

# اهمیت ترمهای اینرسی در برآورد اثر پدیده لغزش بر ضخامت فیلم مایع در فرآیند روکش دهی از نوع آزاد سیالات غیر نیوتنی

کیوان صادقی

استادیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

محمد باقر قاسمیان امیری

فارغ التحصیل کارشناسی ارشد گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۷۸/۷/۶، تاریخ تصویب ۷۹/۸/۷)

## چکیده

در این مقاله، اهمیت در نظر گرفتن ترمهای اینرسی در پیش بینی ضخامت نهایی فیلم مایعات غیر نیوتنی در فرآیند روکش دهی از نوع آزاد، در مواقعی که با پدیده لغزش در دیواره مواجه هستیم، نشان داده شده است. برای این منظور، جریان یک سیال غیر نیوتنی از نوع "نمایی" را در بالای ورقی تخت که بطور قائم و با سرعتی ثابت از میان حمامی از سیال بیرون کشیده میشود در نظر می گیریم. با فرض اینکه ضخامت لایه سیالیکه به ورق چسبیده است بسیار نازک و جریان نیز از نوع آرام و دوبعدی باشد، نشان میدهم که معادلات حرکت به یک تک معادله دیفرانسیل از نوع عادی، درجه سه و غیرخطی تبدیل میشوند. برای بررسی اثر پدیده لغزش بر ضخامت فیلم مایع، سرعت لغزش در دیواره بعنوان یکی از متغیرهای اصلی در این معادله دیفرانسیل وارد شده است. با حل عددی این معادله نشان داده میشود که اختلاف قابل ملاحظه ای که در مورد ضخامت لایه روکش، بین پیش بینیهای تئوریک و نتایج تجربی، در مورد برخی از سیالات غیر نیوتنی، وجود دارد با رها نمودن شرط عدم لغزش به حداقل خواهد رسید. همچنین نشان داده میشود که در صورتیکه بر خلاف حلهای رایج، از ترمهای اینرسی در معادلات حرکت صرف نظر نشود در اینصورت حتی مقادیر اندک لغزش سیال در دیواره قادر است که پیش بینی های تئوریک را به مقادیر آزمایشگاهی بسیار نزدیک سازد.

**واژه های کلیدی:** فرآیند روکش دهی، لغزش، سیال غیرنیوتنی، سیال نمایی، تقریب فیلم نازک،

سیال ویسکوالاستیک

## مقدمه

خاصی در صنعت برخوردار است [۱]. آزمایشات متعدد نشان داده است که ضخامت نهایی فیلم مایع، تابعی از خواص فیزیکی سیال (ویسکوزیته، دانسیته، کشش سطحی)، شتاب ثقل و نیز سرعت بیرون کشیدن ورق از حمام سیال می باشد (در مورد سیالات غیر نیوتنی علاوه بر خواص فیزیکی سیال، خواص ویسکوالاستیک آن نیز ممکن است از اهمیت خاصی در تعیین ضخامت نهایی لایه روکش برخوردار باشند [۱]).

در طی دهه های گذشته، روابط تئوریک متعددی بر پایه حل معادلات ناویر - استوکس (در اغلب موارد با استفاده از یک سری فرضیات ساده کننده) برای پیش بینی

فرآیند روکش دهی از نوع آزاد<sup>۱</sup> دارای جایگاه ویژه ای در صنعت است و از آن بطور وسیع در تولید نوار چسب، کاغذ دیواری، فیلمهای عکاسی و ویدیویی، ورق گالوانیزه و ... استفاده میشود [۱-۳]. در طی این فرآیند، از میان ظرف بزرگی حاوی سیال مورد نظر، ورقی تخت بطور پیوسته و با سرعتی ثابت بیرون کشیده میشود و به همراه خود مقداری از سیال را بصورت لایه ای نازک از ظرف خارج می سازد (شکل ۱). سیالیکه بدین صورت از ظرف خارج میشود، پس از خشک شدن، بصورت روکشی هموار روی سطح مورد نظر را می پوشاند. بدیهی است که ضخامت نهایی این لایه و چگونگی کنترل آن از اهمیت

مورد ضخامت لایه روکش انجام دهند. طبق این استدلال، در اکثر عملیات روکش دهی از نوع آزاد، نرخ کرنشهای کششی و برشی بسیار بالا می باشد، در نتیجه این احتمال قوی وجود دارد که حتی در مورد سیالاتی که علی الظاهر دارای الاستیسیته ضعیفی می باشند، اثرات الاستیک ممکن است خود را در عمل بصورت کاهش در ضخامت فیلم مایع ظاهر سازند. با اینوصف، استدلال فوق قادر نبود این نکته را روشن سازد که چرا در مورد برخی از سیالاتیکه (بر اساس آزمایشات ویسکومتریکی) در مورد غیر الاستیک بودن آنها تردیدی وجود ندارد، اختلاف بین نتایج تئوریک (بر اساس استفاده از معادلات رئولوژیک غیر الاستیک فوق) و نتایج تجربی، در برخی از موارد حتی بیش از مقدار آن در مورد سیالات ویسکوالاستیک<sup>۲</sup> بوده است.

در نظریه دوم که بوسیله Mashelkar و Dutta پیشنهاد شد، اختلاف بین نتایج تئوریک و نتایج تجربی در مورد ضخامت فیلم مایع، به لغزش سیال در دیواره نسبت داده شد [۸]. برای اثبات این نظریه، Mashelkar و Dutta از روابط کلاسیک White و Tallmadge که برای پیش بینی ضخامت لایه روکش در مورد سیالات غیر الاستیک بدست آمده بود [۹] استفاده نمودند و با وارد کردن سرعت لغزش بعنوان پارامتری قابل تنظیم در این معادلات، بخوبی نشان دادند که لغزش سیال در دیواره میتواند بتهنهایی نتایج تئوریک را در مورد ضخامت لایه روکش به نتایج تجربی عملاً منطبق گرداند.

این کار تحقیقاتی را میتوان در راستای کار Dutta و Mashelkar دانست. عبارت دیگر، این فرضیه که در فرآیند روکش دهی آزاد سیالات غیرنیوتنی (از نوع غیرالاستیک)، لغزش سیال در دیواره، می تواند عامل اصلی در بوجود آمدن اختلاف بین نتایج تئوریک و نتایج تجربی باشد در این مقاله نیز مورد پذیرش قرار گرفته است با اینوصف اعتقاد بر این است که در آنالیز انجام شده توسط Mashelkar و Dutta سرعتهای لغزش مورد نیاز برای اینکه بتوان نتایج تجربی را در مورد برخی از محلولهای پلیمری توجیه نمود بسیار بالا و غیر واقعی بدست می آید (در برخی از موارد، سرعت لغزش مورد نیاز

ضخامت فیلم مایع در مورد سیالات نیوتنی پیشنهاد شده اند که اغلب آنها بخوبی کارآیی خود را در عمل به اثبات رسانیده اند [۵،۴]. بنحویکه امروزه میتوان به جرات ادعا نمود که مبحث روکشدهی آزاد در مورد این دسته از سیالات، میحتی کامل و بی نقص می باشد. با اینوصف، متاسفانه از آنجاییکه در بسیاری از موارد با سیالاتی سروکار داریم که دارای رفتاری غیر نیوتنی می باشند (مثال: محلولها و مذابهای پلیمری، سوسپانسیونها، امولسیونها و...) از اینرو روابط تئوریک بدست آمده در مورد سیالات نیوتنی، در اغلب موارد دارای کاربرد چندانی در صنعت روکشدهی نمی باشند.

