جهت تهیه فایل WORD این مقاله به سایت DaneshResan.com مراجعه نمایید و عنوان مقاله را جستجو کنید
بیش از ۲ میلیون مقاله فارسی در این سایت موجود میباشد



# وجود جواب تناوبی یک معادله دیفرانسیل مرتبه سوم غیرخطی با کاربرد در خودروسازی

**غلامرضا شهریار حشمتی**
استادیار گروه علوم پایه مهندسی - دانشکده فنی - دانشگاه تهران
**بهمن مهری**
استاد دانشکده ریاضی - دانشگاه صنعتی شریف

(تاریخ دریافت ۷۹/۱۱/۲، تاریخ تصویب ۸۰/۲/۲۹)

## چکیده

در این مقاله ما شرط لازم و کافی برای وجود جواب تناوبی غیربدیهی معادله دیفرانسیل مرتبه سوم غیرخطی را مطالعه نموده و با استفاده از قضیه توابع ضمنی ، وجود این جواب را ثابت می نمائیم. سپس با استفاده از کامپیوتر جواب تناوبی را در حالت خاصی تقریب نموده و آن را در صفحات $xt$ ، $xx'$ و $x'x''$ رسم می نمائیم. شایان ذکر است که معادله در نظر گرفته شده می تواند یک مدل ریاضی برای ترمز خودروهای سنگین باشد.

**واژه‌های کلیدی :** جواب تناوبی، قضیه توابع ضمنی

## مقدمه

معادله دیفرانسیل حرکت چرخ ماشین و نیروی ترمز و اصطکاک جاده به صورت زیر بیان می شود :

$$M_p x'' = -k_1(x-y)-k_2(x-z)$$
$$k_2(x-z)=c(z'-y')$$

که در آن $M_p$ جرم کل سیستم ترمز، $x$ تغییرات حرکت چرخ پس از ترمز کردن، $y$ نیروی خارجی (اصطکاک) که از جاده به چرخ وارد می‌شود و $z$ تغییرات فنر پس از ترمز کردن است (رجوع شود به [۳]). در کتاب های کلاسیک اغلب اوقات معادلات فوق را با درنظر گرفتن $k_1$ ، $k_2$ و $c$ ثابت و در نتیجه به عنوان یک معادله دیفرانسیل خطی در نظر گرفته و حل می نمایند.

برای این منظور با حذف $z$ بین دو معادله به دست می آید .

$$x''' + \frac{k_2}{c} x'' + \frac{k_1+k_2}{M_p} x' + \frac{k_1 k_2}{c M_p} x = e(t)$$

که طرف دوم راکه تابعی از $y$ و $y'$ است با $e(t)$ نشان داده‌ایم.

در [۱]، با فرض ثابت نبودن ضرایب $k_1$ ، $k_2$ و $c$ ، معادله دیفرانسیل

$$x''' + g_1(x')x'' + g_2(x)x' + g_3(t,x) = e(t) \qquad *$$

راکه می تواند یک مدل ریاضی برای ترمز خودروهای سنگین باشد درنظر گرفتیم و با تبدیل معادله به یک معادله انتگرال و استفاده از قضیه نقطه ثابت شادر وجود جواب تناوبی معادله را با فرضیاتی مناسب ثابت کردیم.

اکنون دسته معادلاتی راکه در حقیقت تعمیم معادله (*) می‌باشد، به صورت

$$x''' + x' = \varepsilon f(x,x',x'',t)$$

درنظر گرفته و با استفاده از قضیه توابع ضمنی وجود جواب تناوبی معادله را با شرایطی روی $f$، ثابت می نمائیم.

ناگفته نماند که وجود جواب تناوبی کارکرد خوب ترمز را نشان می‌دهد و در صورت عدم وجود جواب تناوبی ، ترمز بعد از یک بار کار بکلی خراب خواهد شد [۳].

## وجود جواب تناوبی

فرض کنیم $U$ مجموعه بازی در $R^3$ شامل مبداء باشد. معادله دیفرانسیل مرتبه سوم

$$x''' + x' = \varepsilon f(x,x',x'',t) \qquad (۱)$$

جهت تهیه فایل WORD این مقاله به سایت DaneshResan.com مراجعه نمایید و عنوان مقاله را جستجو کنید
بیش از ۲ میلیون مقاله فارسی در این سایت موجود میباشد



راکه در آن $\varepsilon$ پارامتری است کوچک و f تابعی است تناوبی نسبت به t با دوره تناوب $2\pi$، تعریف شده و از کلاس $C^1$ در $U \times R$ در نظر می گیریم.

جواب معادله (۱) به صورت زیر است:

$$x = A + B\cos t + C\sin t + \varepsilon \int_0^t [1-\cos(t-s)]\, f(x(s),x'(s),x''(s),s)ds \tag{۲}$$

که در آن A ، B و C ثابت می باشند.

برای اثبات وجود جواب تناوبی با دوره تناوب $2\pi$ معادله (۱)، کافی است جوابی به دست آوریم که در شرایط مرزی زیر صدق کند.

$$x(0) = x(2\pi)\ ,\ \ x'(0) = x'(2\pi)\ ,\ \ x''(0) = x''(2\pi) \tag{۳}$$

با برابر قرار دادن $x(0)$ و $x(2\pi)$ به دست می آید:

$$A + B = A + B + \varepsilon \int_0^{2\pi} [1-\cos(2\pi-s)]\, f(x(s), x'(s), x''(s),s)\, ds$$

که تبدیل می شود به معادله

$$F(A,B,C,\varepsilon)= \int_0^{2\pi} (1-\cos s)\, f(x(s), x'(s), x''(s),s)ds=0 \tag{۴}$$

با مشتق گیری از رابطه (۲)،

$$x'(t) = - B \sin t + C \cos t + \varepsilon \int_0^t \sin(t - s)\, f(x(s), x'(s), x''(s),s)\, ds$$

و رابطه $x'(0) = x'(2\pi)$ تبدیل می شود به معادله:

$$G(A,B,C,\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \sin s\, f(x(s), x'(s), x''(s),s)\, ds = 0 \tag{۵}$$

با مشتق گیری دوباره

$$x''(t) = - B \cos t - C \sin t + \varepsilon \int_0^t \cos(t - s)\, f(x(s), x'(s), x''(s),s)\, ds$$

که نشان می دهد که رابطه $x''(0) = x''(2\pi)$ هم ارز است با معادله

$$H(A,B,C,\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \cos s\, f(x(s), x'(s), x''(s),s)\, ds = 0 \tag{۶}$$

