

# تحلیل محیط نیمه بی‌نهایت ایزوتروپ جانبی تحت اثر نیروی هارمونیک متحرک

محمد رحیمیان

دانشیار گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

مرتضی اسکندری قادی

استادیار گروه مهندسی عمران - دانشگاه علوم و فنون مازندران

حسن بهار

فارغ التحصیل کارشناسی ارشد سازه - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۷۸/۱۱/۳۰، تاریخ تصویب ۸۰/۳/۵)

## چکیده

آنالیز محیط نیمه بی‌نهایت ایزوتروپ جانبی<sup>۱</sup> تحت اثر بار متحرک که به صورت قائم بر سطح محیط وارد می‌شود مورد نظر است. برای حل این مسأله، از توابع پتانسیل ارائه شده توسط اسکندری قادی و نورزاد که توابع اصلاح شده لخنیتسکی برای مسائل دینامیکی می‌باشد، استفاده می‌شود. در این روش، دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای با کمک توابع پتانسیل فوق به صورت مجزا در می‌آید و این معادلات مجزا به کمک تبدیل انتگرالی فوریه حل می‌شوند. بنابراین، تغییرمکانها و تنشها در فضای فوریه به دست می‌آیند. سپس با اعمال تبدیل وارون فوریه و انتگرال‌گیری عددی تغییر مکانها و تنشهای ناشی از نیروی متحرک در فضای حقیقی به دست می‌آیند. در انتها به کمک سری فوریه، تغییرمکانها و تنشهای ناشی از بارهای هارمونیک با هم جمع شده و تغییرمکانها و تنشهای ناشی از بار متمرکز متحرک به دست می‌آیند. نتایج فوق برای محیطهای ایزوتروپ جانبی و نیز محیط ایزوتروپ به دست آمده و به صورت نمودارهایی ارائه می‌شوند. انطباق عالی نتایج بدست آمده از این مقاله با نتایج موجود در حالت ایزوتروپ صحت نتایج را نشان می‌دهد.

**واژه های کلیدی:** محیط ایزوتروپ جانبی، محیط ایزوتروپ، نیروی متحرک قائم، توابع پتانسیل لخنیتسکی، دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای، تبدیل انتگرالی فوریه، سری فوریه

## مقدمه

در حالت استاتیکی حل کردند. (مسأله Mindlin) تحلیل محیط نیمه بینهایت ایزوتروپی است که بار متمرکز در داخل آن اعمال شده و در سال ۱۹۳۶ حل شده بود. مسأله اخیر پن و چو را می‌توان با صفر در نظر گرفتن عمق بار متمرکز مدفون در محیط به مسأله محیط نیمه بی‌نهایت ایزوتروپ جانبی که بار متمرکز روی سطح آن وجود دارد تبدیل کرد [۲].

در زمینه محیطهای ایزوتروپ جانبی، لخنیتسکی (S.G.Lekhnitskii) حل کلی مسائل متقارن محوری ایزوتروپ جانبی را در حالت استاتیکی ارائه داده

تحلیل محیطهای نیمه بی‌نهایت ایزوتروپ تحت اثر نیروهای وارده اولین بار در سال ۱۸۲۸ توسط لامه (Lame) و کلاپیرون (Clapeyron) با طرح مسأله بار نقطه‌ای عمود بر سطح محیط نیمه بی‌نهایت مطرح شد. این مسأله در سال ۱۸۷۸ توسط بوسینسک (J.V.Bossinesq) حل شد. در سال ۱۹۶۳، باردن (Barden) تابع گرین محیط ایزوتروپ جانبی نیمه بی‌نهایت<sup>۲</sup> را در حالت نیروی عمودی استاتیکی به دست آورد [۱]. پن (Y.C.Pan) و چو (T.W.Chou) در سال ۱۹۷۹ مسأله (Mindlin) را برای محیط ایزوتروپ جانبی

نیمه بی‌نهایت،  $\delta(y)$  تابع دلتای دیراک،  $n$  معرف جمله  $n$  ام سری فوریه و  $L$  نصف دوره تناوب تابع اولیه‌ای است که سری فوریه آن نوشته شده است.

مراحل حل مسأله طرح شده در این مقاله به ترتیب زیر است:

ابتدا معادلات ناویه در حالت دینامیکی نوشته می‌شوند. به کمک توابع پتانسیل ارائه شده توسط اسکندری و نورزاد معادلات دیفرانسیل ساده‌تری به صورت مجزا<sup>۳</sup> به دست می‌آیند. این معادلات، معادلات دیفرانسیل حاکم بر توابع پتانسیل هستند. برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر توابع پتانسیل، از این معادلات نسبت به  $y$  تبدیل فوریه گرفته و پس از حل معادلات، توابع پتانسیل در فضای تبدیل یافته به دست می‌آیند. با به دست آمدن توابع پتانسیل، تغییرمکانها و در نتیجه تنشها نیز در فضای تبدیل یافته به دست می‌آیند. برای به دست آوردن ثابتهای معادلات، از شرایط مرزی نیرویی در مرز بالایی محیط نیمه بی‌نهایت و همچنین شرط صفر بودن تغییرمکانها و تنشها در بی‌نهایت استفاده می‌شود.

به این ترتیب، پس از حل معادلات و ارضاء شرایط مرزی، تنشها و تغییرمکانها در فضای فوریه به دست می‌آیند. تنشها و تغییرمکانها در فضای حقیقی را می‌توان به کمک تبدیل وارون فوریه به دست آورد.

در انتها جمع جملات بارگذاری  $P_0 \delta(y) e^{\frac{i\pi}{L}(x-Ct)}$  به صورت سری فوریه نوشته می‌شوند تا نتایج تنش و تغییرمکان نقاط مختلف محیط تحت اثر نیروی متمرکز متحرک اعمال شده بر سطح محیط نیمه بی‌نهایت به دست آید.

### معادله دیفرانسیل حاکم (معادله حرکت)

همانطوری که در مقدمه گفته شد در مسأله مورد بررسی، نیروهایی به سطح محیط نیمه بینهایت وارد می‌شوند، از نیروهای حجمی هم صرف‌نظر می‌شود. معادله حرکت (معادله تعادل نیروها بر حسب تغییرمکانها) در داخل محیط به صورت زیر است:

است [۳]. وی برای حل این مسائل توابع پتانسیل خاصی را پیشنهاد کرده است. در سال ۱۹۵۳، هو (Hu) و در سال ۱۹۵۴ نوواکی (Nowacki) حل لخنیتسکی را برای حل مسائل عمومی سه بعدی محیط ایزوتروپ جانبی گسترش دادند. در سال ۱۹۹۵ (M.Z.Wang) و (W.Wang) ثابت کردند مجموعه توابع پتانسیل لخنیتسکی، هو و نوواکی مجموعه کاملی جهت حل مسائل الاستواستاتیک محیطهای ایزوتروپ جانبی هستند [۴].

در سال ۱۹۶۹ گاکنهاایمر (D.C.Gakenheimer) و میکلوویچ (J.Miklowitz) حل گذرای تحریک ناشی از بار متمرکز قائمی را که با سرعت ثابت روی سطح محیط نیمه بی‌نهایت ایزوتروپ حرکت می‌کند، ارائه دادند. البته انتگرالهای جواب محاسبه عددی نشده‌اند و همچنین بعضی از انتگرالها به صورت مقدار اصلی کوشی بیان شده‌اند [۵].

اسکندری و نورزاد با گسترش مقاله سال ۱۹۹۵ ونگ (M.Z.Wang) و ونگ (W.Wang) توابع پتانسیل کامل جهت حل مسائل انتشار امواج در محیطهای ایزوتروپ جانبی را ارائه داده‌اند. با استفاده از این توابع پتانسیل و بدون استفاده از تبدیلات انتگرالی معادلات دینامیکی حاکم بر محیطهای ایزوتروپ جانبی مستقل خواهند شد [۶].