به منظور پیش بینی دقیقتر ضخامت فیلم مسایع در عملیات روکشدهی آن دسته از سیالات صنعتی که دارای رفتاری غیر نیوتنی می باشند لازم است از معادلات رئولوژیک بر مراتب پیچیده تری نسبت به رابطه رئولوژیک ساده نیوتن،  $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ ، استفاده شود. در همین راستا، معادلات Ellis، Power-Law و Bingham Plastic (که جزو ساده ترین معادلات رئولوژیک محسوب میشوند) طی سالیان گذشته توسط محققین مختلف مورد استفاده قرار گرفتند (بعنوان مثال، به مرجع [۶] رجوع شود). با اینوصف، نه تنها بهبود قابل ملاحظه ای در دقت پیش بینیهای تئوریک حاصل نشد بلکه بنحو تعجب آوری، ضخامتهای پیش بینی شده با استفاده از این معادلات رئولوژیک همواره از آنچه مقادیر تجربی نشان میدهد بیشتر بوده است [۶].

برای توجیه این امر که چرا معادلات رئولوژیک فوق الذکر همواره مقادیری بیش از آنچه مشاهدات تجربی نشان میدهد برای ضخامت فیلم مایع پیش بینی میکنند، کلاً دو نظریه زیر پیشنهاد شده اند: در نظریه اول که بتوسط Middleman مطرح شد، عدم توفیق معادلات فوق در پیش بینی ضخامت لایه روکش، به خواص الاستیک سیالات مورد آزمایش نسبت داده شد [۷]. بر طبق این نظریه، از آنجاییکه مدلهای رئولوژیک فوق تنها برای آن دسته از سیالات غیر نیوتنی که فاقد هر گونه خواص الاستیک می باشند صادقند، نباید از آنها انتظار داشت که در مورد سیالات الاستیک پیش بینی واقع بینانه ای در

برای اینکه بتوان نتایج تئوریک را به نتایج تجربی نزدیک گرداند برابر با ۰/۹۹ سرعت ورق گزارش شده است که غیر قابل قبول بوده و تنها در مورد برخی از مذابهای پلیمری با مشاهدات عینی هماهنگی دارد). در این کار تحقیقاتی نشان می‌دهیم که میتوان حتی در سرعتهای لغزش بسیار کمتری نیز نتایج تئوریک را بهبود بخشید مشروط بر اینکه بر خلاف معادلات استفاده شده توسط Dutta و Mashelkar (معادلات White و Tallmadge)، از ترمهای اینرسی در معادلات حرکت صرف نظر نشود.

### فرضیه لغزش

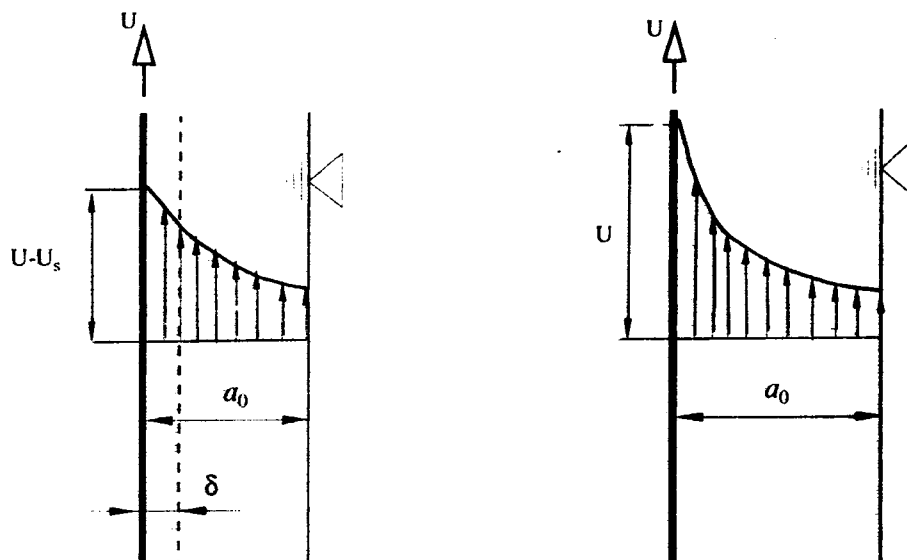
شرط عدم لغزش شرطی پذیرفته شده در مورد سیالات نیوتنی است که درستی آن به کرات با اندازه گیری دقیق پروفیل سرعت در مجاورت دیواره به اثبات رسیده است. در مورد سیالات غیر نیوتنی و بطور کلی سیالاتیکه دارای ساختاری پیچیده هستند (محلولهای پلیمری، سوسپانسیونها، امولسیونها...) مشاهدات تجربی حاکی از آن است که این شرط ممکن است همواره برقرار نباشد [۱۱،۱۰]. بعنوان مثال، چنانچه ویسکوزیته اینگونه سیالات با استفاده از یکدستگاه ویسکومتر از نوع مخروط - صفحه اندازه گرفته شود و سپس از آن برای پیش بینی دبی حجمی چنین سیالاتی در جریان آرام از میان یک لوله مویین استفاده شود، مشاهده خواهد شد که مقدار دبی پیش بینی شده (با استفاده از فرمول پوازی) بمراتب کمتر از دبی تجربی است بنحویکه اختلاف بین این دو دبی، با کاهش قطر لوله بیشتر میگردد. این پدیده غالباً به لغزش سیال در دیواره نسبت داده میشود [۱۱،۱۰].

در میان سیالات غیرنیوتنی، تنها مذابهای پلیمری هستند که حقیقتاً بر روی سطوح جامد می‌لغزند (پروفیل سرعت در دیواره ناپیوسته است) و لغزش در مورد سایر سیالات غیرنیوتنی (مثال: محلولهای پلیمری) اساساً از نوع ظاهری است و نه واقعی. در حقیقت، بررسیهای دقیق نشان داده است که علت افزایش دبی در جریان آرام از میان یک لوله، لغزش سیال در دیواره نیست بلکه علت واقعی آن تشکیل لایه ای نازک با ویسکوزیته کم (نزدیک به ویسکوزیته حلال یا فاز پیوسته) در مجاورت دیواره است

بطوریکه در مورد خود این لایه نازک، شرط عدم لغزش همچنان برقرار می‌باشد. مکانیزمهای مختلفی در تشکیل این لایه دخیل می‌باشند که در مورد محلولهای پلیمری، یکی از مهمترین آنها مهاجرت مولکولها از دیواره به سمت مرکز لوله در اثر وجود گرادیان انتروپی در لوله است (انتروپی در مرکز لوله یعنی جاییکه تنش برشی صفر است بمراتب بیش از انتروپی در مجاورت دیواره است). در اثر این مهاجرت مولکولی، از غلظت پلیمر در مجاورت دیواره کاسته شده و در نتیجه ویسکوزیته سیالیکه در تماس با جدار داخلی لوله است بشدت کاهش می‌یابد و همچون یک روانکار<sup>۳</sup> موجب افزایش در دبی میگردد [۱۱،۱۰].

پدیده لغزش ظاهری، علاوه بر جریان در یک لوله، در جریان ثقلی<sup>۴</sup> یک سیال غیرنیوتنی بر روی یک سطح شیبدار نیز مشاهده شده است [۱۲]. اگر چه در مورد فرآیند روکش دهی از نوع آزاد، تا به امروز هیچگونه اطلاعات تجربی در رابطه با لغزش در دیواره گزارش نشده است، با اینوصف با توجه به شباهتهای زیاد بین این دو جریان و با توجه به اینکه در فرآیند روکش دهی آزاد، ضخامت فیلم مایع معمولاً به مراتب کمتر و ابعاد صفحه نیز بمراتب بیشتر از مقدار آن در جریان ثقلی است، بنظر میرسد که در فرآیند روکش دهی آزاد، زمان کافی برای مهاجرت مولکولها از دیواره و وقوع پدیده لغزش وجود داشته باشد.

