

## حل تحلیلی مسائل الاستیسیته دوبعدی در یک محیط همبندچندگانه با استفاده از توابع مختلط والگوریتم Self Consistent

محمد رحیمیان

دانشیار گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

اسدا...نورزاد

استادیار گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

علیرضا حسینخانی

دانشجوی کارشناس ارشد سازه - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۷۷/۱۲/۴، تاریخ تصویب ۷۸/۹/۱۳)

### چکیده

برقراری معادلات تعادل تنشها و معادلات سازگاری در یک محیط الاستیسیته دو بعدی با صرفنظر کردن از نیروهای حجمی منجر به حل معادله بی هارمونیک  $\nabla^4 U = 0$  در کل محیط می شود  $U$  تابع تنش ایری است که از مشتقات آن می توان میدانهای تنش، کرنش و جابجائی را بدست آورد. محاسبه تابع  $U$  در حوزه توابع حقیقی برای یک محیط با مرز و شرایط مرزی دلخواه کاری دشوار است ولی در حوزه توابع مختلط می توان جواب عمومی معادله  $\nabla^4 U = 0$  را بر حسب توابع مختلط تحلیلی  $\psi(z), \phi(z)$  محاسبه کرد این توابع را در یک محیط الاستیسیته باید طوری بدست آورد که شرایط اولیه مسئله روی مرزهای محیط مورد نظر برقرار شود.

در این مقاله حل یک محیط همبند چندگانه شامل صفحه ای بی نهایت همراه با سوراخهای دایره ای از طریق بکار بردن توابع مختلط بررسی شده است با توجه به اینکه راههایی که تاکنون برای حل مسئله در چنین محیطی ارائه شده است بر اساس روشهای عددی از جمله روشهای المانهای محدود و تفاضلات محدود استوار می باشند سعی شده است روشی مبتنی بر فرمولهای تحلیلی جهت حل این مسئله ارائه گردد برای انجام این کار الگوی Self Consistent در محیطهای الاستیسیته مورد استفاده قرار گرفته است درانتها با استفاده از این روش چند محیط الاستیسیته مختلف بررسی شده است.

### واژه های کلیدی: تنش، صفحه بی نهایت، سوراخ های دایره ای

### مقدمه

گردند برای بکارگیری این روش در حل محیطهای همبند ساده می توان از تئوری نگاشت توابع مختلط استفاده کرد و حل مسئله ای با مرز دلخواه را به حل مسئله ای با مرز دایره ای تبدیل نمود (مرجع [۲] و [۳]). برای حل صفحه ای بی نهایت شامل یک سوراخ داخلی راه حلی در مرجع [۹] ارائه شده است که مبتنی بر یافتن تابع نگاشت در چنین محیطی است. در مرجع [۷] نیز توابعی برای نگاشت محیطهای همبند ساده مختلف داده شده است که از آنها می توان در حل مسائل الاستیسیته استفاده کرد.

استفاده از توابع نگاشت برای حل محیطهای همبند چندگانه با توجه به یک بیک نبودن این تابع نگاشت و دشواری محاسبه آن در حالت کلی، عملی نخواهد بود و

ایده اولیه استفاده از توابع مختلط در حل مسائل الاستیسیته اولین بار توسط خلوسوف مطرح شد اما چهل سال طول کشید تا فکر اولیه به روشی قابل استفاده برای حل مسائل الاستیسیته دوبعدی منجر شود این کار عمدتاً توسط یک گروه ریاضی دان روسی به سرپرستی موس خیلش ویلی و در سال ۱۹۵۳ انجام شد (مرجع [۱]) در این روش جواب عمومی معادله بی هارمونیک را می توان بر حسب توابع مختلط تحلیلی دلخواه  $\psi(z), \phi(z)$  بدست آورد بنابراین جواب عمومی تابع تنش ایری در یک محیط الاستیسیته دو بعدی بر حسب دو تابع مختلط تحلیلی قابل محاسبه می باشد و کافی است این دو تابع را طوری بدست آوریم که شرایط مرزی محیط مورد نظر ارضاء

محورهای اصلی مختصات می باشند و ds تغییر طول قوس در جهت مثبت مرز می باشد.

### توابع $\phi(z), \psi(z)$ در محیطهای همبند چندگانه

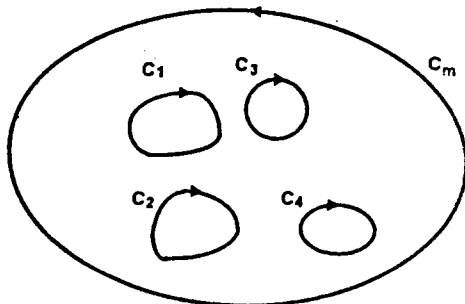
در محیطهای همبند ساده توابع  $\phi, \psi$  در شکل کلی خود به صورت یک سری تیلور حول نقطه هایی در محیط مورد نظر می باشند. به صورتی که در تمام محیط تحلیلی و همگرا باشند. برای یک محیط همبند چندگانه محدود که دارای مرزهای داخلی متعدد است توابع  $\phi, \psi$  که بتوانند در محیط مذکور و تحلیلی و همگرا باشند عبارتند از:

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{1n}}{(z-A_1)^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{2n}}{(z-A_2)^n} + \dots + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{mn}}{(z-A_m)^n}$$

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_{1n}}{(z-A_1)^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_{2n}}{(z-A_2)^n} + \dots + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_{mn}}{(z-A_m)^n}$$

(۴)

در این فرمولها m عبارتست از تعداد مرزهای داخلی محیط همچنین  $A_1, A_2, \dots, A_m$  نقاطی در صفحه مختصات z هستند که داخل مرزهای  $C_1, C_2, \dots, C_m$  قرار دارند. (شکل ۱)



شکل ۱: محیط همبند چندگانه.