با توجه به اینکه اثرات دینامیکی بار متمرکز متحرک در محیط ایزوتروپ جانبی تاکنون مورد بررسی و تحقیق قرار نگرفته، در این مقاله ابتدا محیط نیمه بی‌نهایت ایزوتروپ جانبی تحت اثر بار متحرک هارمونیک مورد بررسی قرار گرفته است. سپس با جمع جملات بارگذاری به صورت سری فوریه اثرات دینامیکی بار متمرکز متحرک در فضای زمانی به دست آمده‌اند. بارگذاری هارمونیک این مقاله به صورت زیر فرض می‌شود:

$$P(x, y, t) = P_0 \delta(y) e^{\frac{i\pi}{L}(x-Ct)} \quad (1)$$

در رابطه بالا  $P(x, y, t)$ ، نیروی وارده به سطح محیط

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= A_{11}\varepsilon_{xx} + A_{12}\varepsilon_{yy} + A_{13}\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{yy} &= A_{12}\varepsilon_{xx} + A_{11}\varepsilon_{yy} + A_{13}\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{zz} &= A_{13}\varepsilon_{xx} + A_{13}\varepsilon_{yy} + A_{33}\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{xy} &= 2A_{66}\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} &= 2A_{44}\varepsilon_{xz} \\ \sigma_{yz} &= 2A_{44}\varepsilon_{yz}\end{aligned}\quad (7)$$

با بسط دادن معادله (۶) بر حسب اندیسهای  $k, j$  و  $l$  و قرار دادن ضرایب (۷) در معادله بسط داده شده، معادله مذکور به صورت زیر تبدیل خواهد شد [۱]:

$$[D] \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = 0. \quad (8)$$

عناصر ماتریس  $3 \times 3$  [D] مربوط به رابطه بالا از روابط زیر به دست می آیند [۶]:

$$\begin{aligned}D_{11} &= \nabla_{xy}^2 + a_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho_a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ D_{22} &= \nabla_{xy}^2 + a_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho_a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ D_{33} &= a_2 \nabla_{xy}^2 + a_4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho_a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ D_{12} &= D_{21} = a_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ D_{13} &= D_{31} = a_3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ D_{23} &= D_{32} = a_3 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\end{aligned}$$

پارامترهای به کار رفته در رابطه بالا به شرح زیر هستند [۶]:

$$\begin{aligned}\nabla_{xy}^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ a_1 &= \frac{A_{66} + A_{12}}{A_{66}} \\ a_2 &= \frac{A_{44}}{A_{66}} \\ a_3 &= \frac{A_{13} + A_{44}}{A_{66}} \\ a_4 &= \frac{A_{33}}{A_{66}}\end{aligned}$$

$$\int_S T_i ds = \int_V \rho \ddot{u}_i dv \quad (2)$$

که  $T_i$ ، مولفه  $i$  ام بردار تنش و  $\ddot{u}_i$  هم مولفه  $i$  ام بردار شتاب هستند.  $T_i$  را بر حسب تنشها می توان به صورت زیر نوشت [۷]:

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (3)$$

در رابطه بالا  $n_j$  مولفه  $j$  ام بردار یکه نرمال سطح محیط است. با استفاده از رابطه (۳) می توان رابطه (۲) را به صورت زیر نوشت:

$$\int_V \sigma_{ij,j} dv = \int_V \rho \ddot{u}_i dv \quad (4)$$

با توجه به اینکه معادله (۴) برای هر حجمی برقرار است، می توان علامت انتگرال را هم حذف کرد، معادلات حرکت در یک محیط ارتجاعی بدون نیروهای حجمی به صورت زیر در می آیند:

$$\sigma_{ij,j} dv = \rho \ddot{u}_i dv \quad (5)$$

برای اینکه از معادلات (۵)، معادلات ناویه، یعنی معادلات حرکت در محیط ارتجاعی بر حسب تغییرمکانها به دست آیند، از رابطه بین تنش و کرنش و نیز رابطه بین کرنش و تغییرمکان استفاده می شود. در نهایت معادله ناویه در حالت اندیسی برای یک محیط ارتجاعی به صورت زیر در می آید:

$$\frac{1}{2} C_{ijkl} (u_{k,lj} + u_{l,kj}) = \rho \ddot{u}_i \quad (6)$$

در رابطه بالا  $C_{ijkl}$  ضرایب ارتجاعی محیط ایزوتروپ هستند.

محیط مسأله مورد نظر این مقاله محیط ایزوتروپ جانبی است. در این مقاله صفحه  $xy$  در دستگاه مختصات کارتزین  $xyz$  صفحه ایزوتروپی است. بنابراین رابطه بین تنش و کرنش در محیط ایزوتروپ جانبی به صورت زیر خواهد بود:

$$u_x = -a_3 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

(۱۳)

$$u_y = -a_3 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \chi}{\partial x}$$

(۱۴)

$$u_z = (1 + a_1) (\nabla_{xy}^2 + \beta \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho'_a \frac{\partial^2}{\partial t^2}) F$$

(۱۵)

معادلات حاکم بر توابع پتانسیل  $F$  و  $\chi$  به شرح زیرند [۶]:

$$\nabla_0^2 \chi = 0$$

(۱۶)

$$\nabla_1^2 \nabla_2^2 F = 0$$

(۱۷)

در رابطه بالا  $\nabla_0^2$ ،  $\nabla_1^2$  و  $\nabla_2^2$  از روابط زیر به دست می‌آیند [۶]:

$$\nabla_0^2 = \nabla_{xy}^2 + a_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho_a \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

(۱۸)

$$\nabla_i^2 = \nabla_{xy}^2 + \frac{1}{S_i^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\mu_i} \rho_a \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

(i=1,2)

(۱۹)

در رابطه بالا  $\mu_1$  و  $\mu_2$  از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \mu_1 = a_2 = \frac{A_{44}}{A_{66}} \\ \mu_2 = 1 + a_1 = \frac{A_{11}}{A_{66}} \end{cases}$$

(۲۰)

$S_1$  و  $S_2$  هم ریشه‌هایی از معادله زیر هستند که موهومی خالص نباشند:

$$A_{33}A_{44}S^4 + (A_{13}^2 + 2A_{13}A_{44} - A_{11}A_{33})S^2 + A_{11}A_{44} = 0.$$

(۲۱)

$$\begin{cases} \beta = \frac{a_2}{1 + a_1} \\ \rho'_a = \frac{\rho_a}{1 + a_1} \end{cases}$$

(۲۲)

$$\rho_a = \frac{\rho}{A_{66}}$$

(۹)

### شرایط مرزی مسأله

در این مسأله در سطح بالایی محیط نیمه بی‌نهایت ( $z=0$ ) بار  $P(x,y,t)$  اعمال شده است که شرط مرزی نیرویی مسأله است. بارگذاری روی سطح در راستای محور  $x$  و به صورت رابطه زیر بیان می‌شود:

$$P(x, y, t) = P_0 \delta(y) e^{i\omega_n(x-Ct)}$$

(۱۰)

این بارگذاری را می‌توان به صورت سه تنش زیر نمایش داد:

$$\begin{cases} \bar{T}_x = 0. \\ \bar{T}_y = 0. \\ \bar{T}_z = P_0 \delta(y) e^{i\omega_n(x-Ct)} \bar{e}_z \end{cases}$$

(۱۱)

مولفه‌های بردار تنش رابطه (۱۱) را می‌توان با استفاده از رابطه (۳) به شرح زیر بر حسب تنشها نوشت:

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = 0. \\ \sigma_{yz} = 0. \\ \sigma_{zz} = -P_0 \delta(y) e^{i\omega_n(x-Ct)} \end{cases}$$

(۱۲)

علاوه بر شرایط مرزی بالا شرط مرزی دیگری هم وجود دارد و آن صفر بودن تغییرمکانها و تنشها در بی‌نهایت است.

### به دست آوردن معادلات دیفرانسیل حاکم بر

#### توابع پتانسیل

در این مقاله از توابع پتانسیل معرفی شده بوسیله اسکندری و نورزاد [۶] که گسترش یافته توابع پتانسیل لخنیتسکی (lekhitskii) هستند استفاده شده است. این توابع با  $F$  و  $\chi$  نمایش داده می‌شوند. رابطه بین مولفه‌های بردار تغییرمکان و توابع پتانسیل به صورت زیر است [۶]:

$$\bar{F} = (A_1 e^{+S_1 \sqrt{\alpha_1} z} + B_1 e^{-S_1 \sqrt{\alpha_1} z} + A_2 e^{+S_2 \sqrt{\alpha_2} z} + B_2 e^{-S_2 \sqrt{\alpha_2} z}) e^{i\omega_n(x-Ct)} \quad (27)$$

$\alpha_1$  از رابطه (۲۸) و  $\alpha_2$  از رابطه (۲۹) محاسبه می‌شوند. ثابتهای  $A_1, B_1, A_2, B_2$  در بند ۶ و با ارضاء شرایط مرزی به دست می‌آیند.

$$\alpha_1 = \xi^2 + \omega_n^2 - \frac{\rho_a C^2 \omega_n^2}{\mu_1} \quad (28)$$

$$\alpha_2 = \xi^2 + \omega_n^2 - \frac{\rho_a C^2 \omega_n^2}{\mu_2} \quad (29)$$

حل معادله  $\nabla_0^2 \chi = 0$

حل این معادله هم مانند حل معادله (۱۷) است.

تابع  $\chi$  هم به صورت زیر است:

$$\chi = \chi(y, z) e^{i\omega_n(x-Ct)} \quad (30)$$

جواب معادله (۱۶) به صورت زیر است:

$$\bar{\chi} = (A_3 e^{\sqrt{\alpha_3} z} + B_3 e^{-\sqrt{\alpha_3} z}) \times e^{i\omega_n(x-Ct)} \quad (31)$$

در  $\alpha_3$  رابطه بالا از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\alpha_3 = \frac{1}{a_2} (\xi^2 + \omega_n^2 - \rho_a (C\omega_n)^2) \quad (32)$$

### ارضاء شرایط مرزی و به دست آوردن تغییرمکانها و تنشها در فضای حقیقی

مرزهای محیط نیمه بی‌نهایت مسأله یکی

در  $z=0$  و دیگری در  $z \rightarrow \infty$  هستند. در  $z=0$

شرایط مرزی نیرویی هستند. به عبارت دیگر

ابتدا باید تنشها را به دست آورد و سپس آنها را در مرز

$z=0$  ارضاء نمود.

