنترلی همانند شکل (۲-ب) است، که با معادله زیر بیان می‌شود:

#### ۴- طراحی کنترل کننده بهینه نزدیک حداقل زمان

الف- اعمال قید مشتق اول تابع کنترلی. کنترل بهینه حداقل زمان که در قسمت قبل برای مودصلب به دست آمد، از نوع bang-bang است که در شکل (۲-الف) نشان داده شده است. در صورت اعمال این فرمان کنترلی بر روی ماهواره به دلیل تغییر ناگهانی ورودی کنترلی در زمانهای کلیدزنی، مودهای

## ۵- تبدیل مسئله کنترل بهینه به مسئله بهینه سازی با

### توابع مقید

در قسمت قبل توابع کنترلی  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$  به ترتیب برای کنترل حداقل زمان و نزدیک حداقل زمان با قیود مشتق اول و دوم به دست آمدند. برای تعیین پارامترهای این توابع،  $t_f$ ها و  $t_f$  زمان نهایی مانور، بایستی معادلات وضعیت و همراه وضعیت را از تابع هامیلتونین مربوطه به دست آورده و حل کنیم. روشی که به کار خواهیم گرفت، حل این مسئله از طریق بهینه سازی با توابع مقید به قرار زیر است:

قیود مشترک برای هر سه حالت عبارت اند از:

$$f_1 = \theta_1(t_f) - \theta_f = 0 \quad (۳۲-الف)$$

$$f_2 = \theta_2(t_f) = 0 \quad (۳۲-ب)$$

$$f_3 = u(t_f) = 0 \quad (۳۲-ج)$$

و قیود خاص حالت دوم  $u_2(t)$  عبارت اند از:

$$f_4 = u_2(t_1) - u_{\max} = 0 \quad (۳۲-د)$$

$$f_5 = u_2(t_3) + u_{\max} = 0 \quad (۳۲-ه)$$

و قیود خاص حالت سوم  $u_3(t)$  عبارت اند از:

$$f_6 = u_3(t_2) - u_{\max} = 0 \quad (۳۲-و)$$

$$f_7 = u_3(t_7) + u_{\max} = 0 \quad (۳۲-ز)$$

تابع معیار بهینگی نیز برای هر سه حالت، مطابق معادله (۲۰) معین است. با توجه به اینکه توابع کنترلی به شکل bang-bang معمولاً دارای تقارن زمانی نسبت به نیمه زمان مانور ( $t_f/2$ ) هستند و بازه های زمانی کلیدزنی متقارن نسبت به  $t_f/2$  و با هم برابرند، تعداد متغیرهای مسئله کاسته شده و در عمل به تعداد کمتری از قیود احتیاج خواهیم داشت. بعد از تعیین پارامترهای مستقل و تعیین قیود مسئله، هامیلتونین را به شکل زیر تشکیل می دهیم.

$$H = t_f + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \quad (۳۳)$$

که در آن  $\lambda_i$ ها، مضارب لاگرانژ<sup>۱۹</sup> و  $n$  تعداد قیودند. حال با

$$u_2(t) = au_{\max} \sum_{j=0}^5 b_{1j}(t-t_j) I(t-t_j) \quad (۲۸)$$

که در آن  $b_{1j} = [1, -1, -1, 1, 1, -1]$  علامت هر جمله از مجموعه فوق و  $t_5=t_f$  و  $t_0=0$  است. در عبارت فوق  $a$  شیب پاره خطهای مایل در شکل (۲-ب) بوده و طراح با توجه به میزان انعطاف پذیری سیستم مقدار آن را انتخاب می کند. بدیهی است که هر چه  $a$  بزرگتر باشد فرمان کنترلی به شکل bang-bang نزدیکتر خواهد بود. لازم به تذکر است که حدود  $z$  در رابطه فوق با توجه به شکل (۲-ب) و (۳-الف) تعیین شده اند.