بنابراین می توان گفت توابع  $\phi(z), \psi(z)$  هر یک از m سری لوران حول نقاط  $A_1$  تا  $A_m$  تشکیل شده اند به صورتی که در تمام ناحیه خارج از منحنی مربوط تحلیلی و همگرا باشند.

### حل یک محیط الاستیسیته دوبعدی

بی نهایت محدود به مرزهای داخلی دایره ای

محیطی همبند چندگانه به صورت صفحه ای همراه با سوراخهای دایره ای  $C_1$  تا  $C_m$  در نظر می گیریم

بایستی از روشی دیگر جهت حل اینگونه مسائل استفاده کرد.

روش Self Consistent برای حل محیطهای الاستیسیته که دارای ناپیوستگی ها و یا ذرات متعدد داخلی باشند الگوی کلی و مناسبی ارائه می دهد [۴] و [۵]. در این مقاله از این الگوریتم در حل کردن محیطهای همبند چندگانه توسط توابع مختلط استفاده شده است. همچنین برای بدست آوردن توابع اصلی فرمولهای بسط انتگرالی توابع مختلط بکار شده و بر این اساس فرمولهای لازم برای محاسبه توابع مختلط اصلی در حالت کلی بدست آمده است سپس با بکارگیری این فرمولها روی محیطهای مختلف تغییرات تمرکز تنش با در نظر گرفتن پارامترهای مختلف مورد بررسی قرار گرفته است.

### معادلات اساسی

در محیطهای الاستیسیته دوبعدی با صرف نظر کردن از نیروهای حجمی معادلات تعادل و سازگاری را می توان با معادله  $\nabla^4 U = 0$  بیان کرد. U تابع تنش ایری است که تنشها در هر نقطه از محیط از مشتقات آن محاسبه می شوند.

جواب عمومی تابع تنش ایری را می توان برحسب دو تابع مختلط تحلیلی بدست آورد (مرجع [۱]) و در نهایت در یک محیط الاستیسیته دوبعدی میدانهای تنش بر حسب دو تابع مختلط تحلیلی محاسبه می باشند.

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re}[\phi'(z)]$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)]$$

(۱)

با محاسبه جواب عمومی توابع تنش بایستی توابع مختلط اصلی را به گونه ای بیابیم که شرایط مرزی محیط ارضاء گردند اگر فرض کنیم که منحنی C یکی از مرزهای محیط باشد برای ارضاء شرایط مرزی تنش روی این مرز کافی است رابطه زیر برقرار باشد. (مرجع [۲] و [۳])

$$\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)} \Big|_c = f_1(s) + if_2(s)$$

(۲)

$$f_1(s) + if_2(s) + c = i \int_{s_0}^s (T_1 + iT_2) ds$$

(۳)

$T_2, T_1$  مؤلفه های تنش در روی مرز و در جهت

$H_j^0(t)$  وابسته به ضرائب  $B, B', C'$  و تابع  $H_j(t)$  می باشد. اگر تنش روی مرزهای دایره ای صفر باشد  $H_k^0(t)$  برابر است با:

$$H_k^0(t) = -2Bt - (B' - iC')\bar{t} \quad k=1,2,\dots,m \quad t \in C_k \quad (7)$$

با توجه به فرمولهای (۴) در می یابیم که توابع  $\phi_0(z), \psi_0(z)$  هر یک متشکل از  $m$  سری لوران حول نقاط  $A_1, A_2, \dots, A_m$  یعنی مراکز دوابر  $C_1, C_2, \dots, C_m$  می باشند بنابراین این دو تابع را به شکل زیر می نویسیم:

$$\phi_0(z) = \sum_{j=1}^m \phi_j(z) \quad , \quad \phi_j(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{kj}}{(z - A_j)^k}$$

$$\psi_0(z) = \sum_{j=1}^m \psi_j(z) \quad , \quad \psi_j(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_{kj}}{(z - A_j)^k} \quad (8)$$

حال عبارتهای (۶) را بدین شکل می نویسیم:

$$\sum_{j=1}^m \{ \phi_j(z) + z\overline{\phi_j'(z)} + \overline{\psi_j(z)} \} |_{C_k} = H_k^0(t)$$

$$k=1,2,\dots,m \quad t \in C_k \quad (9)$$

بنابراین در حل چنین مسئله ای بایستی  $2m$  تابع مجهول  $\phi_j, \psi_j$  ( $j=1,2,\dots,m$ ) را طوری بیابیم که  $m$  معادله فوق روی  $m$  مرز دایره ای  $C_1$  تا  $C_m$  برقرار شوند. جهت حل تحلیلی این مسئله از روش Self Consistent در محیطهای الاستیسیته استفاده می کنیم و این روش را روی حل مختلط محیطهای دو بعدی بکار می بریم. این روش بطور کلی برای حل محیطهای الاستیسیته ای که علاوه بر محیط اصلی دارای ذرات متعدد داخلی باشند بکار می رود. مثلاً محیطی بی نهایت با ترکهای متعدد داخلی. روش کلی بدین ترتیب است که ابتدا جواب میدانهای تنش و تغییر مکان را در حالت کلی برای محیطهایی که شامل هر یک از ترکها به تنهایی باشند پیدا می کنند سپس با بر هم گذاری این محیطها یک جواب تقریبی برای محیطی شامل  $n$  ترک پیدا می کنند به طوری که شرایط مرزی در بی نهایت برقرار باشند به علت بر هم کنش میدان ناشی از ترکها روی هم با در نظر گرفتن هر یک از

مراکز سوراخها را در صفحه اعداد مختلط با نقاط  $A_1$  تا  $A_m$  مشخص می کنیم همچنین فرض می کنیم فاصله مرز خارجی  $C_{m+1}$  از مرزهای داخلی به قدری است که وجود سوراخهای داخلی اثری بر میدان تنش در نزدیکی مرز خارجی ندارد. در حالت ایدال فرض می کنیم که مرز خارجی در بی نهایت قرار دارد در این حالت هر تنشی که روی مرزهای داخلی اعمال شود اثر آن روی مرز خارجی یا در بی نهایت صفر می باشد. به عبارت دیگر وجود سوراخها تأثیری روی میدان تنش در بی نهایت نخواهد داشت.