برای تخمین ضخامت لایه لغزش در فرآیند روکش دهی آزاد میتوان از آنالیزی که توسط Metzner و همکارانش [۱۳] صورت پذیرفته است استفاده نمود. بر طبق این آنالیز، از آنجاییکه لغزش پدیده ای است که با مهاجرت مولکولها در ارتباط است از اینرو ضریب پخش مولکولی<sup>۵</sup>، D، بعنوان اصلی ترین خاصیت سیال مطرح می‌باشد بطوریکه ضخامت لایه لغزش،  $\delta$ ، (شکل ۱) را میتوان متناسب با جذر Dt در نظر گرفت (t زمان موجود برای مهاجرت مولکولها از مجاورت دیواره بوده و خود از مرتبه  $L/U^*$  است که L طول صفحه و  $U^*$  سرعت موثر صفحه و یا عبارت دیگر اختلاف  $U_s - U$  است، U سرعت بیرون کشیدن ورق و  $U_s$  نیز سرعت لغزش در دیواره است). از طرفی،  $U_s$  را میتوان براحتی با استفاده از



شکل ۱: اثر لغزش (ظاهری) بر پروفیل سرعت و ضخامت فیلم مایع در بالای ورق.

اندازه کافی بزرگ است تا بتواند بر روی دیبی حجمی سیالیکه بوسیله ورق از حمام سیال بیرون کشیده میشود تاثیر قابل ملاحظه ای بگذارد.

### تئوری

شکل (۲) یک فرآیند روکش دهی از نوع آزاد را بطور شماتیک نشان می دهد. همانطوریکه در این شکل مشاهده میشود، ورق تختی بطور قائم، با سرعتی ثابت از میان ظرف بزرگی که حاوی سیالی غیر نیوتنی است بیرون کشیده میشود و به همراه خود مقداری از این سیال را از ظرف خارج می نماید. با توجه به اینکه اغلب سیالاتی که در صنعت روکشدهی مورد استفاده قرار میگیرند سیالاتی غیر الاستیک می باشند، در اینجا برای سادگی آنالیز از مدل رئولوژیک معروف زیر که تنها برای چنین سیالاتی کاربرد دارد استفاده شده است (این مدل رئولوژیک، معرف دسته بزرگی از سیالات صنعتی است که اصطلاحاً سیالات نامایی<sup>۶</sup> نامیده میشوند).

$$\tau = m (du/dy)^n \quad (2)$$

در این رابطه،  $m$  و  $n$  پارامترهای مربوط به "مدل نامایی" هستند که برای تعیین آنها لازم است در ابتدا چگونگی تغییرات ویسکوزیته سیال با نرخ برش

ویسکومتر لوله موئین بصورت تابعی از تنش برشی در دیواره،  $\tau_w$ ، بدست آورد که رابطه بین این دو متغیر معمولاً بصورت تابع نمایی  $U_s = \alpha \tau_w^\beta$  ظاهر میشود [۱۴] (ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  از طریق پردازش این معادله به داده های بدست آمده از ویسکومتر تعیین میگردند). با توجه به اینکه در فرآیند روکش دهی از نوع آزاد، تنش برشی در دیواره برابر با  $\gamma a_0$  است در اینصورت میتوان به رابطه زیر در مورد ضخامت لایه لغزش دست یافت [۱۳]:

$$\frac{\delta}{a_0} \approx \frac{DL/a_0^2}{U - \alpha(\gamma a_0)^\beta} \quad (1)$$

در مورد محلولهای پلیمری، ضریب پخش  $D$  در حدود  $10^{-7} \text{ cm}^2/\text{s}$  و ضخامت لایه روکش  $a_0$  در صنعت معمولاً در حدود  $10^{-2} \text{ cm}$  است. طول صفحه  $L$  نیز غالباً از مرتبه  $10^2 \text{ cm}$  و سرعت بیرون کشیدن ورق در اغلب موارد در حدود  $10 \text{ cm/s}$  است. ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  به نوع پلیمر و غلظت آن بستگی دارند بطوریکه  $\alpha$  در مورد بسیاری از روکشهای پلیمری در حدود  $10^{-6} \text{ cm}^2/\text{sg}$  و توان  $\beta$  نیز معمولاً نزدیک به یک می باشد. با قرار دادن مقادیر فوق (که از مرجع [۱۳] اخذ شده اند) در معادله ۱، میتوان پیش بینی نمود که ضخامت لایه لغزش در حدود ۲۰ درصد از ضخامت نهایی فیلم مایع باشد که به

می باشند، از این رو میتوان به جای عدد رینولدز در معادله ۳ از عدد بدون بعد دیگری که "عدد خواص سیال"<sup>۷</sup> نام دارد و با  $\Lambda$  نشان داده میشود استفاده نمود [۱۵]:

$$\Lambda = \frac{\sigma}{\rho} \left[ g^{3n-2} \left( \frac{m}{\rho} \right)^4 \right]^{-\left( \frac{1}{n+2} \right)} \quad (5)$$

با توجه به تعاریف  $\Lambda$  و  $Re$  میتوان رابطه زیر را بین آنها نوشت [۱۵]:

$$Re = T^{3n-2} (Ca \cdot \Lambda)^{\left( \frac{2+n}{n} \right)} \quad (6)$$

در یک فرآیند روکشدهی از نوع آزاد، علاوه بر خواص سیال، معمولا سرعت بیرون کشیدن ورق نیز جزو معلومات مسئله است بطوریکه تنها مجهول مسئله در واقع ضخامت بدون بعد  $T$  است که باید بصورت تابعی از پارامترهای فوق پیدا شود. برای اینکه نشان دهیم چگونه با معلوم بودن  $Ca$  و  $\Lambda$  میتوان  $T$  را تعیین نمود، شکل

اندازه گیری شود و سپس با پردازش معادله فوق به این داده های آزمایشگاهی، ضرایب مزبور تعیین گردند).

برای یک سیال نمایی، ضخامت نهایی لایه روکش،  $a_0$ ، تابعی از دانسیته سیال  $\rho$ ، شتاب ثقل  $g$ ، کشش سطحی  $\sigma$ ، سرعت ورق  $U_0$ ، و پارامترهای رئولوژیک  $m$  و  $n$  می باشد. با استفاده از آنالیز ابعادی، میتوان براحتی نشان داد که برای چنین سیالی، ضخامت بدون بعد  $T$  تابعی از عدد رینولدز  $Re$  و عدد موینگی  $Ca$  است [۱۵]، یعنی:

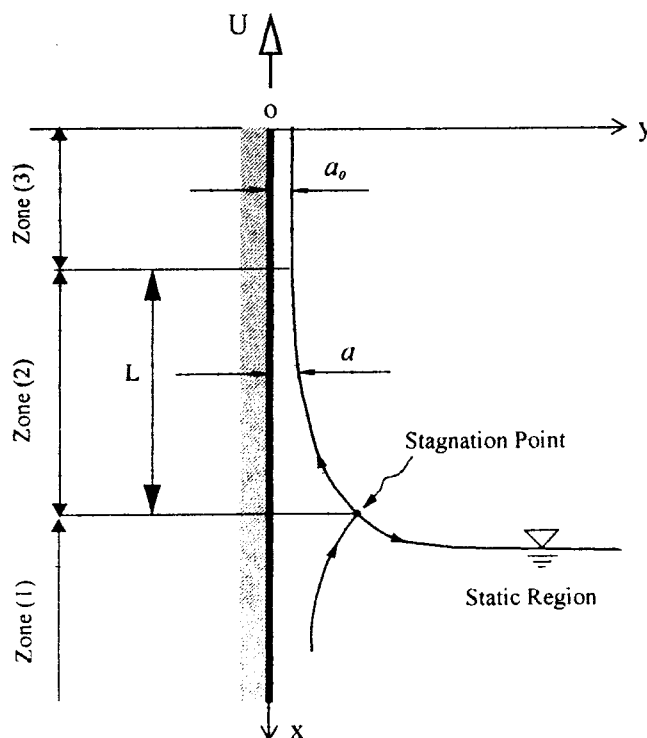
$$T = f_1(Re, Ca) \quad (3)$$

در رابطه فوق، پارامترهای (بدون بعد) مختلف بصورت زیر تعریف می شوند [۱۵]:

$$T = a_0 \left[ \frac{\rho g}{m U_0^n} \right]^{\left( \frac{1}{n+1} \right)} ; \quad Re = \frac{\rho U_0^{2-n} a_0^n}{m}$$

$$Ca = \frac{m a_0^{1-n} U_0^n}{\sigma} \quad (4)$$

با توجه به اینکه معمولا خواص سیال جزو معلومات مسئله



شکل ۲: فرآیند روکشدهی آزاد بطور شماتیک.