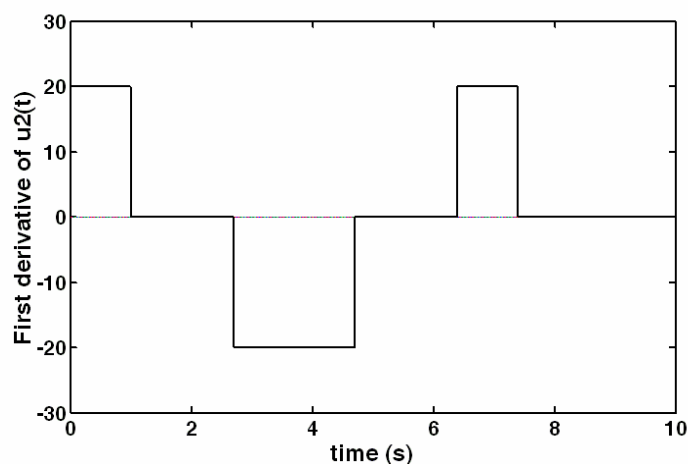
ب- اعمال مشتق دوم تابع کنترلی. در صورتی که دینامیک ماهواره از انعطاف پذیری بالایی برخوردار باشد، تغییر تابع کنترلی به صورتی که در قسمت قبل ارائه شد، ممکن است آن چنان کارساز نبوده و دامنه ارتعاشات اجزای انعطاف پذیر تا حد قابل قبول کاهش نیابند. در این صورت لازم است که تغییر علامت دادن تابع کنترلی باز هم ملایمتر شود. یعنی اینکه پاره خطهای مایل شکل (۲-ب) را بایستی به شکل منحنی درجه دوم همانند شکل (۲-ج) در نظر گرفت. تابع کنترلی معرفی این حالت عبارت است از:

$$u_3 = \frac{au_{\max}}{2} \sum_{j=0}^{10} b_{2j}(t-t_j)^2 I(t-t_j) \quad (۲۹)$$

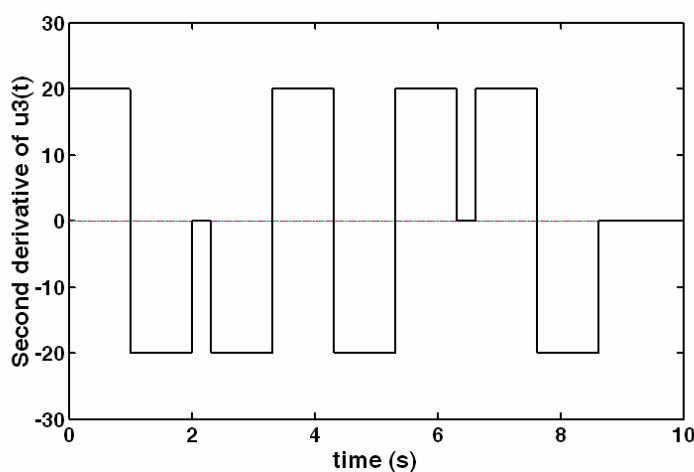
که در آن  $b_{2j} = [1, -2, 1, 1, -1, 2, -2, 2, -1, 1, -2, 1]$  ضریب و علامت هر جمله از مجموعه فوق است. در به دست آوردن معادلات (۲۸) و (۲۹) از شکلهای (۳-الف) و (۳-ب) که به ترتیب نشان دهنده مشتقات اول و دوم منحنیهای شکلهای (۲-ب) و (۲-ج) هستند، استفاده شده است. با معلوم بودن مقدار شیب پاره خطها یعنی  $a$ ، مشتقات توابع کنترلی در شکلهای (۳-الف) و (۳-ب) به راحتی قابل رسم خواهند بود و معادلات معرفی آنها نیز به صورت زیر به دست می آیند:

$$\dot{u}_2 = au_{\max} \sum_{j=0}^5 b_{1j} I(t-t_j) \quad (۳۰)$$

$$\ddot{u}_3 = au_{\max} \sum_{j=0}^{10} b_{2j} I(t-t_j) \quad (۳۱)$$



(الف)



(ب)