حال فرض می کنیم مقدار تنش در بی نهایت عبارت است از:

$$\sigma_x(\infty) = p \quad , \quad \sigma_y(\infty) = q \quad , \quad \tau_{xy}(\infty) = r$$

برای برقراری شرایط مرزی تنش در بی نهایت توابع  $\phi(z), \psi(z)$  را به شکل زیر می نویسیم:

$$\phi(z) = Bz + \phi_0(z)$$

$$\psi(z) = (B' + iC')z + \psi_0(z) \quad (5)$$

که توابع  $\phi_0(z), \psi_0(z)$  از روابط (۴) بدست می آیند ضرائب  $B, B', C'$  نیز با توجه به فرمولهای (۱) برابرند با:

$$4B = \sigma_x(\infty) + \sigma_y(\infty)$$

$$2(B' + iC')z = \sigma_y(\infty) - \sigma_x(\infty) + 2i\tau_{xy}(\infty)$$

برای برقراری شرایط مرزی تنش روی مرزهای  $C_1$  تا  $C_m$  بایستی بر طبق رابطه (۲) داشته باشیم:

$$\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)} |_{C_j} = H_j(t)$$

$$j=1,2,\dots,m \quad t \in C_j$$

که در آن تابع  $H_j(t)$  طبق فرمول (۳) وابسته به مقادیر مرزی تنش است و همچنین توابع  $\phi(z), \psi(z)$  از روابط (۵) محاسبه می شوند با جایگزینی این توابع رابطه را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\phi_0(z) + z\overline{\phi_0'(z)} + \overline{\psi_0(z)} |_{C_j} = H_j^0(t)$$

$$j=1,2,\dots,m \quad t \in C_j \quad (6)$$

توابع  $\phi_0(z), \psi_0(z)$  از فرمول (۴) بدست می آیند و تابع

$$\phi_k^1(z) + z\overline{\phi_k^1(z)} + \overline{\psi_k^1(z)} \Big|_{C_k} = H_k^0(t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \{ \phi_j^0(t) + t\overline{\phi_j^0(t)} + \overline{\psi_j^0(t)} \}$$

$$t \in C_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

اصلاح خطای روی مرزها را تا رسیدن به دقت کافی ادامه می دهیم در مرحله  $n$  ام خواهیم داشت:

$$\phi_k^n(z) + z\overline{\phi_k^n(z)} + \overline{\psi_k^n(z)} \Big|_{C_k} = H_k^0(t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \{ \phi_j^{n-1}(t) + t\overline{\phi_j^{n-1}(t)} + \overline{\psi_j^{n-1}(t)} \}$$

$$t \in C_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (14)$$

برای بکار بردن فرمولهای (۱۴) و بدست آوردن توابع  $\phi(z), \psi(z)$  در محیطی با  $m$  سوراخ دایره ای ابتدا فرض می کنیم در مرحله  $(n - 1)$  از فرمولهای (۱۴) عبارتهای زیر حاصل شود.

$$\phi_j^{n-1}(z) + z\overline{\phi_j^{n-1}(z)} + \overline{\psi_j^{n-1}(z)} \Big|_{C_j} = F_j^{n-1}(s)$$

$$t \in C_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (15)$$

حال برای محاسبه توابع  $\phi^{n-1}(z), \psi^{n-1}(z)$  از فرمولهای بسط انتگرالی توابع مختلط استفاده می کنیم. ابتدا طرفین رابطه فوق را در عبارت  $\frac{1}{t-\xi}$  ضرب می کنیم و روی منحنی  $C_j$  در جهت مثبت مرز از طرفین عبارت انتگرال می گیریم  $\xi$  در اینجا نقطه ای خارج دایره  $C_j$  می باشد.

$$\int_{C_j} \frac{\phi_j^{n-1}(t)}{t-\xi} dt + \int_{C_j} \frac{t\overline{\phi_j^{n-1}(t)}}{t-\xi} dt + \int_{C_j} \frac{\overline{\psi_j^{n-1}(t)}}{t-\xi} dt = \int_{C_j} \frac{F_j^{n-1}(t)}{t-\xi} dt$$

با توجه به اینکه  $C_j$  یک دایره است از فرمولهای انتگرالی توابع مختلط محیطی می توان عبارتهای زیر را نتیجه گرفت.

ترکها به تنهایی در محیط مقادیر میدان تنش را طوری اصلاح می کنند که شرایط مرزی روی ترک مزبور به طور کامل برقرار شود و اصلاح نتایج را تا رسیدن به دقت کافی ادامه می دهند (مراجع [۴] و [۵]). در اینجا این روش را روی حل مختلط صفحه ای یا  $m$  سوراخ دایره ای بکار می بریم و جزئیات آنرا بیان می کنیم.