بدین ترتیب معادلات (۳) هم ارزند با معادلات

$$\begin{aligned} F(A,B,C,\varepsilon) &= 0 \\ G(A,B,C,\varepsilon) &= 0 \\ H(A,B,C,\varepsilon) &= 0 \end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن توابع F، G و H با روابط (۴)، (۵) و (۶) تعریف شده اند. بنابراین، برای وجود جواب تناوبی معادله (۱)، لازم و کافی است که معادلات (۷) دارای جواب غیربدیهی باشند. برای این منظور از قضیه مشهور توابع ضمنی استفاده می کنیم:

اگر به ازای $\varepsilon=0$ بتوان ضرایب $A_\circ$، $B_\circ$ و $C_\circ$ را طوری بدست آورد که داشته باشیم:

$$\begin{aligned} F(A_\circ,B_\circ,C_\circ,\circ)&=0 \\ G(A_\circ,B_\circ,C_\circ,\circ)&=0 \\ H(A_\circ,B_\circ,C_\circ,\circ)&=0 \end{aligned} \tag{۸}$$

و اگر ژاکوبین $\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(A,B,C)}$ در نقطه ($A_\circ$ ، $B_\circ$ ، $C_\circ$ و $\circ$) مخالف صفر باشد آنگاه یک فاصله باز I ، شامل نقطه 0 و سه تابع منحصر بفرد $A(\varepsilon)$ ، $B(\varepsilon)$ و $C(\varepsilon)$ تعریف شده و مشتق پذیر در I وجود دارند بطوری که $A(0)= A_\circ$ ، $B(0) = B_\circ$ و $C(0) = C_\circ$ و

$$\begin{aligned} F(A(\varepsilon), B(\varepsilon), C(\varepsilon), \varepsilon)&=0 \\ G(A(\varepsilon), B(\varepsilon), C(\varepsilon), \varepsilon)&=0 \\ H(A(\varepsilon), B(\varepsilon), C(\varepsilon), \varepsilon)&=0 \end{aligned} \tag{۹}$$

به ازای هر $\varepsilon \in I$ [۲]. بعبارت دیگر، به ازای هر $\varepsilon \in I$ معادلات (۷) دارای جواب اند و در نتیجه معادله (۱) دارای یک جواب تناوبی است.

حال معادلات (۸) را درنظر می گیریم. به ازای $\varepsilon = \circ$، داریم:

$$\begin{aligned} x &= A + B \cos t + C \sin t \\ x' &= -B \sin t + C \cos t \\ x'' &= -B \cos t - C \sin t \end{aligned}$$

که با جایگذاری در معادلات (۴)، (۵) و (۶) به دست می آید:

جهت تهیه فایل WORD این مقاله به سایت DaneshResan.com مراجعه نمایید و عنوان مقاله را جستجو کنید
بیش از ۲ میلیون مقاله فارسی در این سایت موجود میباشد



$$F(A,B,C,0) = \int_0^{2\pi} ((1-\cos s)\, f(A + B \cos s + C \sin s, -B \sin s + C \cos s, -B \cos s - C \sin s, s)\, ds = 0$$

$$G(A,B,C,0) = \int_0^{2\pi} \sin s\, f(A + B \cos s + C \sin s, -B \sin s + C \cos s, -B \cos s - C \sin s, s)\, ds = 0$$

$$H(A,B,C,0) = \int_0^{2\pi} \cos s\, f(A + B \cos s + C \sin s, -B \sin s + C \cos s, -B \cos s - C \sin s, s)\, ds = 0$$

(۱۰)

اگر قرار دهیم

$$h(s) = f(A + B\cos(s) + C\sin(s), -B\sin(s) + C\cos(s), -B\cos(s) - C\sin(s), s)$$

در این صورت ، دستگاه معادلات (۱۰) هم ارز است با معادلات :

$$\int_0^{2\pi} h(s)ds=0$$

$$\int_0^{2\pi} h(s)\cos(s)\, ds=0$$

$$\int_0^{2\pi} h(s)\quad \sin(s)\, ds=0$$

(۱۱)

فرض کنیم که دستگاه معادلات (۱۱) دارای جواب غیربدیهی $A(0) = A_0$ ، $B(0) = B_0$ و $C(0) = C_0$ باشد، اگر ژاکوبین $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(A,B,C)}$ در نقطه ($A_0$ ، $B_0$ ، $C_0$ و ۰) مخالف صفر باشد آنگاه دستگاه دارای جواب $A(\varepsilon)$ ، $B(\varepsilon)$ و $C(\varepsilon)$ به ازای هر $\varepsilon \in I$ می‌باشد. این جواب پیوسته است، بطوریکه

$$\lim_{\varepsilon \to 0} A(\varepsilon) = A_0 \ , \ \lim_{\varepsilon \to 0} B(\varepsilon) = B_0 \ , \ \lim_{\varepsilon \to 0} C(\varepsilon) = C_0$$

ولی

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(A,B,C)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial A} & \frac{\partial F}{\partial B} & \frac{\partial F}{\partial C} \\ \frac{\partial G}{\partial A} & \frac{\partial G}{\partial B} & \frac{\partial G}{\partial C} \\ \frac{\partial H}{\partial A} & \frac{\partial H}{\partial B} & \frac{\partial H}{\partial C} \end{vmatrix}$$

و به ازای $\varepsilon = 0$ داریم :

$$\frac{\partial F}{\partial A}(A,B,C,0) = \int_0^{2\pi} (1-\mathrm{Coss}) f_x\, (x(s), x'(s), x''(s), s)\, ds$$

$$\frac{\partial F}{\partial B}(A,B,C,0) = \int_0^{2\pi} 1-\mathrm{Coss})\, [f_x \cos(s) - f_{x'} \sin(s) - f_{x''} \cos(s)]\, ds$$

که در فرمول اخیر و در تمام فرمول های بعدی، مشتقات جزئی $f_x$ ، $f_{x'}$ و $f_{x''}$ در نقطه $(x(s),x'(s),x''(s),s)$ در نظر گرفته می شوند.

$$\frac{\partial F}{\partial C}(A,B,C,0) = \int_0^{2\pi} (1-\mathrm{Cos}(s))\, [f_x \sin(s) + f_{x'} \cos(s) - f_{x''} \sin(s)]\, ds$$

بهمین ترتیب

$$\frac{\partial G}{\partial A}(A,B,C,0) = \int_0^{2\pi} \sin s\, f_x\, ds$$

$$\frac{\partial G}{\partial B}(A,B,C,0) = \int_0^{2\pi} \sin(s)\, [f_x \cos(s) - f_{x'} \sin(s) - f_{x''} \cos(s)]\, ds$$

$$\frac{\partial G}{\partial C}(A,B,C,0) = \int_0^{2\pi} \sin(s)\, [f_x \sin(s) + f_{x'} \cos(s) - f_{x''} \sin(s)]\, ds$$

$$\frac{\partial H}{\partial A}(A,B,C,0) = \int_0^{2\pi} \cos(s)\, f_x\, ds$$

$$\frac{\partial H}{\partial B}(A,B,C,0) = \int_0^{2\pi} \cos(s)\, [f_x \cos(s) - f_{x'} \sin(s) - f_{x''} \cos(s)]\, ds$$

$$\frac{\partial H}{\partial C}(A,B,C,0) = \int_0^{2\pi} \cos(s)\, [f_x \sin(s) + f_{x'} \cos(s) - f_{x''} \sin(s)]\, ds$$