یک ولی بمراتب بزرگتر از صفر است (معمولا در مورد اغلب سیالات صنعتی،  $n$  بین ۰/۳ تا ۰/۶ قرار دارد [۱۶])، در نتیجه در معادله فوق میتوان از ترم دیفیوژن در جهت  $x$  نسبت به ترم مشابه آن در جهت  $y$  (جهت گرادیان سرعت) صرف نظر نمود. در اینصورت برای تعیین ضخامت بدون بعد  $T$ ، کافی است از معادله فوق به همراه معادله پیوستگی، با در نظر گرفتن شرایط مرزی زیر، انتگرال گرفته شود:

$$@ y = 0; u = U_0 - U_s; v = 0$$

$$@ y = h; \quad du/dy = 0; \quad P = P_{at} - (\rho^2 h/dx^2) \quad (۸)$$

در رابطه فوق  $U_0$  سرعت ورق،  $U_s$  سرعت لغزش و  $h$  نسبت بین ضخامت واقعی فیلم مایع در هر مقطع،  $a$ ، و ضخامت نهایی آن،  $a_0$  است ( $h = a/a_0$ ). برای انتگرال گیری از معادله ۷، لازم است که پروفیل سرعت در هر مقطع،  $u(x,y)$ ، معلوم باشد. در اینجا با توجه به اینکه فیلم سیال در بالای ورق بسیار نازک و  $da/dx$  نیز بسیار کوچک است، میتوان از پروفیل سرعت مربوط به "جریانی با ضخامت ثابت روی یک صفحه تخت" برای این منظور استفاده نمود. برای چنین جریانی، پروفیل سرعت براحتی از حل دقیق معادلات حرکت بدست می آید که با در نظر گرفتن لغزش در دیواره، این پروفیل بصورت زیر در می آید (به مرجع [۱۷] رجوع شود):

$$u(x,y) = \frac{2n+1}{n+1} [U(x) + U_0 - U_s] \left[ 1 - \left( 1 - \frac{y}{a} \right)^{n+1} \right] - U_0 + U_s \quad (۹)$$

در رابطه فوق،  $U(x)$  سرعت متوسط سیال در هر مقطع است

با معلوم شدن  $u(x,y)$ ، میتوان مولفه دیگر سرعت،  $v(x,y)$ ، را با استفاده از معادله پیوستگی بدست آورد و سپس هر دو مولفه را در معادله ۷ جایگزین نمود [۱۷]. با توجه به اینکه سطح آزاد سیال بالای ورق جزو خطوط جریان به شمار میرود، بنابراین میتوان دبی حجمی سیال

(۲) را مجدداً مورد ملاحظه قرار میدهیم. در حالت کلی به المانی از سیال در بالای ورق، چهار نیروی عمده نقل، کشش سطحی، لزجت و اینرسی اثر میکنند. با توجه به اینکه اهمیت این نیروها از نظر مرتبه بزرگی در بخشهای مختلف جریان با یکدیگر برابر نیست، میتوان از نقطه نظر هیدرودینامیک، جریان سیال روی ورق را به سه ناحیه مجزا از هم تقسیم نمود: ناحیه شماره (۱) در شکل، ناحیه ای در مجاورت ظرف سیال است که در آن نیروهای کشش سطحی نسبت به سایر نیروها از اهمیت بیشتری برخوردار می باشند. این ناحیه دارای این ویژگی مهم است که دارای یک نقطه سکون می باشد. ناحیه شماره (۳) ناحیه ای است که دورترین فاصله را تا سطح آزاد مایع دارا می باشد. در این ناحیه، تعادل بین نیروهای لزجت و نقل منجر به یکنواخت شدن ضخامت فیلم مایع میشود ( $a_0$ ). ناحیه شماره (۲) نیز ناحیه ای است که دو ناحیه (۱) و (۳) را بیکدیگر می پیوندد. در این ناحیه ضخامت فیلم مایع در اثر رقابت بین نیروهای مختلف نقل، کشش سطحی و لزجت بتدریج کاهش می یابد. طول این ناحیه  $L$ ، بمراتب کوچکتر از  $a_0$  است بنحویکه نسبت  $a_0/L$  را میتوان بعنوان یک پارامتر بسیار کوچک در نظر گرفت و در نتیجه از تقریب فیلم نازک<sup>۱</sup> برای ساده کردن معادلات حرکت استفاده نمود. با استفاده از این تقریب، میتوان براحتی نشان داد که معادله ممنتوم در جهت  $y$  تبدیل به رابطه ساده  $\partial P/\partial y = 0$  [۱۵]. بعبارت دیگر، در هر مقطع از فیلم، فشار ثابت بوده و تابعی از  $y$  نمی باشد. در نتیجه، برای حل جریان دوبعدی در بالای ورق، کافی است معادله ممنتوم در جهت  $x$  (جهت حرکت) را حل نماییم که این معادله نیز برای یک سیال نمایی به شکل زیر نوشته میشود [۱۵]:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{mn}{\rho} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{n-1} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n-1} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (۷)$$

با توجه با نازک بودن ضخامت فیلم مایع و نیز این واقعیت که برای اکثر سیالات نمایی، توان  $n$  معمولاً کوچکتر از

لازم است از معادله ۱۰ از شروع ناحیه (۳) به طرف پایین تا نقطه سکون انتگرال گیری شود. برای تسریع در همگرایی، تصمیم گرفته شد که در شروع انتگرال گیری، از تکنیک Levich و Landau (که بطور سنتی در محاسبات مربوط به عملیات روکش دهی آزاد بکار برده می شود) برای انتخاب مقادیر اولیه ای در مورد  $h$  و مشتقات آن استفاده شود. مقادیر مزبور به صورت زیر می باشند [۱۸]:

$$h = 1 + \varepsilon \quad h' = \varepsilon \quad h'' = \varepsilon \quad (13)$$

(در عبارات فوق،  $\varepsilon$  پارامتر بسیار کوچکی از مرتبه یک ده هزارم است).

با استفاده از مقادیر اولیه فوق، از معادله ۱۰ با استفاده از روش رانج - کوتای مرتبه ۴ انتگرال گیری شد و در هر مرحله، حل عددی بدست آمده از معادله، با شرط مرزی در نقطه سکون (معادله ۱۲) مطابقت داده شد تا از میان جوابهای متعدد بدست آمده از حل معادله ۱۰، مقدار درست  $T$  به ازای هر جفت  $Ca$  و  $\Lambda$ ، تعیین شود.