در ابتدای کار فرض می کنیم که صفحه بی نهایت مزبور فقط شامل سوراخ دایره ای باشد در این حالت بر طبق فرمولهای (۹) بایستی داشته باشیم:

$$\phi_k^0(z) + z\overline{\phi_k^0(z)} + \overline{\psi_k^0(z)} \Big|_{C_k} = H_k^0(t) \quad (10)$$

با توجه به اینکه در این حالت با حل محیطی بی نهایت شامل یک سوراخ دایره ای مواجه هستیم. بنابراین توابع مختلط  $\phi_0(z), \psi_0(z)$  را می توان بدست آورد با انجام این کار روی  $m$  سوراخ دایره ای محیط، می توان  $2m$  تابع  $\phi_1^0, \phi_2^0, \dots, \phi_m^0, \psi_1^0, \psi_2^0, \dots, \psi_m^0$  را بدست آورد که در معادلات زیر صدق می کنند.

$$\phi_k^0(z) + z\overline{\phi_k^0(z)} + \overline{\psi_k^0(z)} \Big|_{C_k} = H_k^0(t)$$

$$t \in C_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

با توجه به بدین شکل بدست آوردیم شرایط مرزی تنش روی منحنی  $C_k$  بطور تقریبی برقرار می شود چرا که علاوه بر توابع  $\phi_k^0, \psi_k^0$  که از فرمول فوق بدست می آیند بر هم کنش مقادیر توابع  $\phi_j^0, \psi_j^0$  ( $k \neq j$ ) نیز طبق معادلات (۹) بر مقادیر مرزی روی دایره  $C_k$  تأثیر می گذارند این مقدار را می توان بدین شکل نشان داد:

$$\phi_j^0(z) + z\overline{\phi_j^0(z)} + \overline{\psi_j^0(z)} \Big|_{C_k} = \phi_j^0(t) + t\overline{\phi_j^0(t)} + \overline{\psi_j^0(t)}$$

$$t \in C_k, \quad k \neq j \quad (12)$$

مجدداً طبق اصول روشی که بکار بردیم سوراخ  $C_k$  را به تنهایی در نظر می گیریم و توابع  $\phi_k^0, \psi_k^0$  را طوری تغییر می دهیم که خطای ایجاد شده روی منحنی  $C_k$  اصلاح شود. برای اینکار توابع  $\phi_k^1, \psi_k^1$  را به شکل زیر بدست می آوریم:

$$\psi_j^{n-1}(\xi) = \frac{1}{2\pi I} \int_{c_j} \frac{\overline{F_j^{n-1}(t)}}{t-\xi} dt - \left( \frac{R_j^2}{\xi - A_j} + \overline{A_j} \right) \phi_j'^{n-1}(\xi)$$

با محاسبه مقداری  $\phi_j'^{n-1}(\xi)$  با استفاده از فرمولهای (۱۶) و سپس جایگزین کردن آن در عبارت فوق خواهیم داشت:

$$\psi_j^{n-1}(\xi) = \frac{1}{2\pi I} \int_{c_j} \frac{\overline{F_j^{n-1}(t)}}{t-\xi} dt - \frac{1}{2\pi I} \left( \frac{R_j^2}{\xi - A_j} + \overline{A_j} \right) \int_{c_j} \frac{F_j^{n-1}(t)}{(t-\xi)^2} dt \quad (18)$$

با فرض اینکه  $s$  نقطه ای دلخواه از دایره  $C_k$  ( $k \neq j$ ) باشد با استفاده از فرمولهای (۱۵) و (۱۸) می توان عبارت زیر را نتیجه گرفت:

$$\sum_{j=1}^m \{ \phi_j(z) + z \overline{\phi_j'(z)} + \overline{\psi_j(z)} \} |_{C_k} = \frac{1}{2\pi I} \left\{ \int_{c_j} \frac{F_j^{n-1}(t)}{t-s} dt + \text{Conjugate} \int_{c_j} \frac{\overline{F_j^{n-1}(t)}}{t-s} dt + \left( \frac{R_j^2}{\overline{s} - \overline{A_j}} + s - A_j \right) \text{Conjugate} \int_{c_j} \frac{F_j^{n-1}(t)}{t-s} dt \right\} \quad (19)$$

مشابه فرمول (۱۵) فرض می کنیم که در مرحله  $n$  داشته باشیم:

$$\phi_k^n(z) + z \overline{\phi_k^n(z)} + \overline{\psi_k^n(z)} |_{C_k} = F_k^n(s) \quad s \in C_k, \quad k=1,2,\dots,m \quad (20)$$

با در نظر گرفتن این عبارت و همچنین فرمولهای (۱۹) و (۱۴) خواهیم داشت:

$$F_k^n(s) = H_k^0(s) - \frac{1}{2\pi I} \sum_{j=1}^m \left\{ \int_{c_j} \frac{F_j^{n-1}(t)}{t-s} dt + \text{Conjugate} \int_{c_j} \frac{\overline{F_j^{n-1}(t)}}{t-s} dt + \left( \frac{-R_j^2}{\overline{s} - \overline{A_j}} + s - A_j \right) \text{Conjugate} \int_{c_j} \frac{F_j^{n-1}(t)}{(t-s)^2} dt \right\}, \quad s \in C_k, \quad k=1,2,\dots,m \quad (21)$$

$$\frac{1}{2\pi I} \int_{c_j} \frac{\phi_j^{n-1}(t)}{t-\xi} dt = \phi_j^{n-1}(\xi)$$

$$\int_{c_j} \frac{\overline{\psi_j^{n-1}(t)}}{t-\xi} dt = 0 \quad \int_{c_j} \frac{\overline{t \phi_j'^{n-1}(t)}}{t-\xi} dt = 0$$

و در نتیجه تابع  $\phi_j^{n-1}(\xi)$  بدست می آید.

$$\phi_j^{n-1}(\xi) = \frac{1}{2\pi I} \int_{c_j} \frac{F_j^{n-1}(t)}{t-\xi} dt \quad (16)$$

برای محاسبه  $\psi_j^{n-1}(\xi)$  همین کار را روی مزدوج تساوی (۱۵) انجام می دهیم:

$$\int_{c_j} \frac{\overline{\phi_j^{n-1}(t)}}{t-\xi} dt + \int_{c_j} \frac{\overline{t \phi_j'^{n-1}(t)}}{t-\xi} dt + \int_{c_j} \frac{\overline{\psi_j^{n-1}(t)}}{t-\xi} dt = \int_{c_j} \frac{\overline{F_j^{n-1}(t)}}{t-\xi} dt \quad (17)$$

معادله دایره  $C_j$  با شعاع  $R_j$  و مرکز  $A_j$  در صفحه مختصات مختلط  $|Z - A_j| = R_j$  می باشد.