حال در چند حالت وجود جواب تناوبی را ثابت می کنیم .

$$f(x,x',x'',t) = \alpha x + \beta x^3 + \cos t \qquad \text{(I)}$$

که در آن $\alpha$ و $\beta$ ثابت می باشند و $\alpha \neq 0$

در این صورت

$$h(s) = f(A + B\cos(s) + C\sin(s), -B\sin(s) + C\cos(s), -B\cos(s) - C\sin(s), s) = \alpha\,(A + B\cos(s) + C\sin(s) + \beta\,(A + B\cos(s) + C\sin(s))^3 + \cos(s)$$

و در نتیجه

$$\int_0^{2\pi} h(s)ds = 2\pi\alpha\, A + 2\pi\beta\, A^3 + 3\pi\beta\, B^2 + 3\pi\beta\, C^2$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(s)\ h(s)ds = \pi\alpha\, B + 3\pi\beta A^2 B + \frac{3\pi}{4}\beta B^3\ \frac{3\pi}{4} + \beta BC^2 + \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(s)\ h(s)ds = \pi\alpha\, C + 3\pi\beta\, A^2C + \frac{3\pi}{4}\beta\, B^2C + \frac{3\pi}{4}\beta C^3$$

بنابراین ، دستگاه معادلات (۱۱) هم ارز است با دستگاه معادلات

$$2\alpha A + \beta A\,(2A^2 + 3B^2 + 3C^2) = 0$$
$$4\alpha B + 3\beta B\,(4A^2 + B^2 + C^2) + 4 = 0$$
$$4\alpha C + 3\beta C\,(4A^2 + B^2 + C^2) = 0$$

(۱۲)

فرض کنیم که $B_\circ$ ریشه معادله درجه سوم $3\beta B^3 + 4\alpha B + 4 = 0$ باشد. در این صورت :

$$A_\circ = 0 \quad , B_\circ \quad , C_\circ = 0$$

جواب دستگاه معادلات (۱۲) است و در نقطه (۰ و $C_\circ$، $B_\circ$، $A_\circ$) داریم :

$$x(s) = B_\circ\cos s\ ,\ x'(s) = -B_\circ \sin s\ ,\ x''(s) = -B_\circ \cos s$$

و در نتیجه

$$\frac{\partial F}{\partial A} = \int_0^{2\pi} (1-\cos s)\ f_x(B_\circ\cos s, -B_\circ\sin s, -B_\circ\cos s)ds$$

$$= \int_0^{2\pi} (1-\cos s)(\alpha+3\beta B_\circ^2 \cos^2 s)ds = 2\pi\alpha + 3\pi\beta B_\circ^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial B} = \int_0^{2\pi}(1-\cos s)(\alpha+3\beta B_\circ^2 \cos^2 s)ds = -\pi\alpha - \frac{9\pi}{4}\beta B_\circ^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial C} = \int_0^{2\pi}(1-\cos s)(\alpha+3\beta B_\circ^2 \cos^2 s)\ \mathrm{sins}\ ds = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial A} = \int_0^{2\pi} \sin s(\alpha+3\beta B_\circ^2 \cos^2 s)\ ds = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial B} = \int_0^{2\pi} \sin s(\alpha+3\beta B_\circ^2 \cos^2 s) \cos s\ ds = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial C} = \int_0^{2\pi} \mathrm{sins}(\alpha+3\beta B_\circ^2 \cos^2 s)\mathrm{sins}\ ds = \pi\alpha + \frac{3\pi}{4}\beta\, B_\circ^2$$

$$\frac{\partial H}{\partial A} = \int_0^{2\pi} \cos s(\alpha+3\beta B_\circ^2 \cos^2 s)\ ds = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial B} = \int_0^{2\pi} \mathrm{coss}(\alpha+3\beta B_\circ^2 \cos^2 s)\mathrm{coss}\ ds = \pi\alpha + \frac{9\pi}{4}\beta B_\circ^2$$

$$\frac{\partial H}{\partial C} = \int_0^{2\pi} \cos s(\alpha+3\beta B_\circ^2 \cos^2 s) \sin s\ ds = 0$$

بنابراین ژاکوبین $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(A,B,C)}$ در این نقطه مخالف صفر است و معادله (۱) به ازای هر $\varepsilon \in I$ که در آن I بازه‌ای شامل نقطه صفر است، یعنی به ازای $\varepsilon$ های کوچک، دارای یک جواب تناوبی است.

(II)

$$f(x,x',x'',t) = x + (x')^n\,\phi(t) + (x'')^m\,\Psi(t) + g(t)$$

که در آن n و m اعداد صحیح بزرگتر از یک ؛ $\phi$، $\Psi$ و g توابعی تناوبی با دوره تناوب $2\pi$ و از کلاس $C^1$ می باشند و g در معادلات زیر صدق می نماید :

$$\int_0^{2\pi} g(t)dt \neq 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} g(t)\cos t\ dt = 0\ ,$$

$$\int_0^{2\pi} g(t)\sin t\ dt = 0$$

در این صورت

$$A_\circ = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\ dt \quad , \quad B_\circ = 0\ \ ; \ \ C_\circ = 0$$

جواب دستگاه معادلات (۱۰) است و در نقطه (۰ و $C_\circ$، $B_\circ$، $A_\circ$) داریم :

$$\frac{\partial F}{\partial A} = 2\pi\ , \quad \frac{\partial F}{\partial B} = -\pi \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial C} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial A} = 0\ , \quad \frac{\partial G}{\partial B} = 0 \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial C} = \pi$$

$$\frac{\partial H}{\partial A} = 0\ , \quad \frac{\partial H}{\partial B} = \pi \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial C} = 0$$

در نتیجه ژاکوبین $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(A,B,C)}$ در این نقطه مخالف صفر است و بنابراین، معادله (۱) به ازای مقادیر کوچک $\varepsilon$ دارای یک جواب تناوبی است.

$$f(x,x',x'',t)=\alpha x^2+\beta x'^2+\cos(t) \qquad \text{(III)}$$

در این حالت نیز مانند دو حالت قبل یک جواب تناوبی بدست می‌آید.