### نتایج و بحث

به منظور نشان دادن اهمیت ترمهای اینرسی در فرآیند روکشی آزاد، از معادله دیفرانسیل ۱۰ به همراه معادله رئولوژیک ۳ برای پیش بینی ضخامت نهایی محلولهای آبی پلیمر Carbopol در دو غلظت مختلف 0.15 wt% و 1.0 wt% (Carbopol علامت تجاری شرکت Good-rich برای پلیمر Carboxypolymethylene است که پلیمری قابل حل در آب از خانواده Vinyl بوده و از آن بطور وسیع در فرآیندهای روکش دهی استفاده می شود) و محلول آبی Separan- AP30 در غلظت 0.9 wt% استفاده بعمل آمد (Separan علامت تجاری شرکت Dow Corning برای پلیمر خطی و بسیار قابل انعطاف polyacrylamide است). بر اساس نتایج بدست آمده از تستهای ویسکومتریک (بعبارت دیگر، با اندازه گیری اختلاف بین تنشهای قائم در سه جهت)، دو محلول Carbopol را میتوان بطور قاطع سیالاتی غیر

را در دو ناحیه (۲) و (۳) با یکدیگر برابر قرار داد و از آنجا به معادله دیفرانسیل مرتبه سه غیر خطی زیر بین نسبت ضخامتها  $(= a/a_0)$ ،  $Ca$ ،  $Re$ ،  $h$  و خواص فیزیکی و رئولوژیکی سیال ( $m, n, \sigma, \mu, \rho$ ) دست یافت (به مرجع [۱۷] رجوع شود):

$$\frac{d^3h}{dz^3} = \frac{Ca \cdot Re}{h^3} \left[ \left( \frac{n}{3n+2} + \theta \right) h^2 - \frac{2(2n+1)}{3n+2} (1 + \theta^2) - \frac{2n^2}{3n+2(2n+1)} T^{\frac{2(n+1)}{n}} + \frac{4n}{3n+2} (1 - \theta) T^{\frac{(n+1)}{n}} + \frac{4(2n+1)}{3n+2} \theta \right] \frac{dh}{h^3} - \frac{Ca}{h^3} \left( \frac{2n+1}{n} \right)^n [\theta - 1] h^{\frac{(2-2n)}{n}} + \frac{n}{2n+1} h^{\frac{(2-2n)}{n}} T^{\frac{(n+1)}{n}} + h^{\frac{(2-n)}{n}} ]^n + Ca T^{(n+1)} \quad (10)$$

(در معادله فوق،  $\theta$  نسبت بین سرعت لغزش  $U_s$  و سرعت ورق  $U_0$  میباشد و  $Z$  نیز برابر با نسبت  $x/a_0$  است). به ازای مقادیر معلوم  $Re$  و  $Ca$ ، میتوان معادله ۱۰ را با استفاده از روش رانج - کوتای مرتبه ۴ حل نمود و از آنجا  $h$  را بصورت تابعی از  $Z$  بدست آورد. با اینوصف، نگاهی مجدد به معادله ۱۰ نشان می دهد که علاوه بر پارامترهای  $Ca$  و  $Re$ ، پارامتر  $T$  نیز در این معادله ظاهر میشود و این بدان معناست که برای یک سیال معین، از حل این معادله، خانواده ای نامتناهی از پروفیلهای  $h(z)$  حاصل میگردد. برای پی بردن به پروفیل صحیح، لازم است که در نقطه سکون (به شکل ۲ رجوع شود)، شرط هیدرواستاتیک زیر اعمال شود [۱۵]:

$$\frac{\sigma}{2\rho g} \left( \frac{d^2a}{dx^2} \right) + \frac{da}{dx} = 1 \quad (11)$$

معادله فوق را بصورت بدون بعد زیر نیز میتوان نوشت:

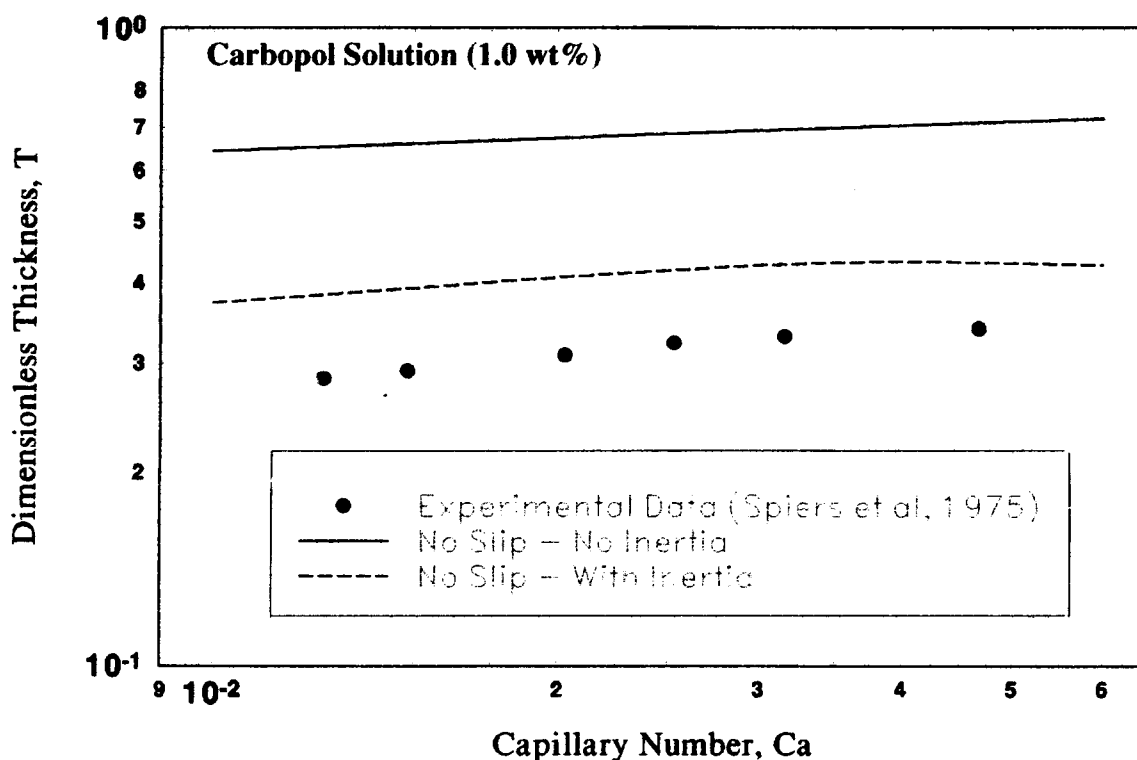
$$\frac{1}{2Ca \cdot T^{2n}} \left( \frac{d^2h}{dz^2} \right) + \frac{dh}{dz} = 1 \quad (12)$$

### حل عددی

برای محاسبه  $T$  بصورت تابعی از  $Ca$  و  $\Lambda$ ،

جدول ۱: خواص رئولوژیکی سیالات غیر نیوتنی مورد مطالعه در این پروژه.

سیال	ضریب $m$ ( $N.s^n/m^2$ )	ضریب $n$
محلول Carbopol (0.15 wt%)	0.90	0.520
محلول Carbopol (1.0 wt%)	0.33	0.610
محلول Separan (0.9 wt%)	5.40	0.314