بنابراین مقدار  $t$  را روی مرز این دایره می توان بدست آورد. ابتدا معادله دایره را به شکل زیر می نویسیم:

$$(t-A)(\bar{t}-\bar{A}_j) = R_j^2$$

$$\bar{t} = \frac{R_j^2}{t-A_j} + \overline{A_j}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_{c_j} \frac{\overline{\phi_j^{n-1}(t)}}{t-\xi} dt = 0, \quad \frac{1}{2\pi I} \int_{c_j} \frac{\overline{\psi_j^{n-1}(t)}}{t-\xi} dt = \psi_j^{n-1}(\xi)$$

$$\frac{1}{2\pi I} \int_{c_j} \frac{\overline{t \phi_j'^{n-1}(t)}}{t-\xi} dt = \left( \frac{R_j^2}{\xi - A_j} + \overline{A_j} \right) \phi_j'^{n-1}(\xi) + \frac{1}{2\pi I} \int_{c_j} \left( \frac{R_j^2}{t-A_j} + \overline{A_j} \right) \frac{\overline{\phi_j^{n-1}(t)}}{t-\xi} dt$$

و از عبارت (۱۷) تابع  $\psi_j^{n-1}(\xi)$  بدست می آید:

$$P_{rk}^n = P_{rk}^0 - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{+\infty} \left\{ \binom{-r+i-1}{i-1} \frac{(-1)^i R_k^{-r} R_j^i P_{ij}^{n-1}}{(A_j - A_k)^{-r+i}} + (r+2) \binom{r+i-1}{i-1} \frac{(-1)^i R_k^{r+2} R_j^i \overline{P_{ij}^{n-1}}}{(A_j - A_k)^{i+r+2}} \right\}, r=1 \quad (27)$$

$$P_{rk}^n = P_{rk}^0 - \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{+\infty} \binom{r+i-1}{i-1} \frac{(-1)^i R_k^r R_j^i P_{ij}^{n-1}}{(A_j - A_k)^{r+i}} + (r+2) \binom{r+i-1}{i-1} \frac{(-1)^i R_k^{r+2} R_j^i \overline{P_{ij}^{n-1}}}{(A_j - A_k)^{i+r+2}} + (r+1) \binom{r+i+1}{i} \frac{(-1)^i R_k^r R_j^{i+2} \overline{P_{ij}^{n-1}}}{(A_j - A_k)^{r+i+2}} + (r+1) \binom{r+i}{i-1} \frac{(-1)^i R_k^r R_j^i \overline{P_{ij}^{n-1}}}{(A_j - A_k)^{i+r+1}} \right\} r > 0 \quad (28)$$

با بکار بردن فرمولهائی مشابه روابط (۱۶) و (۱۸) می توان توابع اصلی مختلط محیط را بر حسب ضرائب فوریه تابع  $F_j^n(t)$  محاسبه کرد (مرجع [۱۰]) در نهایت فرمولهای زیر را خواهیم داشت.

$$\phi_j^n(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\overline{P_{-ij}^n} R_j^i}{(z - A_j)^i}$$

$$\psi_j^n(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left\{ \frac{\overline{P_{ij}^n} R_j^i}{(z - A_j)^i} + \left( \frac{R_j^2}{(z - A_j)} + \overline{A_j} \right) \frac{i P_{ij}^n R_j^i}{(z - A_j)^{i+1}} \right\} j=1,2,\dots,m \quad (29)$$

بر اساس مطالب بیان شده در این بخش و فرمولهائی که بدست آوردیم به طور خلاصه جهت حل تنش یک صفحه بی نهایت شامل  $m$  سوراخ دایره ای مراحل زیر را انجام می دهیم:

- ۱- توابع  $H_k^0(t)$  را از فرمولهای (۷) بدست می آوریم.
- ۲- ضرائب فوریه  $p_{kr}^0$  را توسط فرمولهای زیر محاسبه می کنیم:

$$P_{rk}^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_k^0(t) e^{i\theta} d\theta, \quad t = R_k e^{i\theta} + A_k$$

$$k = 1,2,\dots,m \quad r = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

بنابراین به یک فرمول بازگشتی می رسیم که توسط آن می توان در هر مرحله توابع  $F_j^n(t)$  را بدست آورد در اولین مرحله با توجه به فرمولهای (۱۱) قرار می دهیم:

$$F_k^0(s) = H_k^0(s) \quad s \in C_k \quad k = 1,2,\dots,m \quad (22)$$

علاوه بر فرمولهای (۲۰) که بیان انتگرالی رابطه بین توابع  $F_j^{n-1}(t), F_j^n(t)$  می باشد می توان این فرمولها را به صورت روابط فوریه توابع نیز بیان کرد. با توجه به اینکه مرزهای  $C_k, C_j$  دایره ای هستند آنها را در صفحه اعداد مختلط با معادلات پارامتری زیر نشان می دهیم:

$$C_j : t = R_j \sigma + A_j \quad \sigma = e^{i\theta}$$

$$C_k : s = R_k \rho + A_k \quad \rho = e^{i\alpha} \quad (23)$$

در این فرمولها  $R_k = R_j$  شعاع و  $A_k, A_j$  مراکز دایره های  $C_k, C_j$  می باشند. همچنین  $\theta$  و  $\alpha$  زوایای مرکزی دایره ها و در جهت مثبت مثلثاتی می باشند. با توجه به مقادیر متغیرهای  $t, s$  می توان عبارات انتگرالها را بر حسب توابع اورتوگونال  $\rho$  و  $\sigma$  محاسبه و بیان کرد. ابتدا فرض می کنیم که داشته باشیم:

$$F_j^{n-1}(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} p_{ij}^{n-1} \sigma^{-i}, \quad j = 1,2,\dots,m \quad (24)$$

$$F_k^n(s) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} p_{rk}^n \rho^{-r}, \quad k = 1,2,\dots,m \quad (25)$$