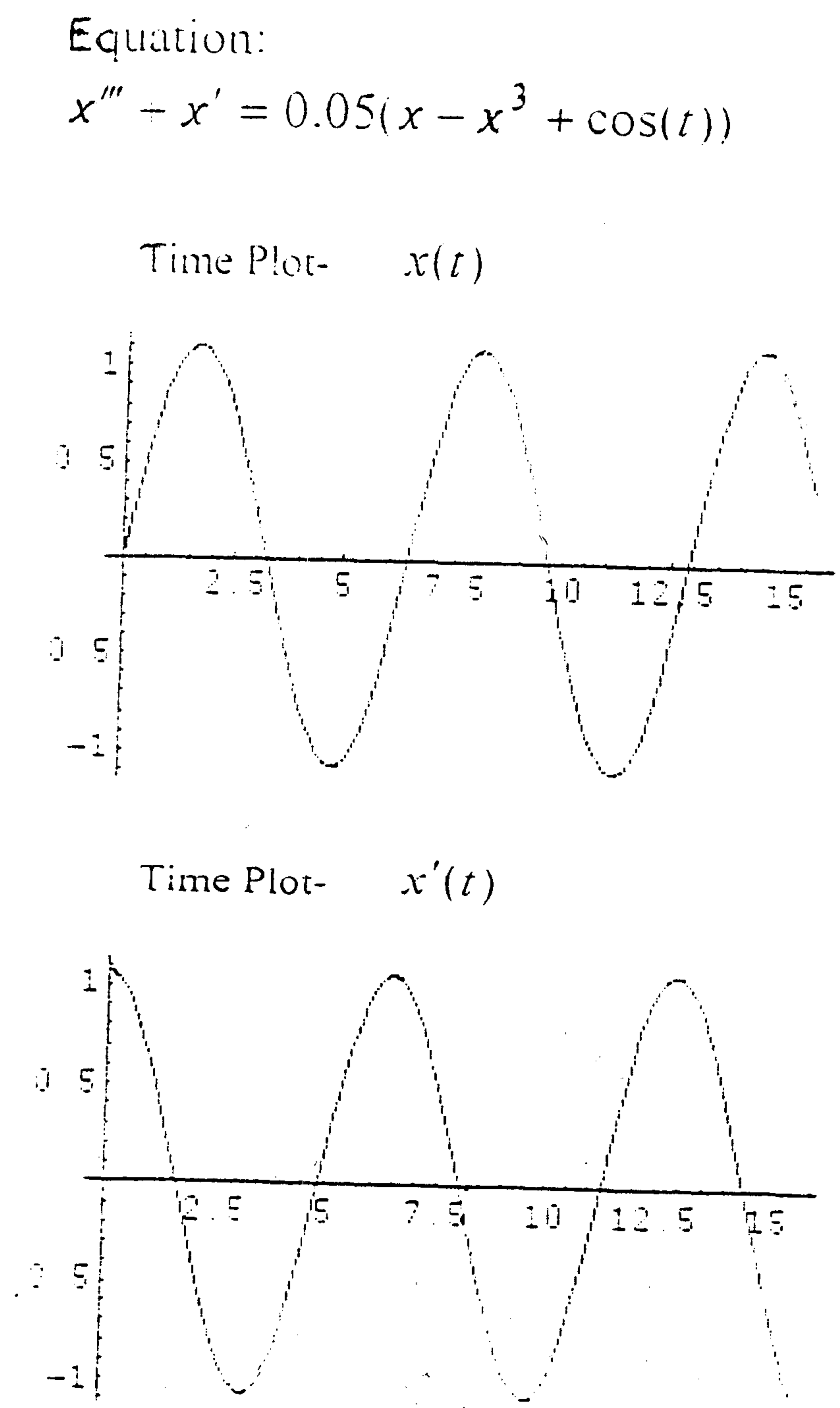
## مثال عددی

تحلیل عددی دو معادله دیفرانسیل غیر خطی زیر :