با حل معادلات (۱۶) و (۱۷) توابع  $\chi$  و  $F$  به دست خواهند آمد و با قرار دادن این توابع در معادلات (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) مولفه های بردار تغییرمکان به دست خواهند آمد. همچنین با استفاده از روابط کرنش-تغییرمکان و تنش-کرنش، می‌توان تنشها را به دست آورد.

برای حل معادلات حاکم بر توابع پتانسیل از

تبدیل فوریه استفاده می‌شود. در این مقاله  $F(\omega)$

تبدیل فوریه تابع  $f(x)$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (23)$$

تبدیل وارون فوریه هم به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (24)$$

تبدیل فوریه مشتق  $n$  ام تابع  $f$  با تبدیل فوریه خود تابع دارای رابطه زیر است:

$$F[f^{(n)}] = (i\omega)^n F[f] \quad (25)$$

در رابطه بالا  $f^{(n)}$  مشتق  $n$  ام تابع  $f$  و پارامتر تبدیل فوریه است.

### حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل حاکم بر

توابع پتانسیل در فضای تبدیل یافته

$$\nabla_1^2 \nabla_2^2 F = 0 \quad \text{حل معادله}$$

برای حل معادله (۱۷) از تبدیل فوریه در راستای

محور  $y$  استفاده می‌شود و پارامتر تبدیل فوریه هم  $\xi$

است. از آنجایی که بارگذاری به صورت

$$P_0 \delta(y) e^{i\omega_n(x-Ct)}$$

زیر است:

$$F = F(y, z) e^{i\omega_n(x-Ct)} \quad (26)$$

با جاگذاری تابع فوق در معادله (۱۷) و اعمال تبدیل

فوریه، تابع در فضای فوریه به صورت زیر به دست

می‌آید:

$$B_1 = -P_0 \frac{(\xi D_3 + \omega_n D_5)}{MA} \quad (36)$$

$$B_2 = P_0 \frac{(\xi D_2 + \omega_n D_4)}{MA} \quad (37)$$

$$B_3 = -P_0 \frac{1}{A_{44} \sqrt{\alpha_3}} \frac{(D_2 D_5 \omega D_3 D_4)}{MA} \quad (38)$$

می آیند [۱]:  
 $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$  از روابط زیر به دست

$$D_1 = A_{13} \omega_n^2 a_3 + A_{13} \xi^2 a_3 + A_{33} (1 + a_1) \times (\rho'_a (C \omega_n)^2 - \omega_n^2 - \xi^2) \quad (1-39)$$

$$D_2 = -S_1^2 \alpha_1 A_{44} \xi a_3 + A_{44} \xi (1 + a_1) \times (\rho'_a (C \omega_n)^2 - \omega_n^2 - \xi^2) + A_{44} \xi (1 + a_1) \beta S_1^2 \alpha_1 \quad (2-39)$$

$$D_3 = -S_2^2 \alpha_2 A_{44} \xi a_3 + A_{44} \xi (1 + a_1) \times (\rho'_a (C \omega_n)^2 - \omega_n^2 - \xi^2) + A_{44} \xi (1 + a_1) \beta S_2^2 \alpha_2 \quad (3-39)$$

$$D_4 = -S_1^2 \alpha_1 A_{44} \omega_n a_3 + A_{44} \omega_n (1 + a_1) \times (\rho'_a (C \omega_n)^2 - \omega_n^2 - \xi^2) + A_{44} \omega_n (1 + a_1) \beta S_1^2 \alpha_1 \quad (4-39)$$

$$D_5 = -S_2^2 \alpha_2 A_{44} \omega_n a_3 + A_{44} \omega_n (1 + a_1) \times (\rho'_a (C \omega_n)^2 - \omega_n^2 - \xi^2) + A_{44} \omega_n (1 + a_1) \beta S_2^2 \alpha_2 \quad (5-39)$$

در روابط بالا  $MA$  از رابطه زیر محاسبه می شود [۱]:

$$MA = -S_1 \sqrt{\alpha_1} (\xi D_3 + \omega_n D_5) \times (D_1 + A_{33} (1 + a_1) \beta S_1^2 \alpha_1) + S_2 \sqrt{\alpha_2} (\xi D_2 + \omega_n D_4) \times (D_1 + A_{33} (1 + a_1) \beta S_2^2 \alpha_2) \quad (40)$$

در  $z \rightarrow \infty$ ، تنشها و تغییر مکانها صفر هستند. بنابراین باید ثابتهای معادلات در روابط به گونه ای در نظر گرفته شوند که این شرط هم رعایت شود.

#### ارضای صفر بودن تغییر مکانها در بی نهایت

طبق این فرض مقادیر تغییر مکانها در بی نهایت صفر است. برای ارضای این شرط مرزی ضرایب  $A_2, A_1$  و  $A_3$  با فرض  $Re[S_1] > 0$  و  $Re[S_2] > 0$  برابر با صفر می شوند:

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0 \quad (33)$$

#### ارضای شرایط مرزی برای به دست آوردن ضرایب مجهول $B_3, B_2, B_1$

برای به دست آوردن سه ضریب باقیمانده  $B_1, B_2$  و  $B_3$  باید تنشها را در فضای فوریه به دست آورده و سپس شرایط مرزی نیرویی در  $z=0$  ارضای شوند. با استفاده از روابط کرنش، تغییر مکان و نیز روابط (۷) و (۲۳) تنشها در فضای فوریه به شرح زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xz} &= A_{44} \left( \frac{d\bar{u}_x}{dz} + i\omega_n \bar{u}_z \right) \\ \bar{\sigma}_{yz} &= A_{44} \left( \frac{d\bar{u}_y}{dz} + i\xi \bar{u}_z \right) \\ \bar{\sigma}_{zz} &= i\omega_n A_{13} \bar{u}_x + i\xi A_{13} \bar{u}_y + A_{33} \frac{d\bar{u}_z}{dz} \end{aligned} \quad (34)$$

برای ارضای شرایط مرزی، ابتدا از طرفین معادله (۱۲) نسبت به محور  $z$  تبدیل فوریه گرفته می شود. شرطهای مرزی نیرویی در فضای تبدیل یافته فوریه به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xz}(z=0) &= 0 \\ \bar{\sigma}_{yz}(z=0) &= 0 \\ \bar{\sigma}_{zz}(z=0) &= -P_0 e^{i\omega_n(x-Ct)} \end{aligned} \quad (35)$$

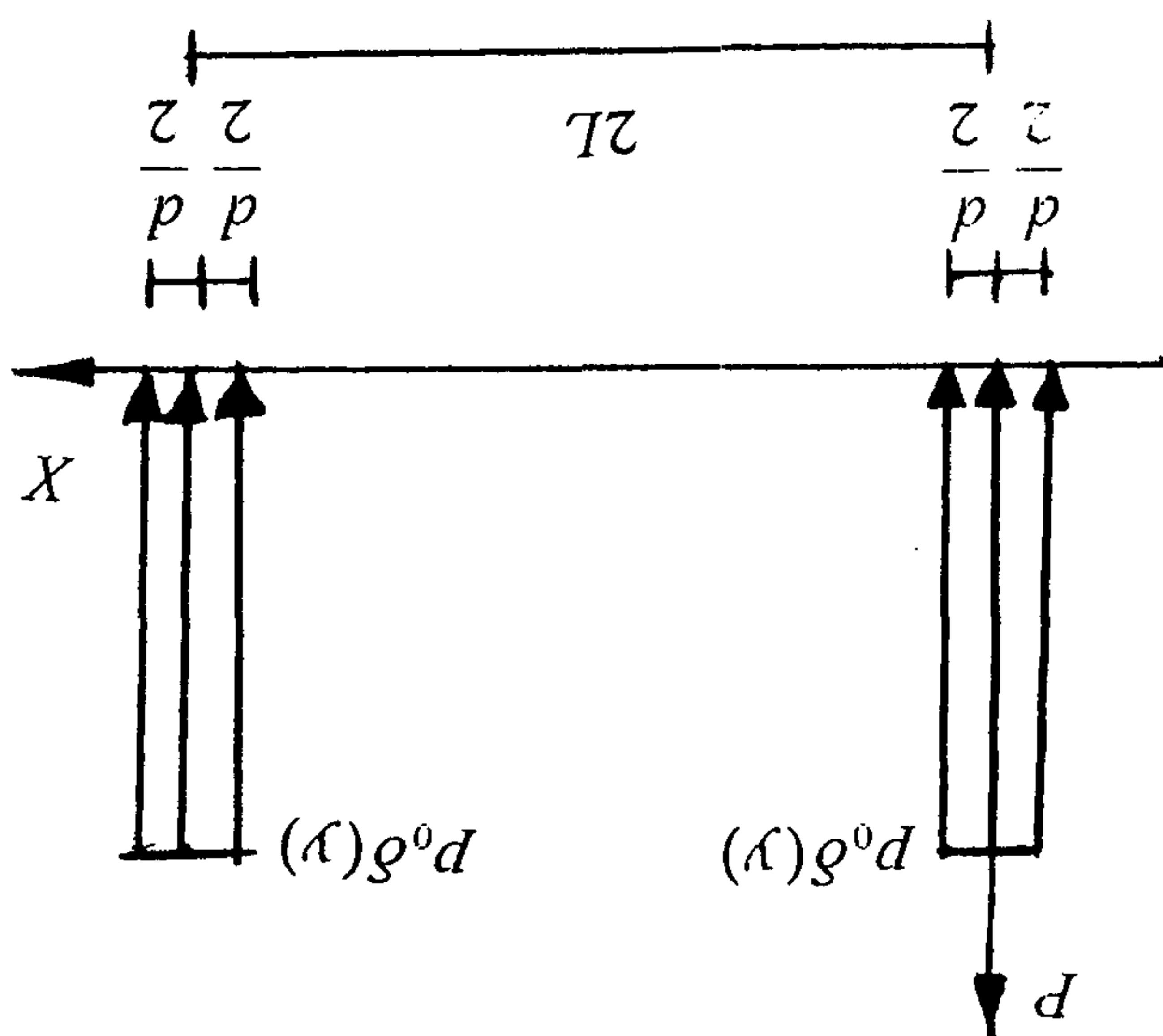
با استفاده از روابط (۱۳) تا (۱۵) و (۲۷) و (۳۱) در روابط (۳۴) و با قرار دادن روابط (۳۴) در روابط (۳۵) و حل دستگاه سه معادله و سه مجهول، سه ثابت  $B_2, B_1$  و  $B_3$  به دست می آیند [۱]:

### بسط به سری فوریه نیروی متمرکز متحرک

در این بخش، سری فوریه نیروی متمرکز به عرض  $d$  که عدد کوچکی است و با سرعت ثابت  $C$  در راستای محور  $x$  در حرکت است، نوشته خواهد شد. محور  $X$  به جای محور  $x$  در محاسبات به کار برده خواهد شد. این محور از تبدیل محور  $x$  طبق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$X = x - Ct \quad (44)$$

بار متمرکز به صورت شکل زیر در راستای محور مختصات  $X$  تعریف می‌شود:



شکل ۱: بارگذاری در یک دوره تناوب.

بسط به سری فوریه نیروی متمرکز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(X, y, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n e^{i \frac{n\pi}{L} X} \quad (45)$$

$$P_n = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} P(X, y, t) e^{-i \frac{n\pi}{L} X} dX \quad (46)$$

با توجه به رابطه پس از انتگرال‌گیری از رابطه (۴۶) سری فوریه بار متمرکز به صورت زیر است:

با به دست آمدن سه ثابت  $B_1, B_2, B_3$  تنشها و تغییرمکانها در فضای فوریه به دست می‌آیند. اکنون می‌توان با اعمال تبدیل وارون، تنشها و تغییرمکانها را در فضای حقیقی به دست آورد:

$$u_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}_k(\xi) e^{+i\xi y} d\xi \quad (k = x, y, z) \quad (1-41)$$

$$\sigma_{kl} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\sigma}_{kl}(\xi) e^{+i\xi y} d\xi \quad (k, l = x, y, z) \quad (2-41)$$

به این ترتیب تنشها و تغییرمکانها در فضای حقیقی به صورت انتگرالهای ناسره<sup>۴</sup> بیان شدند. در بخش (۸)، نتایج حل انتگرالهای بالا به روش عددی بیان شده‌اند.

### به دست آوردن تغییرمکانها و تنشهای ناشی از بار متمرکز متحرک

با نوشتن سری فوریه نیروی متحرک با هر شکل دلخواه و استفاده از نتایج این مقاله، می‌توان تغییرمکانها و تنشهای ناشی از هر نیرو با هر شکل دلخواه در راستای محور  $x$ ، که با سرعت ثابت  $C$  روی سطح محیط نیمه بی‌نهایت حرکت می‌کند را به دست آورد. در اینجا به عنوان نمونه تغییرمکانها و تنشهای ناشی از بار متمرکز متحرک به کمک بسط به سری فوریه به دست می‌آید.

اگر  $f(x)$  تابع تناوبی با دوره تناوب  $2L$  باشد، آنگاه مقدار این تابع در هر نقطه با سری فوریه به شرح زیر برابر خواهد بود:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n e^{i \frac{n\pi}{L} x} \quad (42)$$

در این سری مقدار  $P_n$  از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$P_n = \frac{1}{2L} \int_a^{a+2L} f(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \quad (43)$$

کامپیوتری است. به همین دلیل برنامه کامپیوتری به زبان فرترن نوشته شد تا عملیات انتگرال گیری و نیز محاسبه سری را انجام دهد. این برنامه برای انتگرال گیری از روش سیمپسون ساده استفاده می کند.

محاسبات برای سه محیط ایزوتروپ جانبی و یک محیط ایزوتروپ، با ضرایب ارتجاعی به شرح جدول (۱) انجام شده اند.

در جدول مذکور، Beryl Rock مواد سیلیکاتی، Layered Soil ترکیبی از مواد دانه ای آهکی و ماسه ای و G-Composite ترکیب گرافیت با اپوکسی است. ضریب پواسون برای مصالح ایزوتروپ،  $\nu = 0.25$  است [۶].

برای تأیید درستی جوابهای به دست آمده از این مقاله، در محیط ایزوتروپ جواب مسأله بوسینسک موجود است که مولفه های تغییر مکان و تنش را برای نیروی متمرکز قائم وارد به سطح محیط نیمه بی نهایت ارائه کرده است [۸]. همچنین در محیط ایزوتروپ جانبی، مقاله ای توسط پن و چو در سال ۱۹۷۹ ارائه شده است [۲]. در این مقاله، نتایج تغییر مکان و تنش در نقاط مختلف محیط نیمه بی نهایت برای نیروی متمرکز قائم و نیروی متمرکز مماس بر صفحه ایزوتروپی وارد به نقطه ای در داخل محیط ارائه شده است. اگر در روابط ارائه شده عمق نیروی مدفون به سمت صفر میل داده شود، آنگاه نتایج مربوط به نیروی قائم استاتیکی وارد به سطح محیط نیمه بی نهایت ایزوتروپ جانبی به دست آمده از روابط مقاله، برای مقایسه با نتایج این مقاله قابل استفاده خواهند بود. مقایسه موارد فوق با نتایج این مقاله دقت بسیار خوب نتایج این تحقیق را نشان می دهد (نمودار ۱).

تغییر مکانهای نمایش داده شده در نمودارها به صورت رابطه (۵۰) بی بعد شده اند:

$$u_i^* = u_i \times \left( \frac{A_{11}}{P_0} \right) \quad (50)$$

در رابطه بالا  $u_i^*$  تغییر مکان بی بعد شده که در نمودارها نمایش داده شده و  $u_i$  هم تغییر مکان واقعی است.

$$P(x, y, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{nd\pi}{2L}\right)}{n\pi} \times P_0 \delta(y) e^{\frac{i n \pi}{L}(x-Ct)} \quad (47)$$

طبق رابطه بالا دیده می شود که سری خاصی که در آن بارگذاری رابطه (۱) در جمله  $\frac{\sin\left(\frac{nd\pi}{2L}\right)}{n\pi}$  ضرب شود، به بار متمرکز همگرا می شود. بنابراین طبق اصل اجتماع اثر قوا، سربهایی که جمله عمومی آنها تنشها و تغییر مکانهای این مقاله ضربدر عبارت  $\frac{\sin\left(\frac{nd\pi}{2L}\right)}{n\pi}$  باشد نیز به تنشها و تغییر مکانهای ناشی از بار متمرکز متحرک همگرا خواهند شد. بنابراین، تغییر مکانها و تنشهای ناشی از بار متمرکز متحرک به شرح زیر از تغییر مکانها و تنشهای ناشی از این مقاله به دست می آیند:

$$u_{con}(x, y, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin\left(\frac{nd\pi}{2L}\right)}{n\pi} \times u_n(x, y, z, t) \right) \quad (48)$$

$$\sigma_{con}(x, y, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin\left(\frac{nd\pi}{2L}\right)}{n\pi} \times \sigma_n(x, y, z, t) \right) \quad (49)$$

در روابط بالا  $u_n$  و  $\sigma_n$  به ترتیب جمله  $n$  ام بسط به سری فوریه  $u$  و  $\sigma$  نسبت به  $x$  هستند.