شکل ۳- توابع پله‌ای مشتقات ورودی کنترلی الف- مشتق اول مربوط به  $u_2$ ، ب- مشتق دوم مربوط به  $u_3$

تشکیل توابع زیر:

معمولاً غیرخطی و ممزوج‌اند و کاربرد روش مناسب عددی (مانند روش نیوتن) برای حل آنها الزامی است. بدین ترتیب، مراحل مختلف الگوریتم حل مسئله کنترل بهینه نزدیک حداقل زمان به صورت زیر خلاصه می‌شود:

۱- با استفاده از معادلات وضعیت سیستم و اصل حداقل‌یابی پونتریاگین شکل تابع کنترلی bang-bang را برای مود صلب به دست می‌آوریم.

۲- با توجه به میزان انعطاف‌پذیری سیستم، در نقاط کلیدزنی تابع کنترلی، به جای تغییرات ناگهانی، تغییرات را در یک بازه زمانی معین  $\Delta t$  که تعیین‌کننده شیب پاره‌خطهای معرف تغییر

$$g_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$g_j = \frac{\partial H}{\partial t_j} = 0 \quad (t_j = t_0, t_1, \dots, t_f) \quad (34)$$

به تعداد مجموع  $\lambda_i$ ها و  $t_j$ ها معادله  $g_i$  و  $g_j$  خواهیم داشت، که با حل این معادلات پارامترهای مسئله به دست می‌آیند. بدین ترتیب، شرط لازم برای بهینگی توسط معادله (۲۶) اعمال می‌شود و با به کارگیری تابع هامیلتونین مطابق معادله (۳۳) و توابع اخیر شرط لازم و کافی برای بهینگی [۲۴]، برآورده می‌شود. لازم به ذکر است که دستگاه معادلات اخیر،



علامت تابع کنترلی اند، اعمال می‌کنیم.

۳- توابع قیدی مسئله را معین کرده و با مشخص بودن معیار بهینگی، مسئله کنترل بهینه را به مسئله حداقل سازی توابع مقید تبدیل می‌کنیم.

۴- با به کارگیری مضارب لاگرانژ، مسئله حداقل سازی توابع مقید را به صورت دستگاه معادلات در می‌آوریم.

۵- دستگاه معادلات به دست آمده را با استفاده از روش عددی مناسب حل می‌کنیم.

پارامترهای مجهول در مسئله کنترل بهینه نزدیک حداقل زمان طی مراحل این الگوریتم به دست خواهند آمد. این پارامترها شرایط لازم و کافی برای بهینه بودن مسئله را دارا خواهند بود.

## ۶- شبیه سازی برای ماهواره انعطاف پذیر

یک ماهواره با اجزای انعطاف پذیر با ماموریت سنجش از دور زمین به منظور تصویربرداری در طیف مرئی و مادون قرمز از سطح زمین را در نظر می‌گیریم. این ماهواره دارای قابلیت تصویربرداری استریو بوده و فرض می‌کنیم که دوربینهای نصب شده بر روی آن ثابت اند. بنابراین انجام مانور زاویه‌ای برای این ماهواره اجتناب ناپذیر خواهد بود. مشخصات مداری و ساختاری این ماهواره در جدول (۱) آمده است. ابتدا، با استفاده از پارامترهای سیستم و به کارگیری آنها در معادله وضعیت (۱۸) و آن گاه تبدیل آن به معادلات (۲۱)، مقادیر  $\varphi_i$  و  $\omega_i$  به دست خواهند آمد. جدول (۲) نشان دهنده این مقادیر برای پنج مود اول در این سیستم است. همان طور که در بخش قبل بحث شد، در طراحی کنترلر فقط مود اول از دسته معادلات (۲۱) را در نظر می‌گیریم و در هر سه حالت بحث شده، مسیر حرکت زاویه‌ای ماهواره و همچنین اثرات این حرکت بر روی مود دوم (اولین مود انعطافی) را بررسی می‌کنیم. در حالت اول اگر کنترلر  $u_1(t)$  را که کنترل کننده bang-bang خالص است، اعمال کنیم، با به کارگیری الگوریتم محاسبات خلاصه شده اخیر، مدت زمان مانور  $t_f$  و زمان کلیدزنی  $t_1$  مطابق ستون اول از جدول (۳) به دست خواهد آمد. زمان نهایی مانور  $t_f = 6/311s$

کوتاهترین زمانی است که برای این مانور با زاویه چرخش نسبتاً زیاد  $\theta_1 = 45^\circ$  به دست می‌آید.