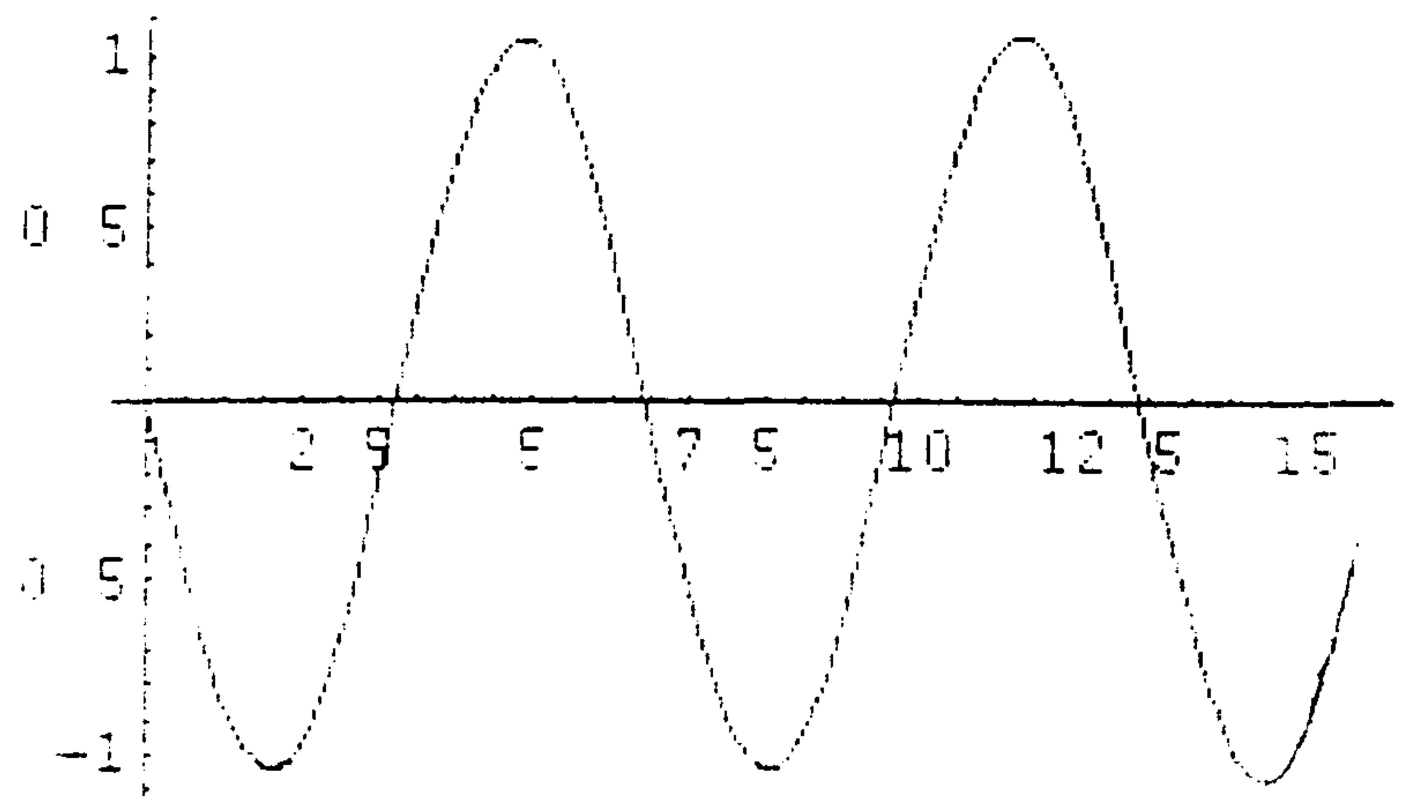
$$x''' + x' = 0.05(x - x^3 + \cos(t))$$

$$x''' + x' = 0.01(x^2 + x'^2 + \cos(t))$$

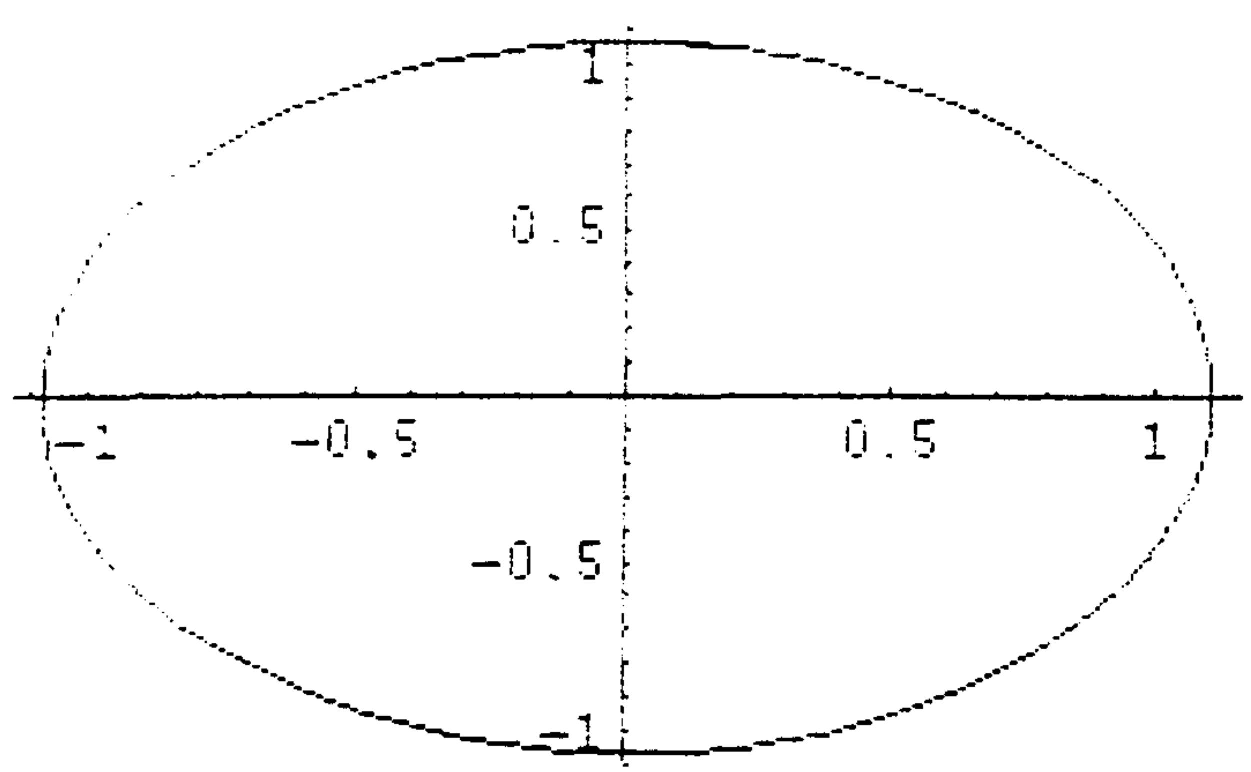
به کمک نرم افزار Mathematica انجام شده است. به کمک، نرم افزار فوق می توان جوابهای معادلات دیفرانسیل را با دقت دلخواه محاسبه نمود. نمودارهای به دست آمده برای جوابهای تناوبی دو معادله فوق در زیر نشان داده شده است.