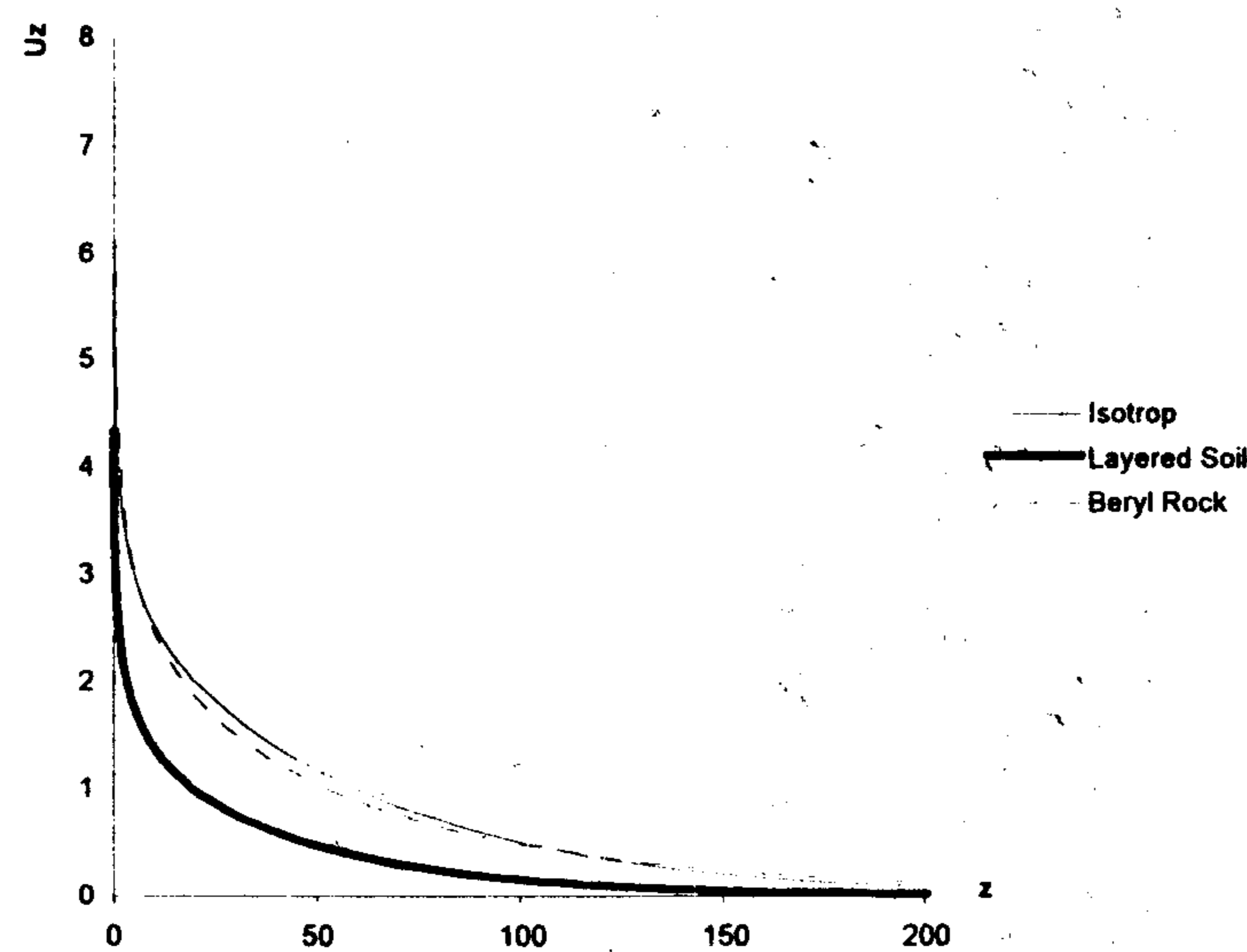
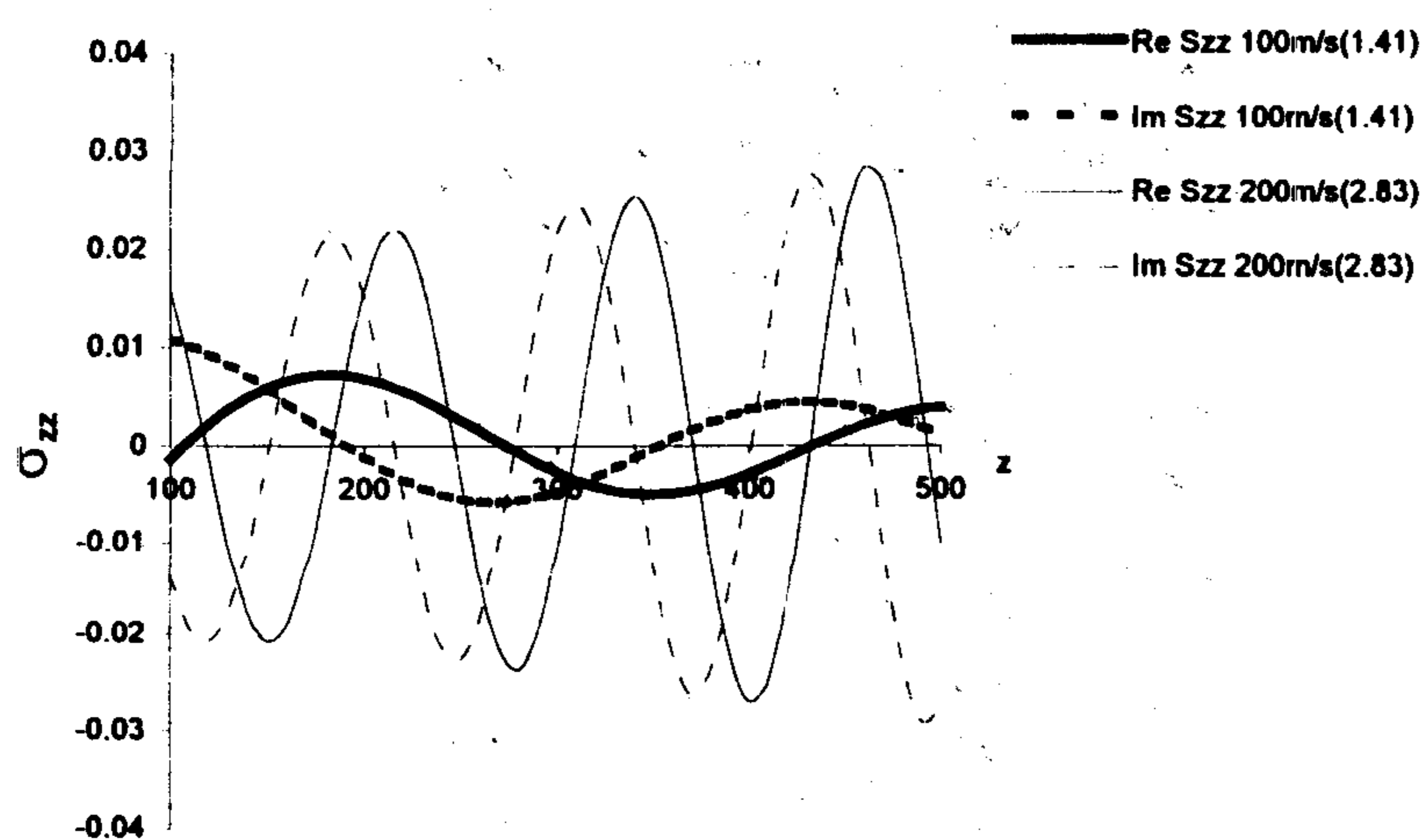
## نتایج عددی و نمودارها

برای بازگرداندن توابع تغییر مکان و تنش از فضای فوریه به فضای حقیقی، از انتگرال گیری عددی استفاده می شود. از طرف دیگر برای به دست آوردن مولفه های تنش و تغییر مکان ناشی از بار متمرکز متحرک، از سری فوریه استفاده شده است. برآورد مقدار عددی حاصل این سری هم نیازمند محاسبات



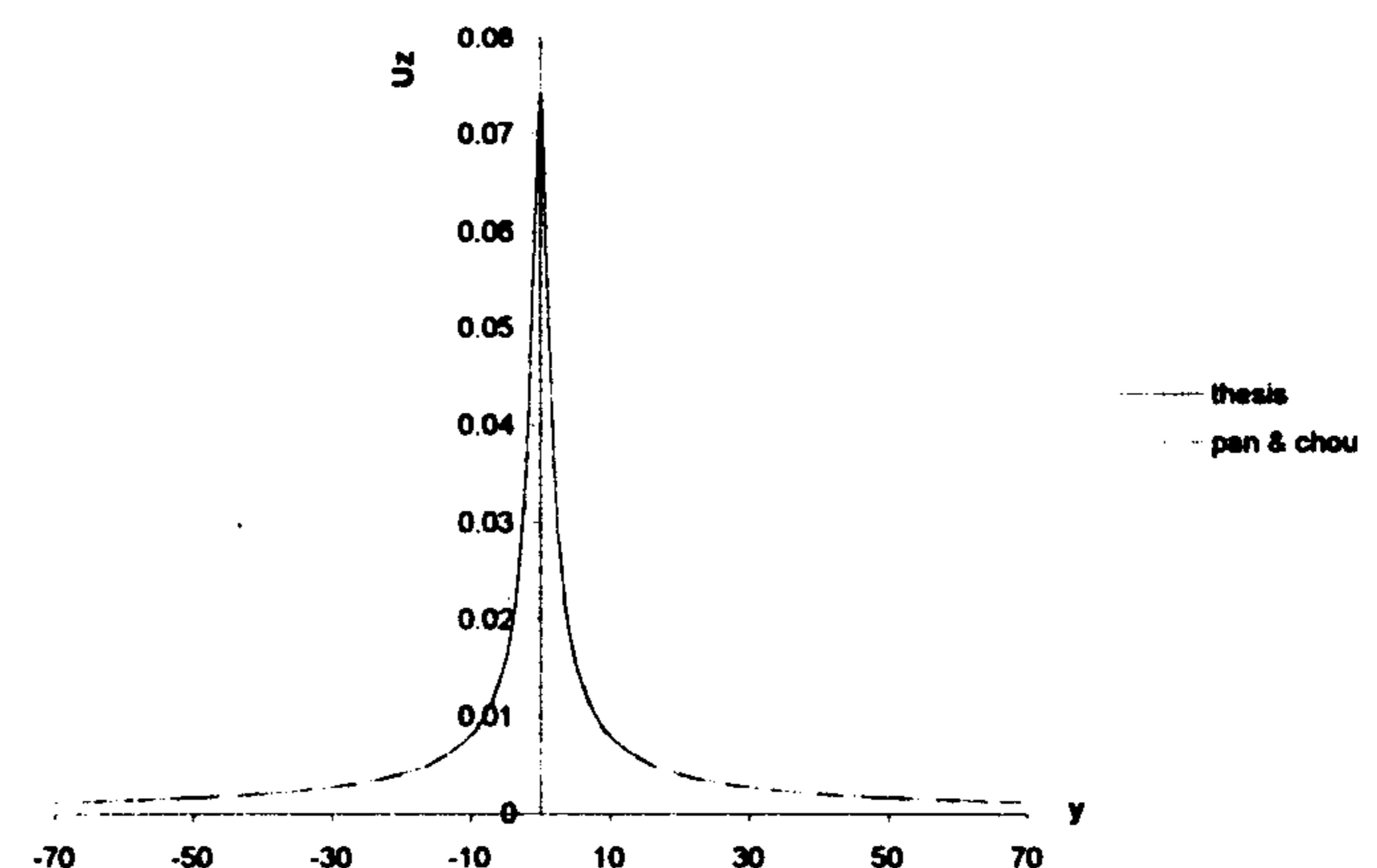
جدول ۱: مقادیر ضرایب ارتجاعی برخی از مواد دارای ویژگی ایزوتروپ جانبی ( $N/mm^2$ ).