اگر تابع کنترلی  $u_1(t)$  را با در نظر گرفتن اولین مود انعطافی سیستم (معادله دوم از معادلات ۲۱) اعمال کنیم، پس از حل این معادله و تبدیل مختصات تعمیم یافته به مختصات فیزیکی می‌توانیم میزان جابه جایی نقطه انتهایی بالکها را در طول زمان، طی اعمال گشتاور کنترلی  $u_1(t)$  و بعد از اعمال آن مشاهده کنیم، شکل (۵). همان طور که در این شکل قابل مشاهده است، بعد از زمان پایان مانور، نقطه انتهایی بالکها با دامنه  $\pm 10$  سانتیمتر در حال ارتعاش است و این ارتعاشات می‌تواند اثرات مخربی بر مدار حرکت ماهواره در اثر هدر رفتن انرژی و همچنین سازه آن داشته باشد. عامل اصلی این ارتعاشات تغییرات ناگهانی فرمان کنترلی در زمانهای کلیدزنی است. همان طور که در بخش قبل مورد بحث قرار گرفت، با افزایش مدت زمان اعمال تغییرات فرمان کنترلی می‌توان این ارتعاشات را کاهش داد.

اگر شیب پاره خطهای مایل در منحنی شکل (۲-ب) را برابر  $a=1$  در نظر بگیریم، در واقع این مقدار اختیاری بوده و بسته به میزان مورد نظر برای کاهش ارتعاشات انتخاب می‌شود، آن گاه با به کارگیری الگوریتم ارائه شده، زمانهای کلیدزنی  $t_1$  و زمان نهایی مانور  $t_f$  برای فرمان کنترلی  $u_2(t)$  مطابق ستون دوم از جدول (۳) به دست می‌آید. پاسخ مود صلب ماهواره به این فرمان کنترلی، منحنی میانی در شکل (۴) است و پاسخ مود اول انعطافی نیز پس از تبدیل مختصات تعمیم یافته به مختصات فیزیکی در شکل (۶-الف) نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود دامنه ارتعاشات در این حالت نسبت به حالت اول (اعمال  $u_1(t)$ ) به اندازه ۲ سانتیمتر کاهش یافته است. برای کاهش دامنه ارتعاشات می‌توان مقدار شیب افزایش تابع کنترلی  $a$  را کاهش داد، اما کاهش این پارامتر باعث تخریب شکل تابع کنترلی و افزایش زمان نهایی  $t_f$  می‌شود.

به منظور کاهش دامنه ارتعاشات، بر اساس بحث قبل به کارگیری تابع  $u_3(t)$  را که قید مشتق دوم تابع کنترلی  $u_1(t)$  در