با جایگزینی این مقادیر در انتگرالهای عبارت (۲۱) و همچنین در نظر گرفتن فرمولهای (۲۳) می توان عبارتهای انتگرالی را بر حسب اورتوگونال مورد بحث محاسبه کرد برای این کار از فرمولهای انتگرالی کوشی روی تحلیلی و مشتقات آنها استفاده می کنیم.

برای داشتن جزئیات می توان به مرجع [۱۰] مراجعه کرد. در نهایت رابطه بین ضرائب فوریه توابع  $F_j^{n-1}(t), F_j^n(t)$  را می توان بدست آورد بعد از ساده کردن عبارات خواهیم داشت.

$$P_{rk}^n = P_{rk}^0 - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{+\infty} \left\{ \binom{-r+i-1}{i-1} \frac{(-1)^i R_k^{-r} R_j^i P_{ij}^{n-1}}{(A_j - A_k)^{-r+i}} \right\}, \quad r < -1 \quad (26)$$

$$\sigma_x(\infty) = p, \quad \sigma_y(\infty) = q, \quad \tau_{xy}(\infty) = 0 \quad (30)$$

در حالت اول صفحه ای با دو سوراخ دایره ای با شعاع برابر  $R$  در نظر گرفته ایم سپس با ثابت گرفتن شعاع دو دایره فاصله مراکز آنها را از مقداری برابر  $2.3R$  تا ده برابر  $R$  تغییر دادیم و در چندین حالت نسبت مقدار تنش ماگزیم ایجاد شده در محیط را به مقدار تنش ماگزیم موجود در محیطی با یک سوراخ دایره ای بدست آوریم (ضریب  $n$ ).

منحنی تغییرات ضریب  $n$  بر حسب فاصله دو سوراخ دایره ای در نمودار (۱) نشان داده شده است. همانگونه که مشخص است وقتی که فاصله دو سوراخ به اندازه کافی زیاد شود ضریب  $n$  به عددیک نزدیک می شود مثلا مقدار این ضریب در فاصله  $d = 7R$  تقریب  $1.07$  و در حالت  $d=8R$  برابر  $1.05$  می باشد. بنابراین می توان نتیجه گرفت در حالتیکه فاصله دو مرکز از هشت برابر شعاع دو سوراخ بیشتر باشد مقدار ماگزیم تنش ایجاد شده در محیط با ماگزیم تنش موجود در محیطی با یک سوراخ دایره ای تقریباً برابر خواهد بود. یعنی دو سوراخ تقریباً اثری روی میدان تنش یکدیگر نخواهند داشت.

در حالت دوم صفحه ای با دو سوراخ دایره ای به شعاعهای  $R_1, R_2$  در نظر گرفتیم. در اینجا فرض کرده ایم که مرزهای دو سوراخ مطابق شکل به فاصله ثابت  $R$  از هم باشند. ولی شعاع دایره  $C_2$  از مقادیری بسیار کوچک تا مقداری برابر  $6R_1$  تغییر کند سپس در چند حالت مقدار ضریب  $n$  یا به عبارت دیگر نسبت مقدار تنش ماگزیم ایجاد شده در محیط به مقدار تنش موجود در همین صفحه بدون وجود سوراخ را بدست آوریم منحنی تغییرات ضریب  $n$  در کل محیط در نمودار (۲) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می کنیم ماگزیم تنشی در کل محیط با افزایش شعاع  $R_2$  از مقادیری کوچک تا مقدار شعاع  $R_1$  روندی کاهش داشته و در نقطه  $A$  اتفاق افتاده است ولی با بزرگتر شدن مقدار شعاع  $R_2$  تنش ماگزیم افزایش یافته است که مربوط به مقدار  $\sigma_y$  در نقطه  $B$  می باشد.

برای بررسی اثر وضعیت نسبی سوراخها روی تمرکز تنشی که در صفحه ایجاد میشود محیطی شامل سه سوراخ دایره ای در نظر گرفتیم دو سوراخ  $C_1, C_2$  با شعاع  $R$  و

۳- با داشتن مقادیر  $p_{0kr}, p_{1kr}, p_{2kr}, \dots, p_{nkr}$  را تا رسیدن به دقت کافی محاسبه می کنیم.

۴- توابع  $\phi(z), \psi(z)$  از فرمولهای (۲۶) و (۲۹) بدست می آیند.

$$\phi(z) = Bz + \phi_0(z)$$

$$\psi(z) = (B' + iC')z + \psi_0(z)$$

$$\phi_0(z) = \sum_{j=1}^m \phi_j^n(z), \quad \psi_0(z) = \sum_{j=1}^m \psi_j^n(z)$$

که در آن  $\phi_j^n(z), \psi_j^n(z)$  از فرمولهای (۲۹) بدست می آیند.

۵- بعد از بدست آوردن توابع  $\phi(z), \psi(z)$  توابع تنش را در محیط می توان از فرمولهای زیر محاسبه کرد.