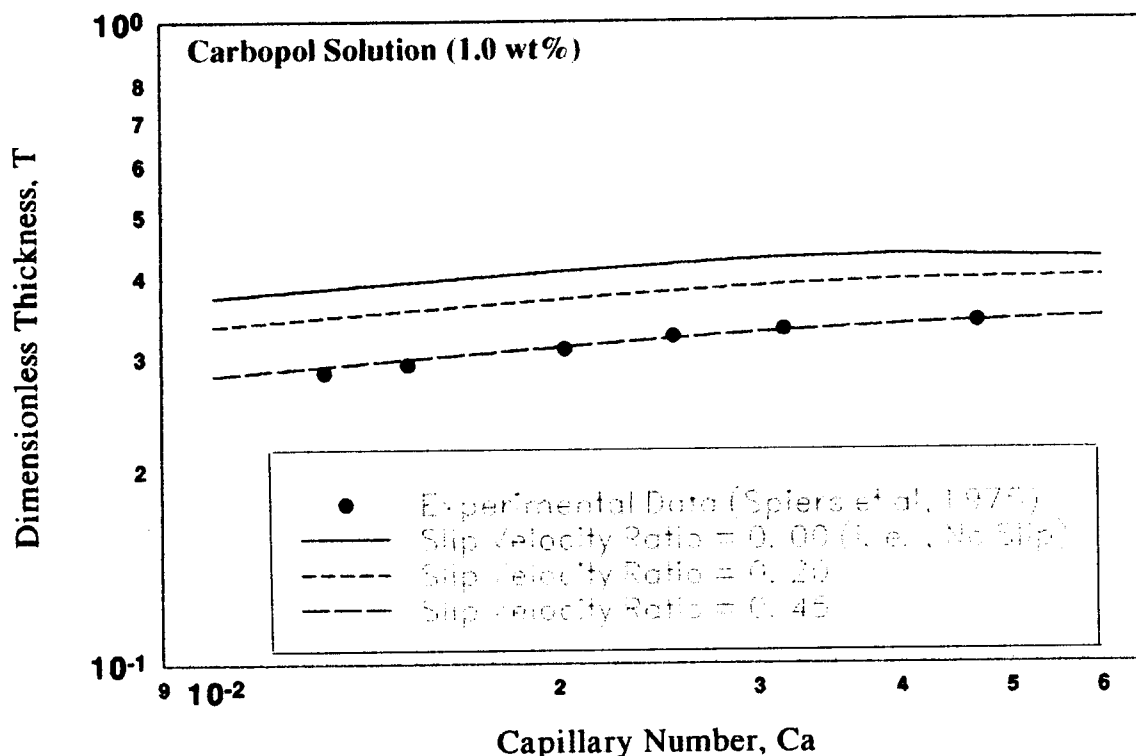


شکل ۳: اثر اینرسی سیال بر ضخامتهای پیش بینی شده فیلم مایع در اعداد موینگی مختلف.

ویسکوالاستیک است). شکل (۳) اهمیت در نظر گرفتن ترمهای اینرسی را در فرآیند روکشدگی آزاد بوضوح نشان میدهد. همانطوریکه در این شکل مشاهده میشود [۲۰، ۱۹]، در صورتیکه ترمهای اینرسی در محاسبات مربوط به پیش بینی ضخامت لایه روکش در نظر گرفته شوند، در مورد محلول آبی 1.0 wt% از پلیمر Carbopol نتایج تئوریک به نتایج تجربی نزدیکتر میگردند (با توجه به اینکه در مورد این سیال عدد رینولدز در حدود ۰/۴ است میتوان نتیجه گرفت که در فرآیند روکشدگی آزاد حتی در مواردیکه نیروی لزجت از نظر مرتبه بزرگی از

الاستیک دانست ولی محلول Separan علاوه بر خواص لزجت، دارای مقداری خواص الاستیک نیز می باشد [۶]. در جدول (۱) پارامترهای مربوط به مدل رئولوژیک نمایی (معادله ۳) برای این سه سیال آورده شده اند [۶]. با توجه به اینکه برای یک سیال نیوتنی  $n$  دقیقاً برابر با یک است و هر چقدر یک سیال غیر نیوتنی تر باشد توان  $n$  از یک بیشتر فاصله میگیرد، از روی مقادیر  $n$  در جدول ۱ میتوان نتیجه گرفت که محلول Separan نسبت به دو محلول Carbopol دارای رفتار غیر نیوتنی شدیدتری است (محلول پلیمری Separan در واقع جزو سیالات





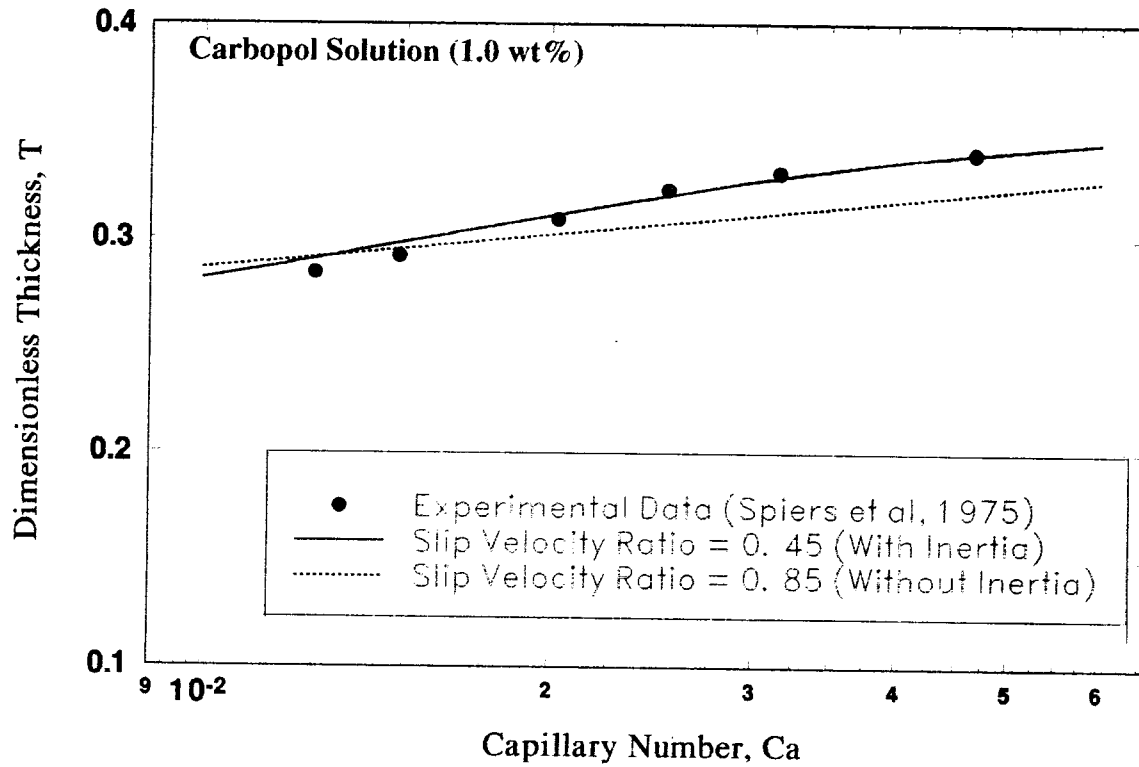
شکل ۴: اثر سرعت لغزش بر ضخامتهای پیش بینی شده لایه روکش برای محلول Carbopol (1.0 wt%).

حالی است که در این کار تحقیقاتی نسبت لغزش مورد نیاز در حدود ۰/۴۵ بدست می آید که بمراتب کمتر از ۰/۸۵ می باشد. با توجه به اینکه در آنالیز Dutta و Mashelkar از ترمهای اینرسی صرف نظر شده است، بنظر میرسد که منظور نمودن ترمهای اینرسی در معادلات حرکت موجب بهبود قابل ملاحظه ای در پیش بینیهای تئوریک گردیده باشد.