جدول ۱- مشخصات اصلی ماهواره نمونه

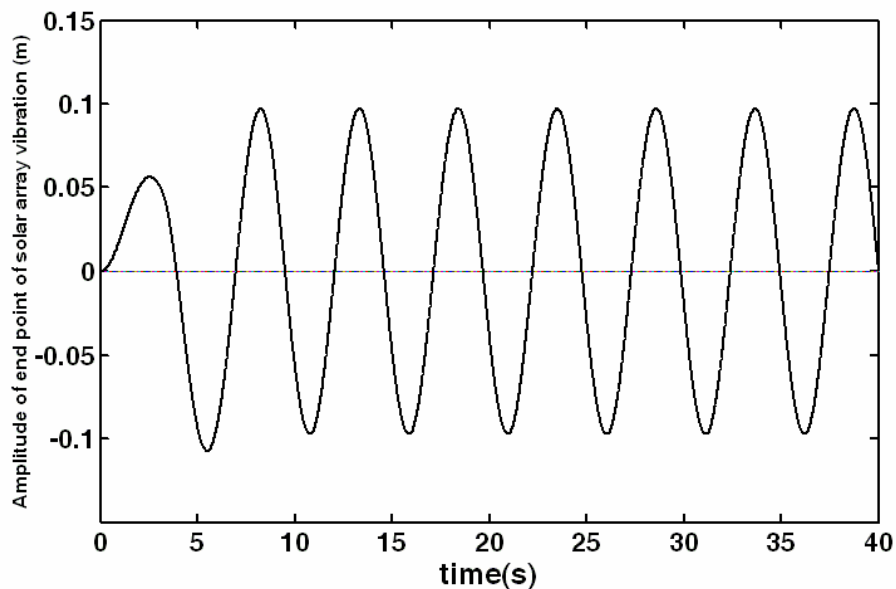
فاصله مرکز جرم تا محل اتصال بالکها	ممان اینرسی (بدنه اصلی)	طول بالکها (هر بالک)	سختی خمشی بالکها	چگالی جرمی بالکها	حداکثر گشتاور کنترلی	ارتفاع مدار	زاویه میل مدار	وزن کل ماهواره
$b=m \ 80/0$	$I_1 = 132 \text{ Kgm}^2$ $I_2 = 72 \text{ Kgm}^2$ $I_3 = 135 \text{ Kgm}^2$	$L=4 \text{ m}$	$EI=20 / 1 \text{ Nm}^2$	$\rho = 0 / 81 \text{ Kg/m}^2$	$u_{\text{max}} = 20 \text{ Nm}$	$H= 650 \text{ Km}$	$i = 98^\circ$	$900 \text{ Kg}$

جدول ۲- پارامترهای مودال معادله حرکت ماهواره انعطاف پذیر در مانور زاویه ای Pitch

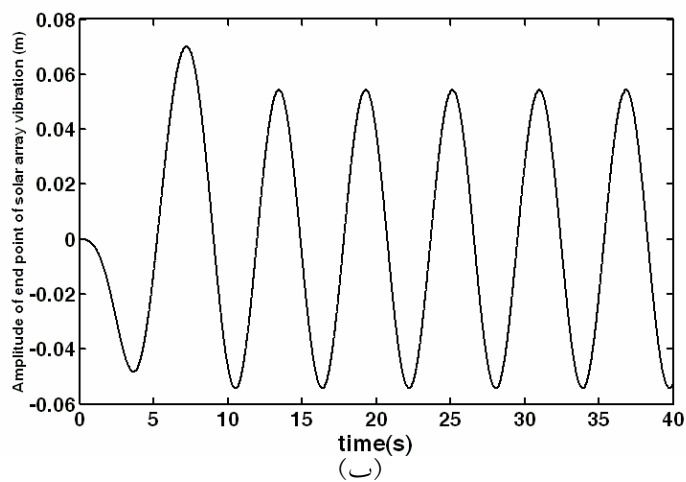
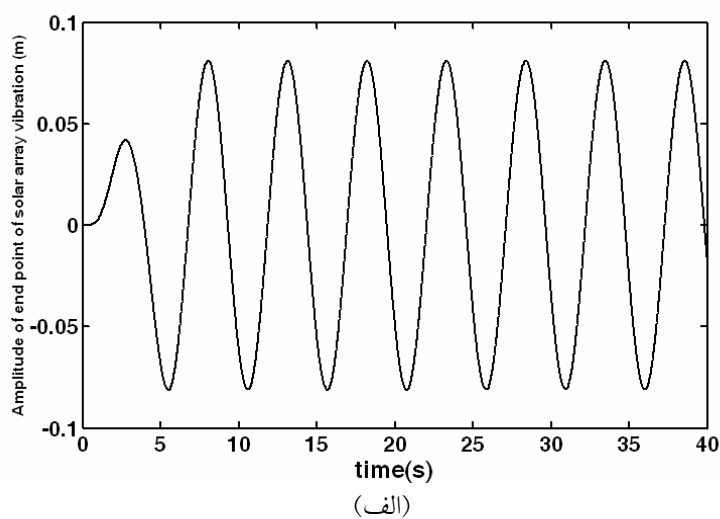
i	۱	۲	۳	۴	۵
$\phi_i$	$0 / 0628$	$-0 / 0328$	$0 / 0092$	$0 / 0043$	$-0 / 0026$
$\omega_i \text{ Rad/s}$	$0$	$1 / 2355$	$6 / 9311$	$19 / 3320$	$38 / 2100$