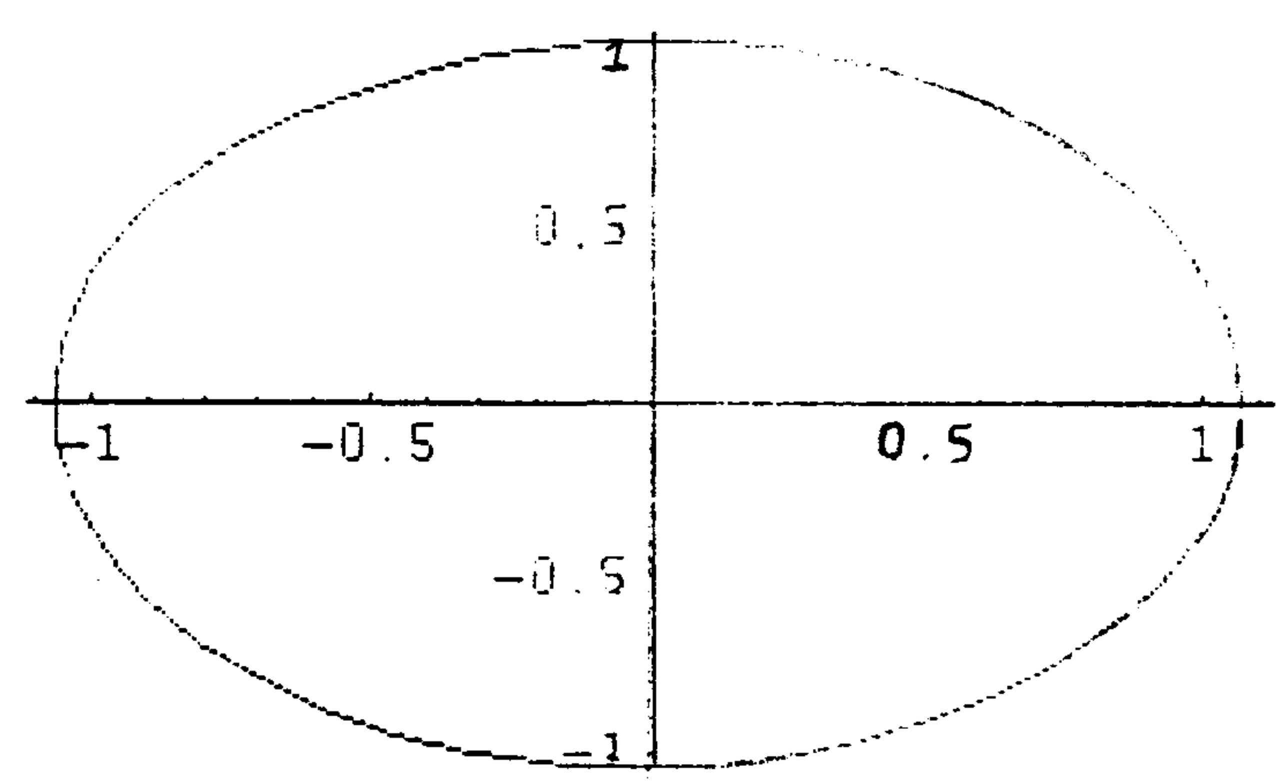
Time Plot- $x''(t)$



Phase Plane- $x - x'$



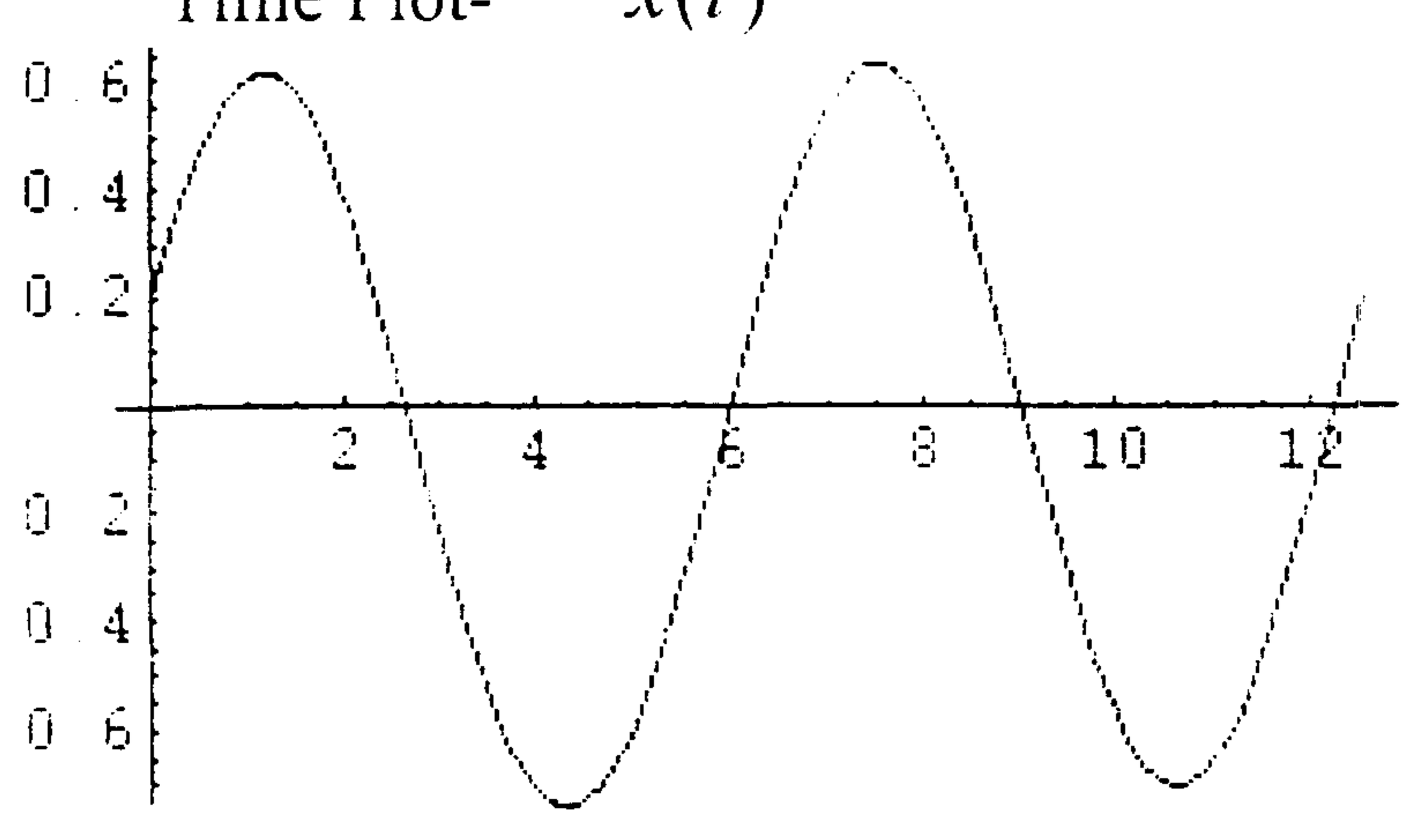

Phase Plane- $x' - x''$



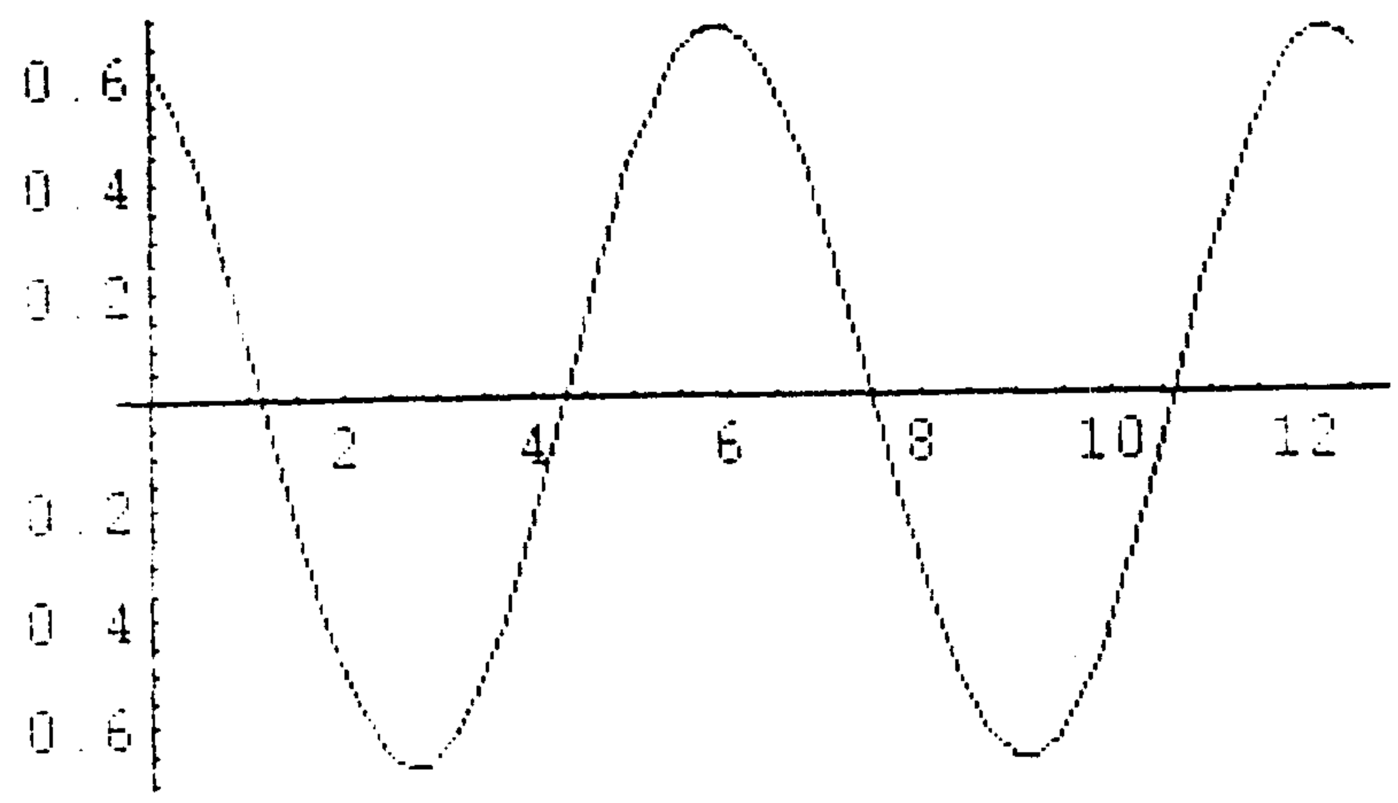

Equation:

$$x''' + x' = 0.01(x^2 + x'^2 + \cos(t))$$

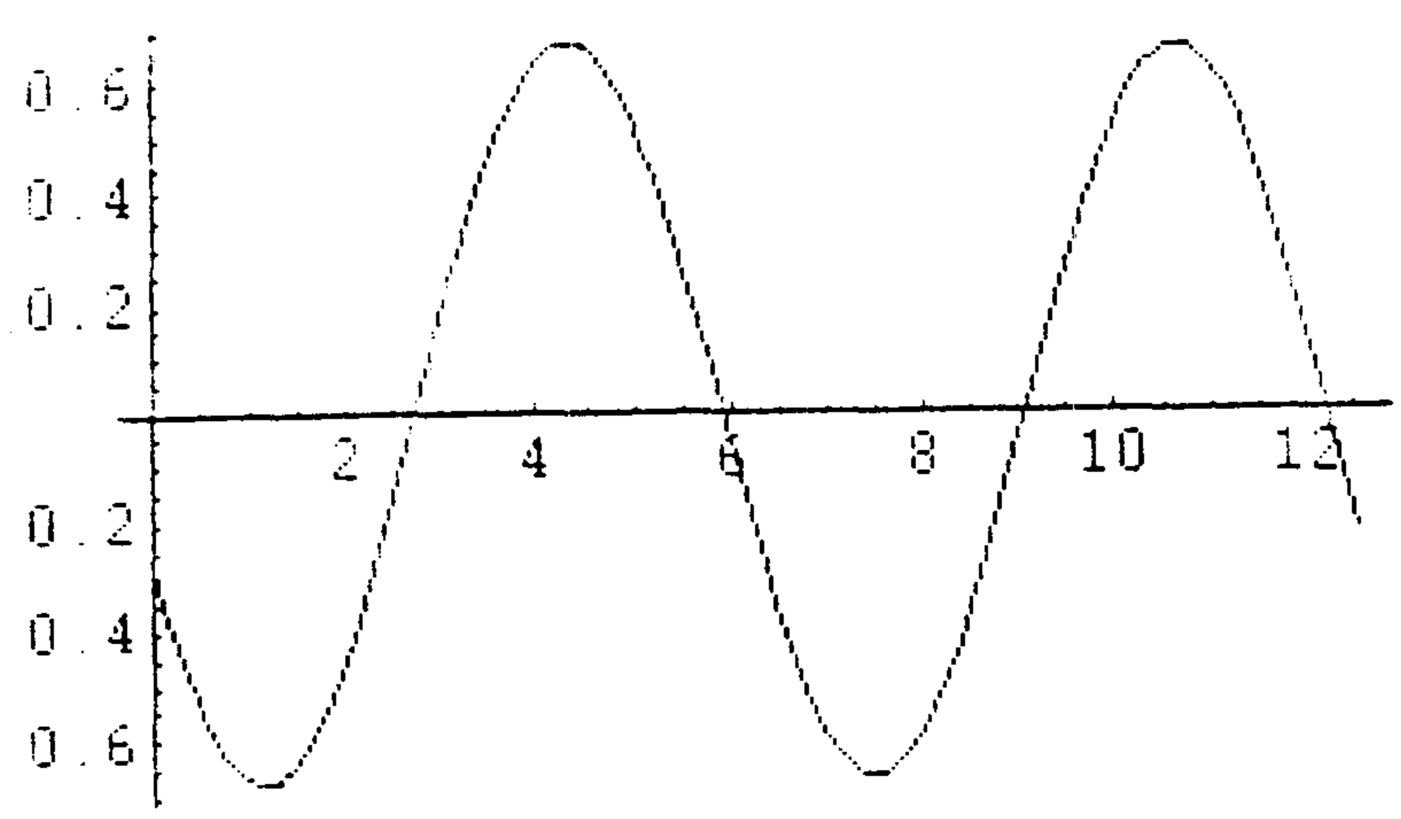
Time Plot- $x(t)$



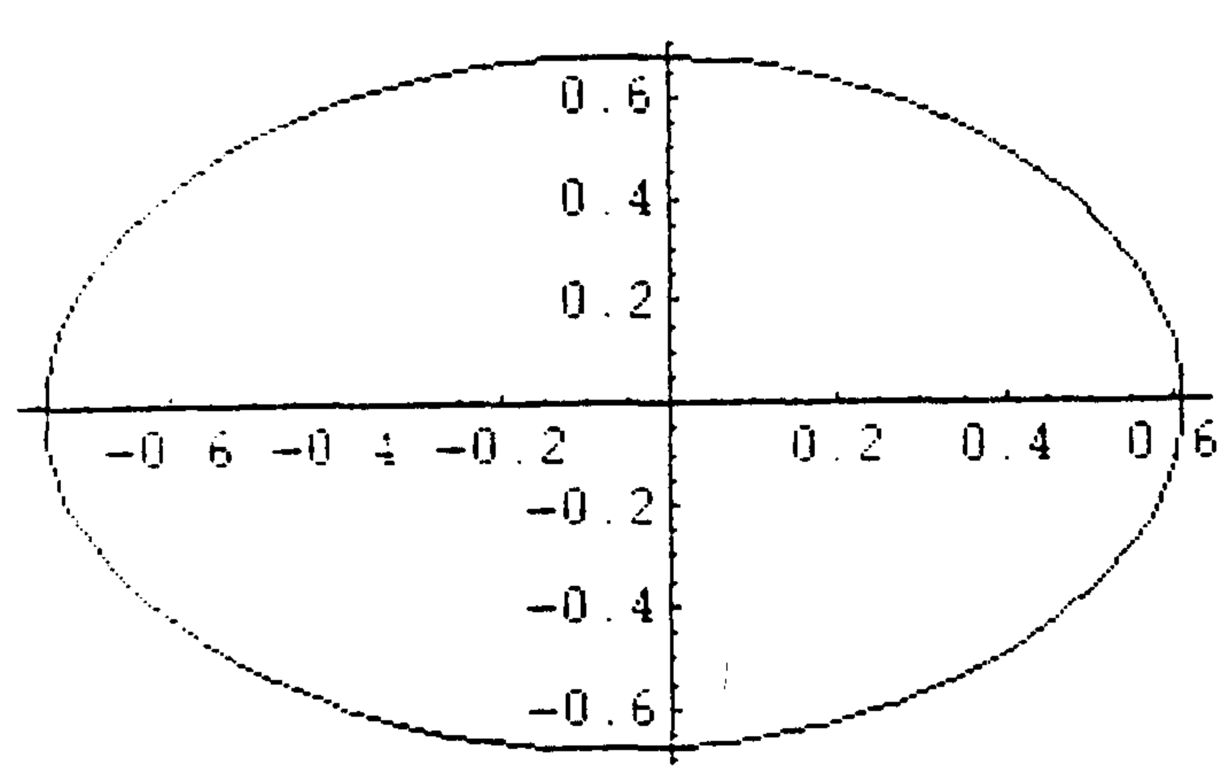
Time Plot- $x'(t)$



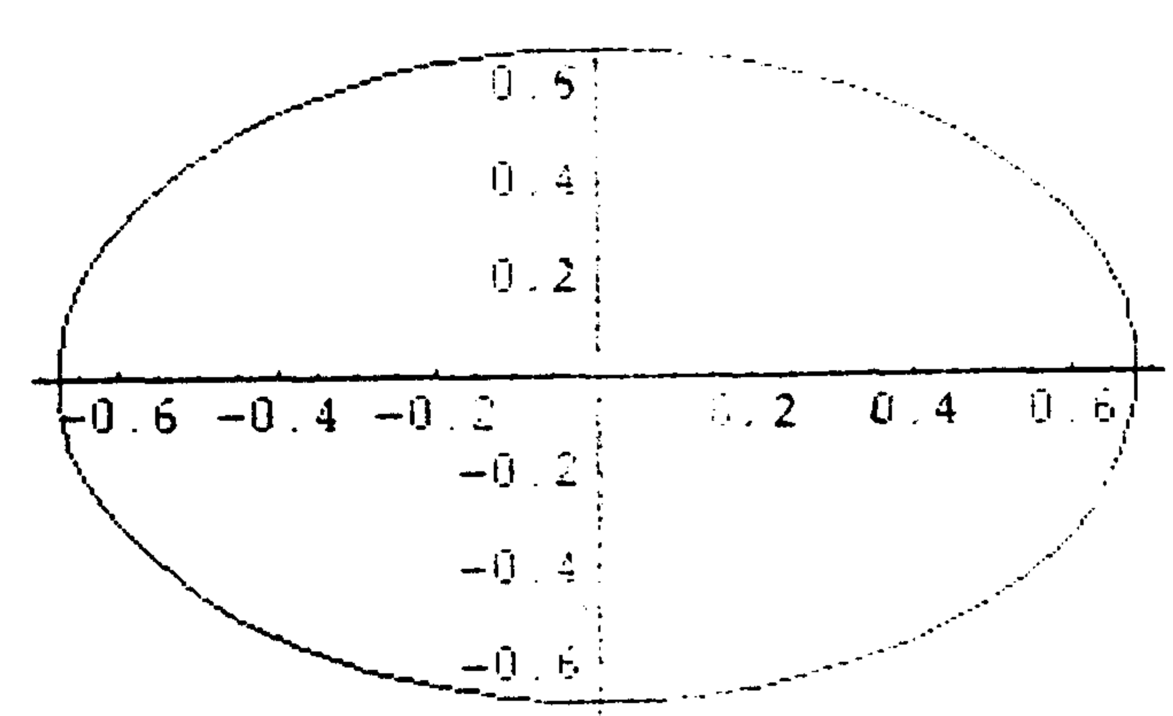

Time Plot- $x''(t)$




Phase Plane- $x - x'$




Phase Plane- $x' - x''$



## نتیجه گیری

وجود جواب تناوبی یک معادله دیفرانسیل رسته سوم غیرخطی که دارای کاربرد در ترمز خودروهای سنگین است به اثبات رسیده است و سپس این جواب تناوبی با روشهای عددی تقریب شده است. ناگفته نماند که در ادامه این کار تحقیقاتی ما مایلیم که برای $\varepsilon\in[0,1]$ وجود جواب تناوبی را تعمیم دهیم (مستقل از پارامتر کوچک $\varepsilon$).



## تقدیر و تشکر

این مقاله تحقیقی، مستخرج از طرح پژوهشی ۶۱۱/۱/۴۴۴، با پشتیبانی مالی و معنوی دانشکده فنی دانشگاه تهران میسر گردید. لذا، لازم می دانیم که از مسئولین محترم دانشکده فنی و معاونت محترم پژوهشی دانشگاه تهران تشکر و قدردانی نمائیم که بدون کمک آنها این کار میسر نمی گردید.


## مراجع


۱ - حشمتی، غ. ش.، مهری، ب.، معظمی، د. و ذکائی، ع. "وجود جواب تناوبی معادله دیفرانسیل رسته سوم غیرخطی، یک مدل ریاضی برای ترمز خودروهای سنگین." نشریه دانشکده فنی، جلد ۳۲، خرداد ماه (۱۳۷۸).

2 - Dieudonne, J. Foundations of modern analysis, Academic Press.

3 - Pacejka, H. B. (1986). Non linearities in road vehicle dynamics vehicle system, dynamic. Vol. 15, PP. 237-254.

4 - Mehri, B. (1970). "Periodic solution for certain nonlinear third order differential eqution." *Indian fue, Appl. Math.,* Vol. 21, No. 3, PP. 203-210.

5 - Mehri, B. and Emamirad, H. A. (1979). "On the existence of periodic solution for autonomous second order systems." *Nonlinear Analysis, Theory, Method and Applications,* Vol. 3, PP. 577-583.

6 - Zokaei, A. (1995). Some boundary value problems for nonlinear third order ordinary diff. eqs. proceeding I. C. I. A. H. PP. 493-501.