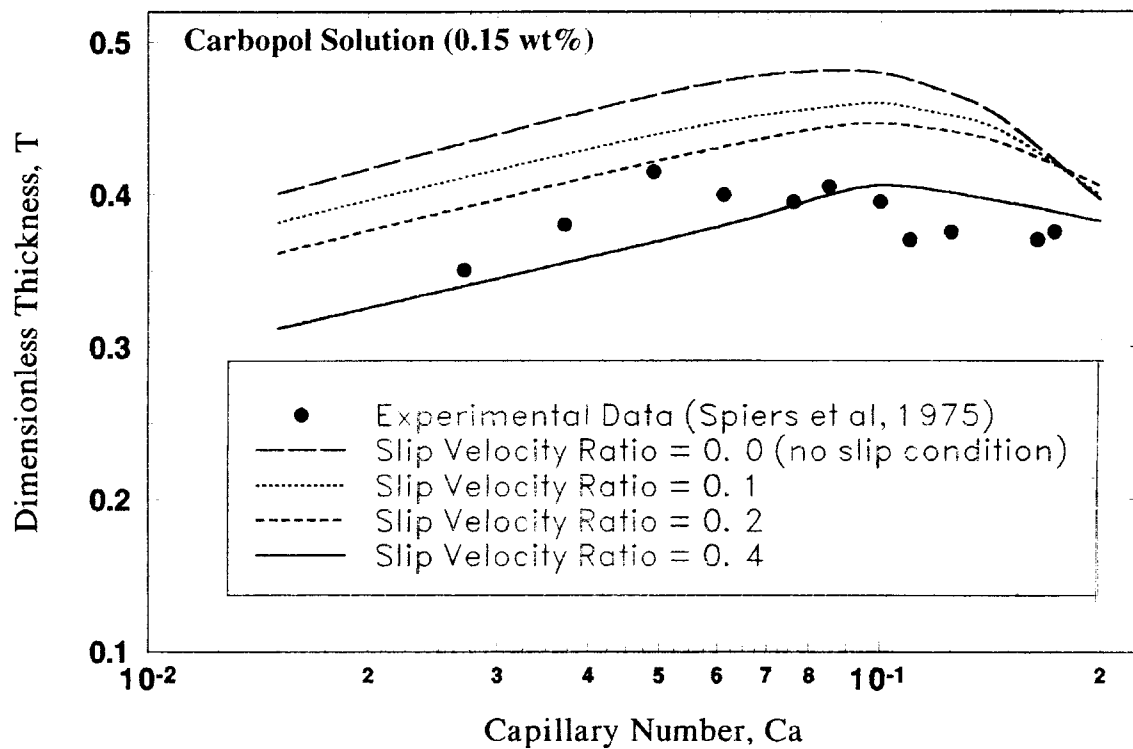
شکل (۶) نتایج بدست آمده را در مورد محلول 0.15 wt% از پلیمر Carbopol نشان میدهد (در مورد این سیال عدد رینولدز در حدود ۴ می باشد). همانطوریکه در این شکل مشاهده میشود، با قبول شرط عدم لغزش برای این سیال، همچون حالت قبل بین نتایج تجربی و نتایج تئوریک فاصله محسوسی وجود خواهد داشت. اما با فرض لغزش سیال در دیواره، بهبود چشمگیری در دقت پیش بینیهای تئوریک حاصل میگردد بنحویکه در نسبت سرعت لغزش ۰/۴، نتایج تئوریک به نتایج تجربی بسیار نزدیک خواهند شد (با توجه به اینکه در مورد این سیال ترمهای اینرسی نسبت به حالت قبل بزرگتر می باشند، مطابق

نیروی اینرسی بزرگتر است ممکن است اینرسی سیال همچنان حائز اهمیت باشد). شکل (۳) همچنین نشان میدهد که در صورت پذیرفتن شرط عدم لغزش برای این سیال نمیتوان حتی با در نظر گرفتن ترمهای اینرسی پیش بینی دقیقی را در مورد ضخامت لایه روکش انجام داد. شکل (۴) بخوبی نشان میدهد که در مورد محلول آبی 1.0 wt% از پلیمر Carbopol با فرض لغزیدن سیال در دیواره، پیش بینیهای تئوریک به داده های تجربی نزدیک و نزدیکتر میگردد بنحویکه در نسبت سرعت لغزش ۰/۴۵ تئوری و آزمایش عملاً بر یکدیگر منطبق می شوند.

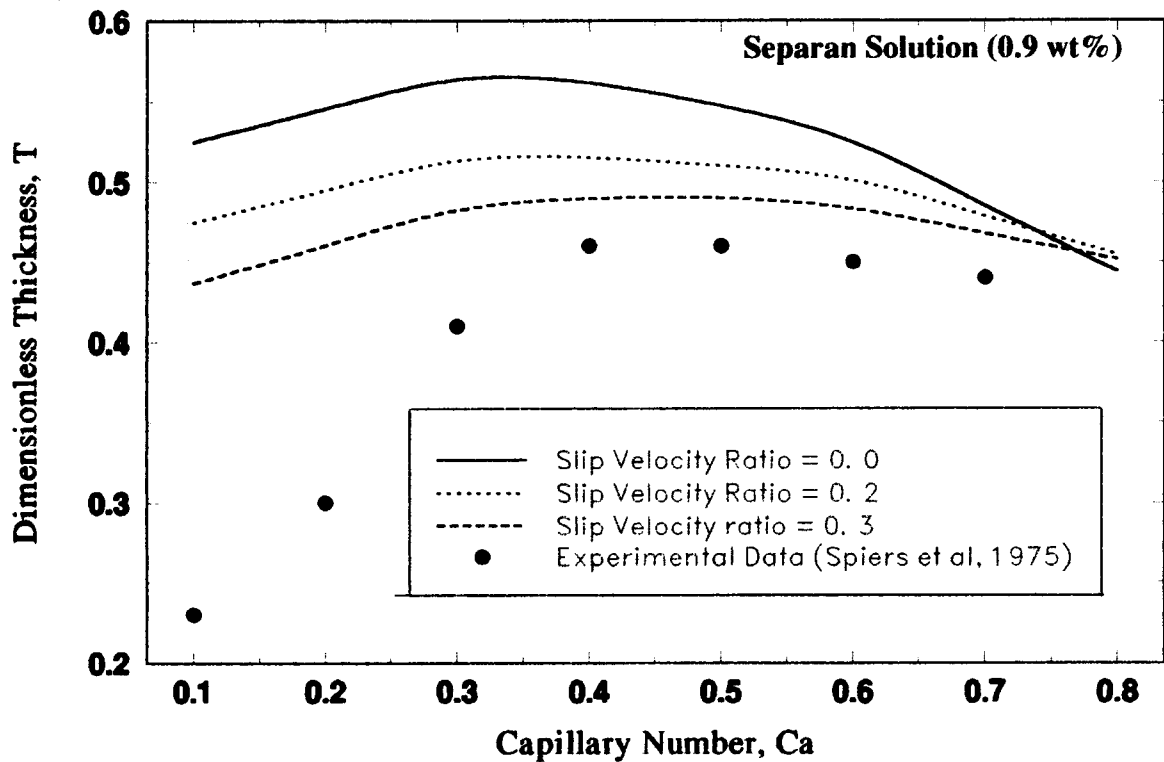
شکل (۵) مقایسه ای بین پیش بینیهای تئوریک انجام شده در این کار تحقیقاتی و نتایج حاصل از آنالیز Dutta و Mashelkar را در مورد محلول آبی 1.0 wt% از پلیمر Carbopol نشان میدهد. همانطوریکه در این شکل مشاهده میشود، نسبت لغزش مورد نیاز برای اینکه بتوان بر اساس نظریه لغزشی Dutta و Mashelkar نتایج تجربی را توجه نمود بسیار زیاد و در حدود ۰/۸۵ است و این در



شکل ۵: مقایسه بین ضخامتهای پیش بینی شده در این کار تحقیقاتی با مقادیر بدست آمده توسط دیگران.



شکل ۶: اثر سرعت لغزش بر ضخامتهای پیش بینی شده لایه روکش برای محلول Carbopol (0.15 wt%).



شکل ۷: اثر سرعت لغزش بر ضخامتهای پیش بینی شده لایه روکش برای محلول (0.9 wt%) Separan.