جدول ۳- زمانهای مانور  $t_f$  و کلیدزنی  $t_j$  بر حسب ثانیه

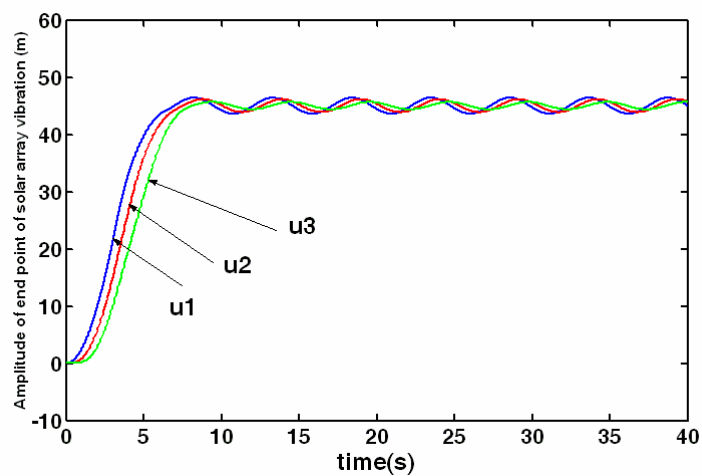
u \ t	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$
$u_1(t)$	$3 / 155$	$6 / 311$								
$u_2(t)$	$1 / 000$	$2 / 690$	$4 / 694$	$6 / 389$	$7 / 389$					
$u_3(t)$	$1 / 000$	$2 / 000$	$2 / 310$	$3 / 310$	$4 / 310$	$5 / 310$	$6 / 310$	$6 / 620$	$7 / 620$	$8 / 620$



شکل ۴- نوسانات نقطه انتهایی بالکهای خورشیدی در صورت اعمال گشتاور کنترلی حداقل زمان،  $u_1(t)$



شکل ۵- نوسانات نقطه انتهایی بالکهای خورشیدی در صورت اعمال گشتاورهای کنترلی نزدیک حداقل زمان، الف- کنترلر  $u_2(t)$ ، ب- کنترلر  $u_3(t)$



شکل ۶- مقایسه وضعیت بالکهای خورشیدی ماهواره در صورت اعمال گشتاورهای  $u_1(t)$ ،  $u_2(t)$  و  $u_3(t)$

کاهش ارتعاشات بالکها شده است. بر اساس شبیه‌سازی سیستم نمونه، افزایش زمان نهایی مانور  $t_f$  نسبت به حالت بهینه زمانی به میزان ۱۷٪ و ۳۶٪ در قبال کاهش دامنه نوسانات به میزان ۲۰٪ و ۵۵٪ نتیجه‌ای است که در طراحی کنترلر نزدیک حداقل زمان با اعمال  $u_2(t)$  و  $u_3(t)$  حاصل شده است. به‌کارگیری این توابع در واقع به معنی شکل دادن تابع ورودی کنترلی است. همچنین، در این مقاله الگوریتم جدیدی برای طراحی و محاسبه زمانهای نهایی  $t_f$  و کلیدزنی  $t_j$  ارائه شد. استفاده از روش ارائه شده باعث آسانی محاسبات و عدم لزوم بررسی توابع همراه حالت و تابع کلیدزنی شده است. تبدیل مسئله کنترل بهینه به مسئله حداقل‌سازی با توابع مقید، ضمانت لازم و کافی بودن شرایط حل مسئله را برآورده کرده است. بررسی مسئله شکل‌دهی فرمان کنترلی از این بابت که در عمل نیز نمی‌توان تغییرات جهشی پله‌ای را در میزان نیرو یا گشتاور کنترلی ایجاد کرد، حائز اهمیت بوده و واقع‌بینانه گشتن طراحی کنترلر بهینه را بر مبنای مشخصات عملگرها پایه‌ریزی می‌کند.