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re}[\phi'(z)]$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)]$$

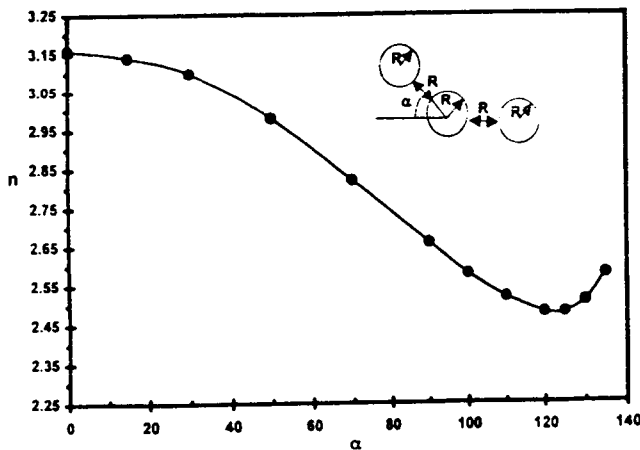
### حل چند محیط نمونه

جهت کنترل و بررسی روش تحلیلی که در بخش قبل بکار برده شد ابتدا بر اساس مراحلی که بیان شد برنامه ای به زبان Mathematica که یک نرم افزار تخصصی ریاضی است نوشته شده است. در این برنامه علاوه بر مشخصات محیط مورد نظر برای استفاده از فرمولهای (۲۶) تا (۲۸) بایستی حد بالائی مناسب برای اندیسهای  $i, n$  مشخص کنیم.

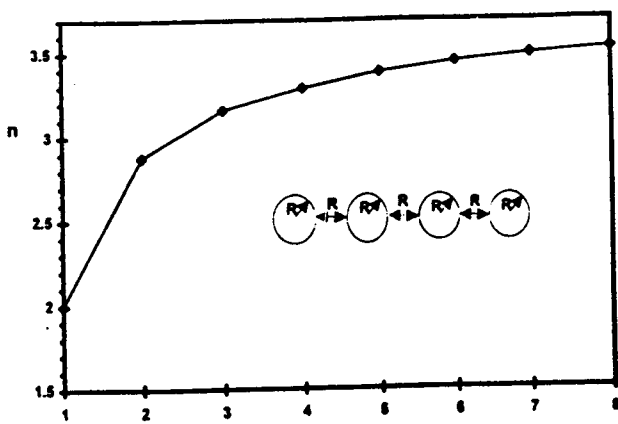
طبیعی است که هر چه فواصل دایره ای  $C_k, C_j$  یعنی  $|A_i - A_j| = R_j$  نسبت به مقادیر شعاعهای سوراخها بیشتر باشد مقدار کمتری برای حد بالای  $i$  می توان در نظر گرفت. مقدار اندیس  $n$  یا دفعات تکرار در فرمولهای مزبور نیز بستگی به دقت مورد نظر در جواب خواهد داشت تکرار در فرمولها را بایستی تا جایی ادامه داد که تفاوت ضرائب  $p_{ij}^n, p_{ij}^{n-1}$  تا حد لازم کوچک باشد، به شکلی که شرایط مرزی محیط تا حد دقت مورد نظر ارضاء گردند.

بر اساس برنامه ای که نوشته ایم چهار محیط الاستیسیته را مورد بررسی قرار داده ایم. در هر یک از این حالات فرض کرده ایم که صفحه مورد نظر در بی نهایت تحت چنین تنشی قرار داد.

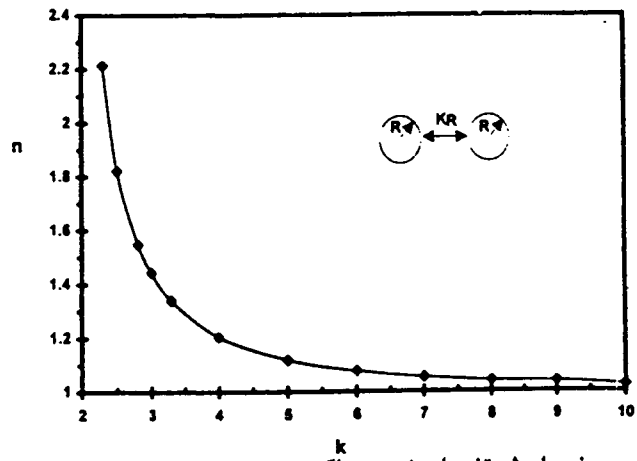
جهت بررسی اثر تعداد سوراخها روی تمرکز تنش محیط ابتدا مقدار ضریب  $n$  را در صفحه  $a$  با یک سوراخ دایره ای به شعاع  $R$  بدست آوردیم سپس مقدار  $n$  را برای صفحه ای شامل دو سوراخ دایره ای به شعاع  $R$  و به فاصله  $R$  محاسبه کردیم به همین ترتیب تعداد سوراخها را در یک ردیف و به فاصله  $R$  از یکدیگر افزایش دادیم نمودار (۴) نشان دهنده تغییرات تنش ماگزیمم در کل محیط نسبت به افزایش تعداد سوراخها می باشد. طبیعی است که با افزایش تعداد سوراخها از حد مشخصی افزایش ایجاد شده بسیار جزئی خواهد بود مثلاً با افزایش سوراخها از هفت به هشت عدد تنها به مقدار  $0.02$  به ضریب  $n$  اضافه شده است و بنابراین برای محیطی به همین شکل و با سوراخهای بیشتر از هشت عدد می توان همین میزان تمرکز تنش را به طور تقریب بکاربرد



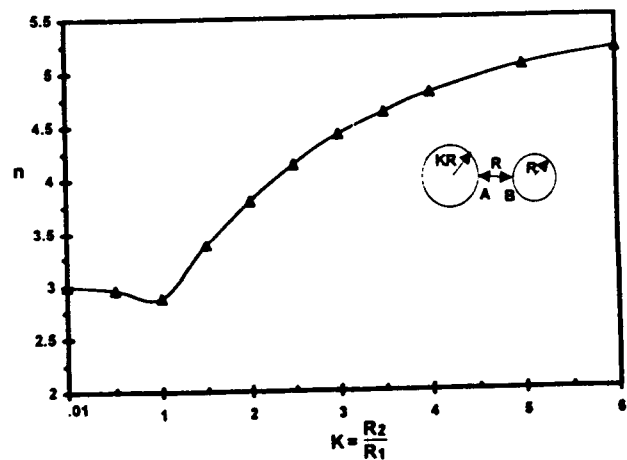
نمودار ۳: تغییرات ضریب تمرکز تنش با تغییر وضعیت نسبی سه دایره.