$A_{66} \times 10^4$	$A_{44} \times 10^4$	$A_{33} \times 10^4$	$A_{13} \times 10^4$	$A_{12} \times 10^4$	$A_{11} \times 10^4$	
1	1	3	1	1	3	Isotrop
1.33	1	3.62	1.01	1.47	4.13	Beryl Rock
1.175	1.4	3.61	.66	.6	2.95	Layered Soil
.275	.41	8.68	.03	.28	.83	G-Composite

نمودار ۲: تغییرات  $U_z$  برحسب  $z$  در سرعت ۶۰ متر بر ثانیه (سرعت بی بعد ۰/۸۴۹) برای مواد مختلف در  $y = 0$ .نمودار ۳: تغییرات  $\sigma_{zz}$  برحسب  $z$  در سرعت‌های مختلف برای Beryl Rock در  $y = 0$ .

داده شده‌اند. در این سرعت‌ها، دیده می‌شود که با افزایش سرعت که به منزله افزایش فرکانس نوسان نیروی هارمونیک است، طول موج تغییرمکان یا تنش در راستای عمق کاهش می‌یابد. همچنین در جواب‌های تغییرمکان و

همچنین در نمودارهای (۱) تا (۴) همه جا مختصات  $x$  و زمان  $t$  برابر صفر و فرکانس  $\omega$  برابر با  $\frac{\pi}{100}$  در نظر گرفته شده‌اند. نمودارهای (۵) تا (۹) نیز مربوط به تنش‌ها و تغییرمکان‌های ناشی از بار متمرکز متحرک هستند. در نمودار (۱)،  $u_z$  در عمق ثابت پنج میلیمتر و در عرض‌های متفاوت، در محیط G-Composite بین نتایج این مقاله و نتایج مقاله پن و چو مقایسه شده‌است. به علت نزدیکی جواب‌های دو مورد فوق، تنها یک منحنی در نمودار دیده می‌شود.

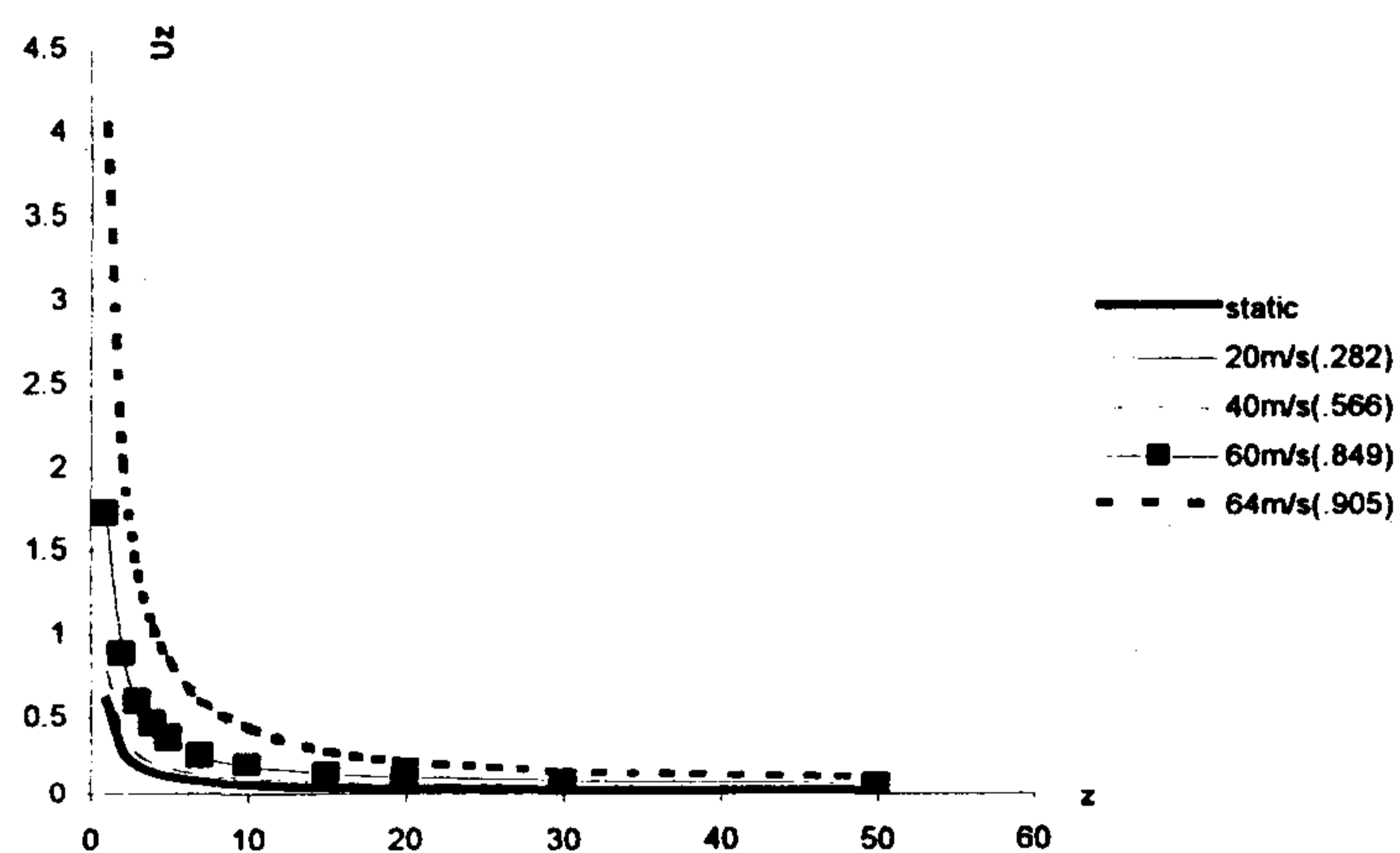
نمودار ۱: مقایسه تغییرات  $U_z$  برحسب  $y$  بین نتایج این مقاله و مقاله پن و چو برای G-Composite.

در نمودار (۲)، مقادیر  $u_z$  برای سه نوع محیط Isotrop، Layered Soil و Beryl Rock در حالت دینامیکی نمایش داده شده است. نقاط مورد نظر در زیر نیروی هارمونیک و در عمق‌های مختلف واقع شده‌اند. منحنی‌ها تا عمق بی‌نهایت فیزیکی ادامه داده شده‌اند و دیده می‌شود که در بی‌نهایت فیزیکی،  $u_z$  به سمت صفر میل کرده است.