آن اعمال شده است، آزمایش می‌کنیم. زمانهای کلیدزنی  $t_f$  و  $t_j$  برای این حالت در ستون سوم جدول (۳) درج شده‌اند. پاسخ مود اول انعطافی در شکل (۶-ب) نشان داده شده است. میزان کاهش ارتعاشات در این حالت به اندازه ۵/۳ سانتیمتر است. یعنی دامنه ارتعاشات تقریباً به نصف میزان آن در حالت  $u_1(t)$  رسیده است. در شکل (۷) وضعیت زاویه‌ای بالکها برای هر سه حالت اعمال  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u_3(t)$  مقایسه شده‌اند. همان طور که از این شکل مشخص است، بعد از پایان مانور، وضعیت بالکها در زاویه ۴۵ درجه ثابت نبوده و در حال نوسان است، ولی میزان این نوسانات در صورت اعمال  $u_2(t)$  یا  $u_3(t)$  نسبت به حالت  $u_1(t)$  به مراتب کمتر شده است.

## ۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، کنترل نزدیک حداقل زمان برای ماهواره با اجزای انعطاف‌پذیر در مانور زاویه‌ای مورد بررسی قرار گرفت. اعمال قيود مشتق اول و دوم در طراحی کنترلر بهینه باعث

## واژه نامه

- |                    |                           |                          |
|--------------------|---------------------------|--------------------------|
| 1. low earth orbit | 8. coupled                | 15. performance index    |
| 2. solar panel     | 9. body fixed coordinates | 16. Eigen vector         |
| 3. flexibility     | 10. orbital coordinates   | 17. co-state variable    |
| 4. uncertainty     | 11. kane method           | 18. switching time       |
| 5. state equations | 12. virtual work          | 19. lagrange multipliers |
| 6. pontryagin      | 13. state vector          |                          |
| 7. Hamiltonian     | 14. fixed-free cantilever |                          |

## مراجع

- Ollero, A. Morel, G. Bernus, P. Nof S. Y., Sasiadek, J. Boverie, S. Erbe H. and Goodall, R. "Milestone Report of the Manufacturing and Instrumentation Coordinating Committee: From MEMS to Enterprise Systems," *Annual Reviews in Control*, Vol. 26, Issue 2, pp. 151-162, 2002.
- Cyril, X. Angeles, J. and Misra, A. "Dynamics of Flexible Multibody Mechanical Systems," *Transactions of the CSME*, Vol. 15, No.3, pp. 235-256, 1991.
- Mah, H. W. Modi, V. J. Morita, Y. and Yokota, H. "Dynamics During Slewing and Translational Maneuvers of the Space Station Based MRMS," *Journal of the Astronautical Space Sciences*, Vol. 38 No. 4, pp. 557-579, 1990.
- Kuang, J. L. Kim, B. J. Lee, H. W. and Sung, D. K. "The Attitude Stability Analysis of a Rigid Body with Multi-Elastic Appendages and Multi-Liquid-Filled Cavities Using The Chateau Method," *Journal of the Astronautical Space Sciences*, Vol. 15, No. 1, pp. 209-220, 1998.
- Barbieri E., and Ozgunar, U. "A New Minimum-Time Control Law for a One- Mode Model of a Flexible Slewing Structure," *IEEE Transactions on*