تحقیقاتی، بنظر میرسد که در فرآیند روکش دهی آزاد سیالات غیر نیوتنی، لغزش سیال در دیواره بتواند بتنهایی اختلاف بین نتایج تئوریک و مشاهدات تجربی را برای آن دسته از سیالات غیر نیوتنی که فاقد خواص الاستیک اند توجیه نماید. در مورد سیالاتی که دارای رفتاری ویسکوالاستیک می باشند، بنظر میرسد که علاوه بر لغزش سیال در دیواره، لازم است مکانیزمهای دیگری (که طبیعتاً در رابطه با خواص الاستیک سیال می باشند) درگیر شوند تا بتوان نتایج تجربی را با دقت بیشتری توجیه نمود. تحلیل انجام شده در این کار تحقیقاتی همچنین نشان میدهد که در مواردیکه لغزش سیال در دیواره مطرح است، به منظور افزایش در دقت نتایج تئوریک، لازم است ترمهای اینرسی نیز همواره در معادلات حرکت منظور گردند.

در یک جمع بندی کلی، میتوان اظهار داشت که با توجه به اینکه در این کار تحقیقاتی، معادلات حاکمه از حالت معادلات دیفرانسیل با مشتق جزئی (PDE) خارج شده و به فرم معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) تبدیل شده اند (با استفاده از یک سری فرضیات ساده کننده

انتظار نسبت سرعت لغزش مورد نیاز اندکی کمتر شده است).

در شکل (۷) نتایج بدست آمده در مورد محلول Separan آورده شده اند (در مورد این سیال، عدد رینولدز در حدود ۲ می باشد). شکل مزبور بخوبی نشان میدهد که رفتار این سیال تا حد زیادی با رفتار محلولهای پلیمر Carbopol تفاوت دارد [۲۰، ۱۹]. در حقیقت، اگر چه همچون حالتیهای قبل، لغزش سیال در دیواره موجب بهبود در دقت پیش بینیهای تئوریک می شود با اینوصف در هیچ نسبت لغزشی نمیتوان نتایج تئوریک را به نتایج تجربی بنحو قابل قبولی منتقل ساخت. با توجه به اینکه بر خلاف محلولهای Carbopol، محلول Separan دارای رفتاری ویسکوالاستیک است، بنظر میرسد استفاده از معادله رئولوژیک ۳ (که تنها برای سیالات غیر الاستیک صادق است) برای این سیال صحیح نباشد (در حقیقت، در مورد چنین سیالات ویسکوالاستیکی، ممکن است هم خواص الاستیک سیال و هم خواص لغزشی آن در کنترل ضخامت نهایی فیلم مایع دخیل باشند).

بطور کلی، بر اساس نتایج بدست آمده در این پروژه

است، میتوان با اندازه گیری ضخامت لایه روکش در فرآیند روکشی آزاد، به رفتار لغزشی سیال پی برد.

### تشکر و قدردانی

انجام این پروژه در قالب طرح تحقیقاتی مصوب شورای پژوهشی دانشگاه تهران صورت پذیرفته است که نگارندگان این مقاله بدینوسیله نهایت سپاس و قدردانی خود را از بابت امکانات و بودجه ای که توسط این دانشگاه در اختیار آنان قرار گرفته است اعلام می دارند.

منطقی)، در نتیجه واضح است که راه حل ارائه شده در این مقاله دارای ماهیتی تحلیلی است و میتوان از آن بعنوان ابزاری سریع و کارآمد در پیش بینی رفتار سیالات غیرنیوتنی (غیر الاستیک) در فرآیند روکشی آزاد استفاده نمود. بعبارت دیگر، با استفاده از معادلات ارائه شده در این مقاله، بنظر می رسد که طراحان فرآیندهای روکشی آزاد بتوانند، در صورت معلوم بودن رفتارهای لغزشی یک سیال غیرنیوتنی، پیش بینی دقیقی را در مورد ضخامت نهایی لایه روکش انجام دهند. بر عکس، برای آن دسته از سیالاتی که رفتار لغزشی آنها نامشخص

### مراجع

- 1 – Benkreira, H., Patel, R., Edwards, M. F. and Wilkinson, W. L. (1994). "Classification and analysis of coating flows.", *J. of Non-Newtonian Fluids*, Vol. 54, P. 437.
- 2 - Papanastasiou, T. C. (1989). "Lubrication flows." *Chem., Engrg., Ed.*, 24, Vol. 50.
- 3 - Buchlin, J. M., Gaskell, P. H. and Savage, M. D. (1997). "Thin liquid films and coating processes." *Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series*.
- 4 – Esmail, M. N. and Hummel, R. L. (1975). "Nonlinear theory of free coating onto a vertical surface." *AIChE Journal*, Vol. 21, No. 5.
- 5 – Spiers, R. P., Subbaraman, C. V. and Wilkinson, W. L. (1974). "Free coating of a newtonian liquid onto vertical surface." *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 29, P. 389.
- 6 – Spiers, R. P., Subbaraman, C. V. and Wilkinson, W. L. (1975). "Free coating of non-newtonian liquids onto vertical surface." *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 30, P. 379.
- 7 – Middleman, S. (1977). *Fundamentals of polymer processing*, McGraw-Hill, New York.
- 8 – Dutta, A. and Mashelkar, R. A. (1982). "On slip effects in free coating of non-newtonian fluids." *Rheologica Acta*, 21, P. 52.
- 9 – White, D. A. and Tallmadge, J. A. (1965). "Theory of drag out of liquids on flat plates." *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 20, P. 33.
- 10 – Barnes, H. (1995). "A review of the slip of polymer solutions, emulsions and particle suspensions in viscometers: its use, character and cure." *J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 56, P. 221.
- 11 – Agarwal, U. S., Dutta, A. and Mashelkar, R. A. (1994). "Migration of macromolecules under flow: the physical origin and engineering implications." *Chem. Engrg. Sci.*, Vol. 49, P. 1693.
- 12 – Carreau, P. J., Bui, Q. H. and Leroux, P. (1979). "Wall effects in polymer flow on inclined planes." *Rheol. Acta*, Vol. 18, P. 600.
- 13 - Metzner, A. B., Cohen, Y. and Rangel-Nafaile, C. (1979). "Inhomogeneous flows of non-newtonian fluids." *J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 5, P. 449.

- 14 – Cohen, Y. and Metzner, A. B. (1985). "Apparent slip flow of polymer solutions." *J. of Rheology*, Vol. 29, No. 1, P. 67.
- 15 – Tekic, M. N. and Popadic, V. O. (1983). "Free coating of pseudoplastic liquids onto a vertical surface." *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 38, No. 2, P. 285.
- 16 – Bird, R. B., Armstrong, R. C. and Hassager, O. (1987). "Dynamics of polymeric liquids." Vol. 1, 2<sup>nd</sup> Edition, John-Wiley & Sons.
- 17 - Gasemian-Amiri, M. (1999). "The effects of wall slip on free coating of non-newtonian fluids." *M.A.Sc. Thesis*, University of Tehran.
- 18 - Landau, L. D. and Levich V. G. (1942). "Dragging of a liquid film by a moving plate." *Acta Physico-chimica*, URSS, Vol. 17, P. 41.
- 19 – Sadeghy, K. and Gasemian-Amiri, M. (1999). "Wall slip effects on free coating of purely viscous non-newtonian fluids." *paper presented at 72<sup>nd</sup> Annual Meeting of the Society of Rheology*, Madison, Wisconsin, USA, October 17-24.
- 20 - Gasemian-Amiri, M. and Sadeghy, K. (1999). "Numerical analysis of film flow in plate withdrawal from a bath of a non-newtonian liquid." *paper presented at CFD99 Conference*, June 17-19, Halifax, Canada.

### واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 – Free Coating
- 2 – Viscoelastic Fluids
- 3 – Lubricant
- 4 – Freely Falling Flow
- 5 – Diffusivity
- 6 – Power-Law Fluid
- 7 – Fluid Property Number
- 8 – Thin Film Approximation