نمودار ۴: تغییرات ضریب تمرکز تنش با افزایش تعداد سوراخهای دایره ای.



نمودار ۱: تغییرات نسبت ماگزیمم تنش در محیطی با دو سوراخ دایره ای به ماگزیمم تنش در محیطی با یک سوراخ برحسب فاصله دوسوراخ دایره ای.



نمودار ۲: تغییرات ضریب تمرکز تنش برحسب تغییر نسبت شعاع دوسوراخ دایره ای.

به فاصله ثابت  $R$  مطابق شکل قرار دارند. مکان سوراخ دایره ای  $C_3$  را به شکلی تغییر داده ایم که فاصله آن از  $C_2$  همواره مقدار ثابت  $R$  باشد زاویه خطر المکزین دو دایره  $C_2, C_3$  با محور افقی مطابق شکل  $\alpha$  فرض میشود.  $\alpha$  را از حد صفر تا  $130$  درجه افزایش دادیم و در چند وضعیت مختلف مقدار ضریب  $n$  یا به عبارتی دیگر نسبت مقدار تنش ماگزیمم ایجاد شده در محیط به تنش در صفحه ای بدون سوراخ را بدست آوردیم. منحنی تغییرات این ضریب نسبت به زاویه  $\alpha$  در نمودار (۳) نشان داده شده است. مطابق نمودار مقدار ماگزیمم  $n$  در زاویه  $\alpha$  برابر صفر ایجاد می شود که برابر  $3.17$  می باشد. با افزایش  $\alpha$  مقدار  $n$  کاهش می یابد تا به کمترین حد خود در حد زاویه  $120$  درجه و به مقدار  $25$  برسد این تغییرات نشان دهنده تأثیرات وضعیت نسبی سوراخها روی جریان تنش و ایجاد تمرکز تنش در صفحات است.



## نتیجه گیری

در این مقاله حل مسائل الاستیسیته دوبعدی در یک محیط همبند چندگانه شامل صفحه ای نامحدود با سوراخهای متعدد دایره ای مورد بررسی قرار گرفته است. شرایط مرزی روی مرزهای داخلی و مرز بی نهایت اعمال می شود. همچنین از روش بکار رفته می توان برای حل محیطهای همبند چندگانه محدود در حالتیکه مرز خارجی به اندازه کافی از مرزهای داخلی فاصله داشته باشد استفاده کرد چرا که در چنین حالتی تنشهای اعمال شده روی مرزهای داخلی اثر ناچیزی روی میدان تنش در نزدیکی مرز خارجی خواهند داشت. بررسی نتایج نشان می دهد هنگامیکه فواصل سوراخهای موجود در صفحه از حد مشخصی بیشتر شود مقدار تمرکز تنش ایجاد شده در چنین محیطی با تمرکز تنش ایجاد

شده در محیطی شامل یک سوراخ دایره ای برابر خواهد بود برای مثال وقتی که فاصله مراکز دو سوراخ دایره ای از هشت برابر شعاع آنها بیشتر باشد مقدار افزایش تمرکز تنش در محیط کمتر از پنج درصد خواهد بود. همچنین بررسی محیطهای مختلف نشان میدهد که وضعیت قرارگیری سوراخها نسبت به هم تا حد زیادی روی تمرکز تنش ایجاد شده در محیط تأثیر می گذارد. بررسی تمرکز تنش در صفحه ای با دو سوراخ دایره ای نامساوی نیز نشان داد که با ثابت بودن فاصله مرزهای دو سوراخ، افزایش شعاع بزرگترها موجب افزایش تمرکز تنش در محیط می شود در صورتیکه افزایش شعاع سوراخ کوچکتر تأثیر چندانی روی تمرکز تنش محیط نخواهد داشت.

## مراجع

- 1 - Muskhelishvili, N. I. (1953). *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity.*, Nordhoff, Groningen.
- 2 - XU, Z. (1992). *Applied elasticity*, Wiley., Eastern Limited.
- 3 - Sokolnikoff, S. I. (1965). *Mathematical theory of elasticity*, McGraw-Hill, New York, N.J.
- 4 - Nemat-Nasser, S. and Horii, H. (1994). *Introduction to Micromechanics*.
- 5 - Hill, R. (1965). "Self-consistent mechanics of composite materials." *J. Mech., Phys. Solids*, Vol. 13, PP. 213-222
- 6 - Churchill, R. V. (1960). *Complex variables and applications*. McGraw-Hill.
- 7 - Ivanov, V. I. and Tuabetskov, M. K. (1995). *Handbook of conformal mapping with computer - aided, Boca raton, Florida: CRC Press*.
- ۸ - رحیمیان، م.، اسکندری فادی، م. "مکانیک محیطهای پیوسته". انتشارات دانشگاه تهران (۱۳۷۷).
- ۹ - مطهری، س.م. "کاربرد اعداد مختلط در حل مسائل تمرکز تنش". پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی عمران، دانشکده فنی دانشگاه تهران.
- ۱۰ - حسینخانی، ع. ر. "کاربرد اعداد مختلط در حل مسائل الاستیسیته دوبعدی". پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی عمران، دانشکده فنی دانشگاه تهران.