- Automatic Control*, Vol. 38, No. 1, pp. 142-146, 1993.
6. Singh, G. Kabamba, P. T. and McClamroch, N. h., "Planar, Time-Optimal, Rest-to-Rest Slewing Maneuvers of Flexible Spacecraft," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 12, No. 1, PP.71-81, 1989.
  7. Jacobsen, S. Lee, C. Zhu, C. and Dubowsky, S. "Planning of Safe Kinematic Trajectories for Free Flying Robots Approaching an Uncontrolled Spinning Satellite," *Proc. Of ASME 2002 Design Engineering Technical Conferences*, Montreal, Canada, 2002.
  8. Vafa Z., and Dubowsky, S. "On The Dynamics of Manipulators in Space Using The Virtual Manipulator Approach," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 579-585, 1987.
  9. Ali S. Moosavian A., and Papadopoulos, E. "On the Kinematics of Multiple Manipulator Space Free-Flyers and Their Computation," *Journal of Robotic Systems*, Vol. 15, No. 4, pp. 207-216, 1998.
  10. Ali S. Moosavian A., and Papadopoulos, E. "Explicit Dynamics of Space Free-Flyers with Multiple Manipulators via SPACEMAPL," *Journal of Advanced Robotics*, Vol. 18, No. 2, pp. 223-244, 2004.
  11. Bobrow, J. E. Dubowsky, S. and Gibson, J. S. "Time-Optimal Control of Robotic Manipulators Along Specified Paths," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 4, No. 3, pp. 244-258, 1985.
  12. Papadopoulos, E., and Ali, S. Moosavian, A. "Dynamics & Control of Multi-arm Space Robots during Chase & Capture Operations," *Proc. Of IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Munich, Germany, 1994.
  13. Ali, S. Moosavian, A., and Papadopoulos, E. "On the Control of Space Free-Flyers Using Multiple Impedance Control," *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automation*, NM, USA, April 21-27, 1997.
  14. Ali, S. Moosavian, A., and Rastegari, R. "Force Tracking in Multiple Impedance Control of Space Free-Flyers," *Proc. of Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Japan, 2000.
  15. Ali, S. Moosavian, A., and Rastegari, R. "Disturbance Rejection Analysis of Multiple Impedance Control for Space Free-Flying Robots," *Proc. Of the IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Switzerland, 2002.
  16. A.Ebrahimi, S. Ali A. Moosavian, and M. Mirshams, "Robust Optimal Control of Flexible Spacecraft During Slewing Maneuvers," *journal of Aerospace Science and Technology JAST*, Vol.2, No. 4, pp.39-45, 2005.
  17. Byers, R. M. Vadali, S., and Junkins, J. L. "Near Minimum Time, Closed Loop Slewing of Flexible Spacecraft," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 13, No.1, pp. 57-65, 1990.
  18. Albassam, B. A. "Optimal Near- Minimum- Time Control Design for Flexible Structures," *Journal of Guidance Control, and Dynamics*, Vol. 25, No. 4, pp. 618-625, 2002.
۱۹. ابراهیمی، ا.، موسویان، س.ع.ا.، و میرشمس، م.، "طراحی کنترل کننده بهینه حداقل زمان برای ماهواره‌های انعطاف پذیر در مانور زاویه‌ای pitch"، پنجمین کنفرانس سراسری و دومین کنفرانس بین‌المللی انجمن هوافضای ایران، ص ۹-۱۷، ۱۳۸۲، اصفهان.
20. Ebrahimi, A., Ali, S. Moosavian, A., and Mirshams, M., "Minimum-Time Optimal Control of Flexible Spacecraft for Rotational Maneuvering," *Proc. Of IEEE Int. Conf. on Control Applications*, Taiwan, 2004.
  21. Junkins J. L., and Kim, Y. *Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures*, AIAA Education Series, 1993.
  22. Meirovitch, L. *Elements of Vibration Analysis*, McGraw- Hill Company, 1968.
  23. Kane, T. R., and Levinson, D. A. *Dynamics: Theory and Applications*, McGraw-Hill, 1985.
  24. Bryson, A. E. Jr., and Ho, Y. C. *Applied Optimal Control*, Hemisphere, Washington DC, 1975.