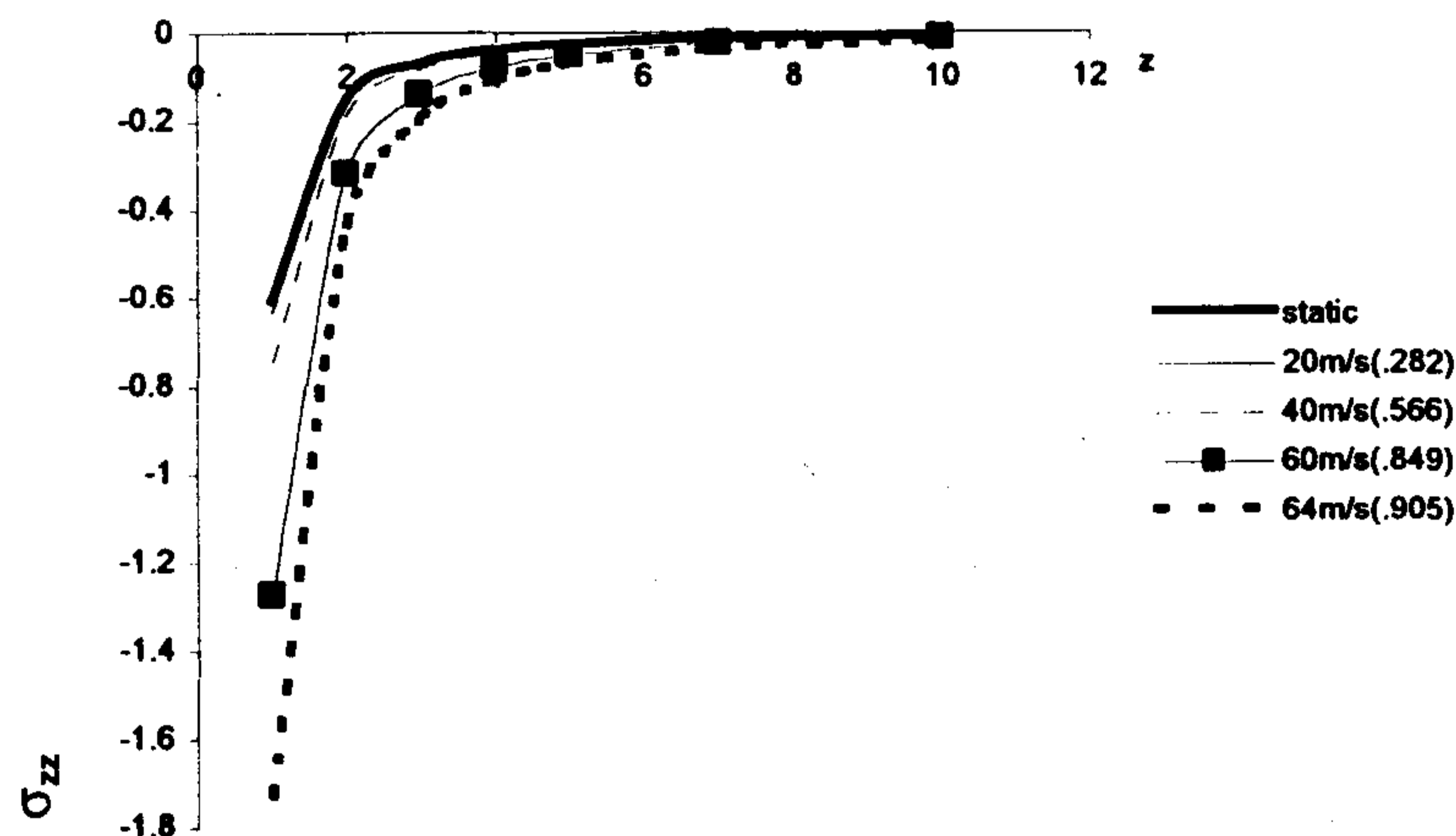
در نمودار (۳) تنش  $\sigma_{zz}$  محیط Beryl Rock در زیر بار در عمق‌های مختلف و برای سرعت‌های نسبتاً بزرگ نمایش

در نمودار (۴) تغییرات  $u_z$  در عمق ثابت و در عرضهای مختلف برای محیطهای Isotrop، Layered Soil و Beryl Rock، برای حالت دینامیکی نمایش داده شده است.

نمودارهای (۵) و (۶) تغییرات  $u_z$  و  $\sigma_{zz}$  را بر حسب عمق در نقاط زیر بار متمرکز در دو محیط Isotrop و Beryl Rock برای سرعتهای مختلف نمایش می دهند. دیده می شود که با افزایش سرعت مقادیر تغییر مکان و تنش افزایش می یابند.



نمودار ۵: تغییرات  $U_z$  بر حسب  $z$  در سرعتهای مختلف برای Isotrop در  $y=0$  mm.



نمودار ۶: تغییرات  $\sigma_{zz}$  بر حسب  $z$  در سرعتهای مختلف برای Beryl Rock در  $y = 0$  mm.

نمودارهای (۷) و (۸) تغییرات  $u_z$  و  $\sigma_{zz}$  محیطهای مختلف تحت اثر بار متمرکز استاتیکی در عمق ثابت پنج میلیمتر و در عرضهای متفاوت را نمایش می دهند. به علت تفاوت نسبی ضرایب ارتجاعی G-Composite نسبت

تنش بخش موهومی ایجاد می شود که به معنای تأخیر فاز است و در نمودارهای قبلی مقدار آن برابر صفر بوده است.

تأخیر فاز به معنای اختلاف فاز زمانی بین اعمال نیرو و رسیدن موج ناشی از نیرو به نقطه خاصی در داخل محیط است. اگر نیروی وارده به صورت  $P_0 \delta(y) e^{\frac{i n \pi}{L}(x-Ct)}$  باشد و مقدار تغییر مکان ناشی از این نیرو هم به صورت رابطه زیر باشد:

$$u = (u_a + i u_b) e^{\frac{i n \pi}{L}(x-Ct)} \quad (51)$$

این تغییر مکان را می توان به صورت زیر نوشت:

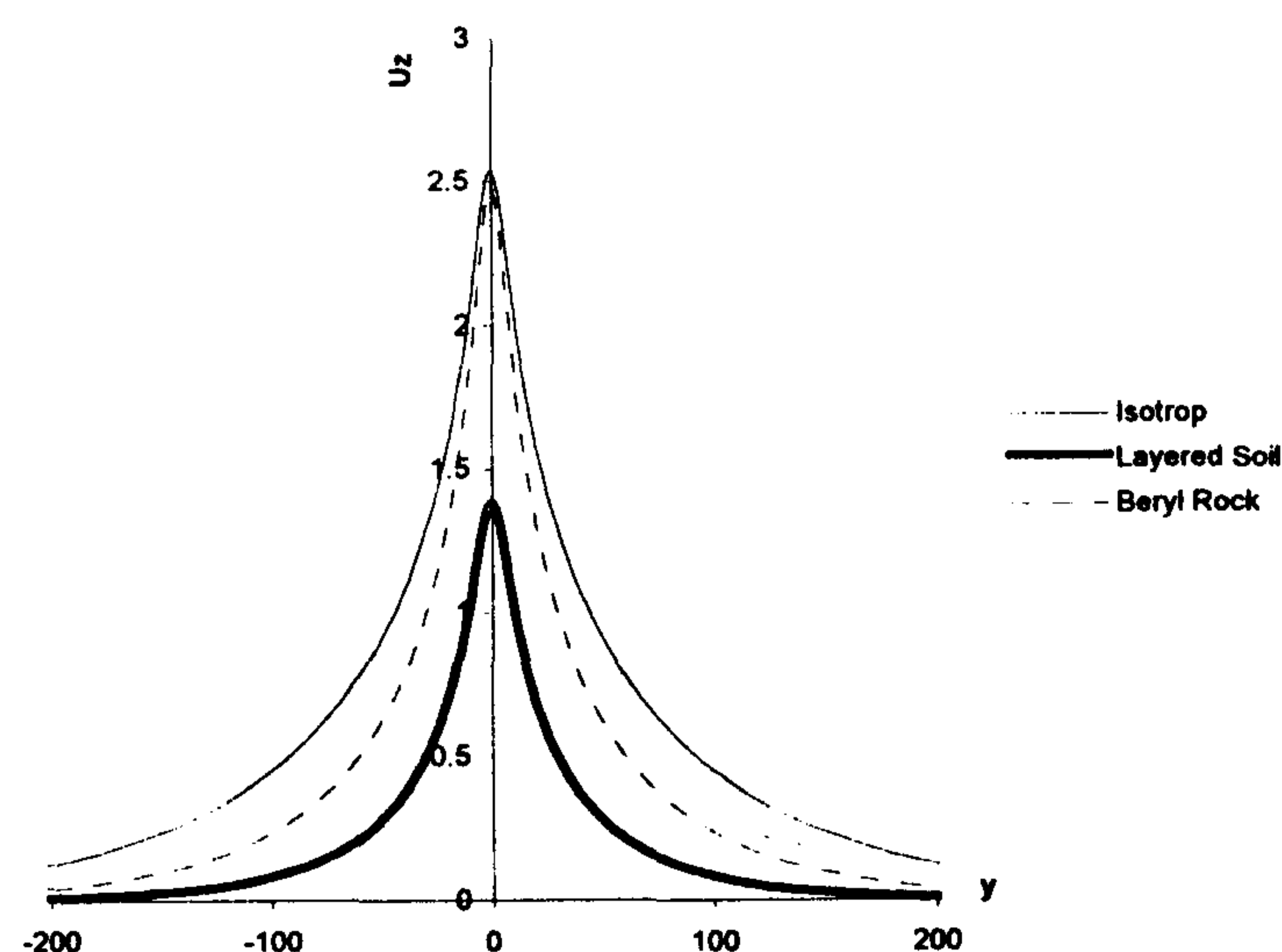
$$u = u_r e^{i \phi} e^{\frac{i n \pi}{L}(x-Ct)} \quad (52)$$

در این رابطه:

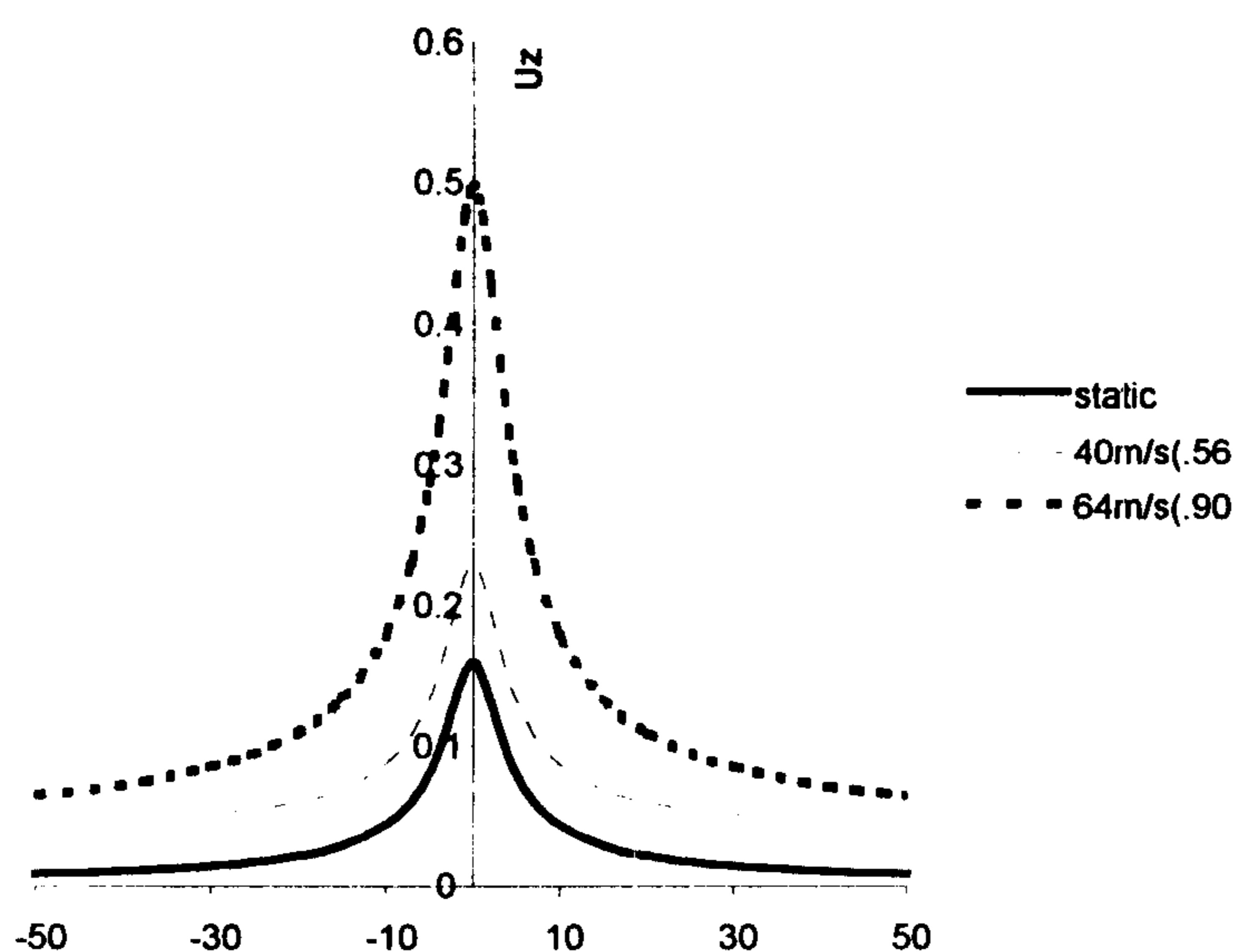
$$u_r = \sqrt{u_a^2 + u_b^2} \quad (53)$$

$$\phi = \text{Arctg} \left( \frac{u_b}{u_a} \right) \quad (54)$$

در رابطه بالا  $\phi$  زاویه تأخیر فاز تغییر مکان نسبت به نیرو است.



نمودار ۷- تغییرات  $U_z$  بر حسب  $y$  برای مواد مختلف در سرعت ۶۰ متر بر ثانیه (سرعت بی بعد ۰/۸۴۹) در  $z = 10$  mm.



نمودار ۹: تغییرات  $U_z$  برحسب  $y$  در سرعت‌های مختلف برای Beryl Rock در  $z = 5 \text{ mm}$ .

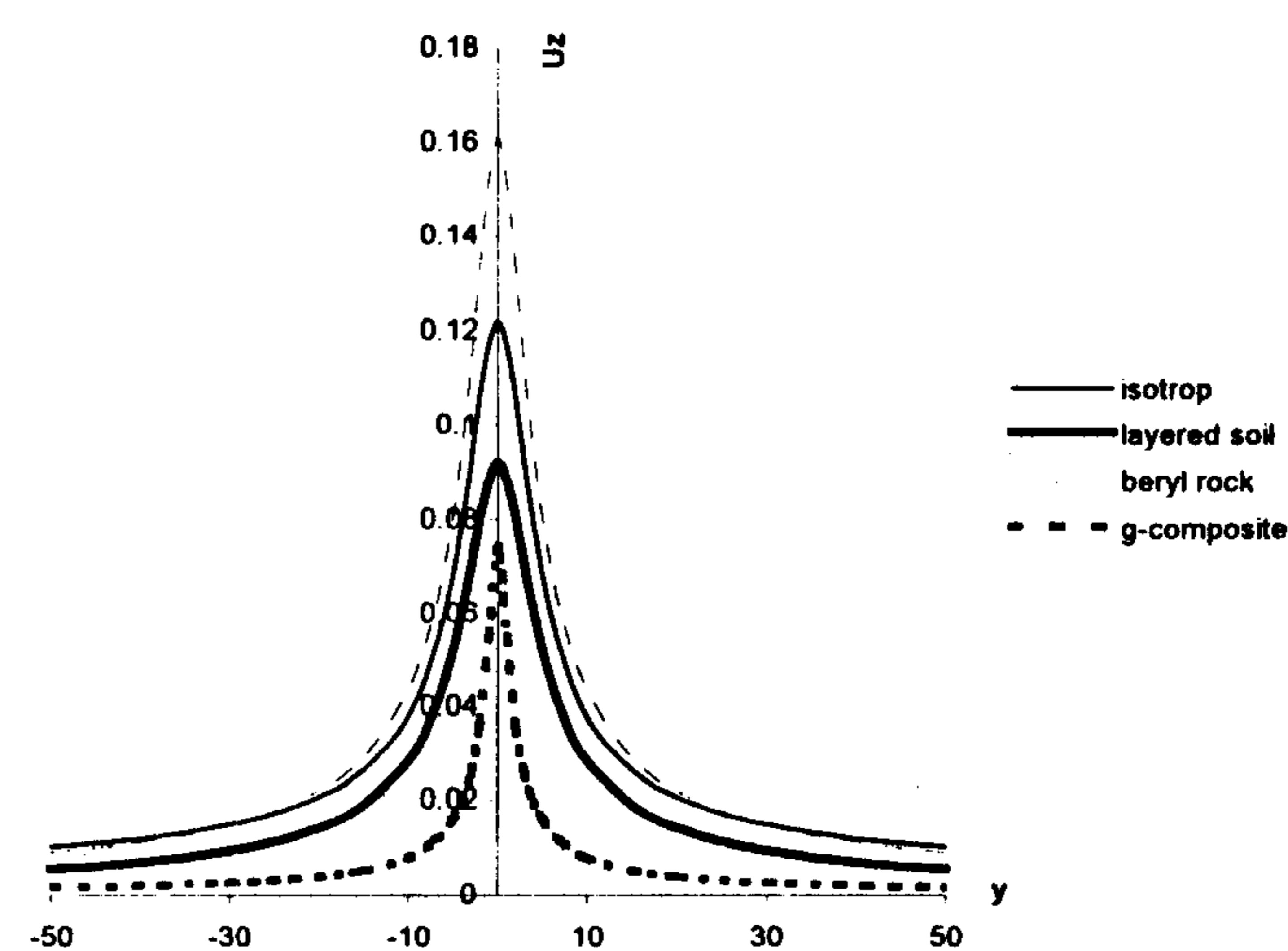
### نتیجه گیری

در این مقاله، محیط نیمه بی‌نهایت ایزوتروپ جانبی تحت اثر بار متحرک هارمونیک تحلیل شده است. به همین ترتیب هر نیروی مرزی دیگری را نیز می‌توان به سطح محیط نیمه بی‌نهایت وارد نموده و پس از ارضاء شرایط مرزی و ادامه حل از روش موجود در این مقاله، نتایج تنش و تغییرمکان ناشی از نیروی مذکور را در داخل محیط نیمه بی‌نهایت ایزوتروپ جانبی به دست آورد.

همچنین به کمک سری فوریه و استفاده از نتایج نیروی متحرک هارمونیک همین مقاله، می‌توان تغییرمکانها و تنشهای محیط تحت هر شکل دلخواه بارگذاری قائم را که با سرعت ثابت روی سطح محیط حرکت می‌کند را به دست آورد.

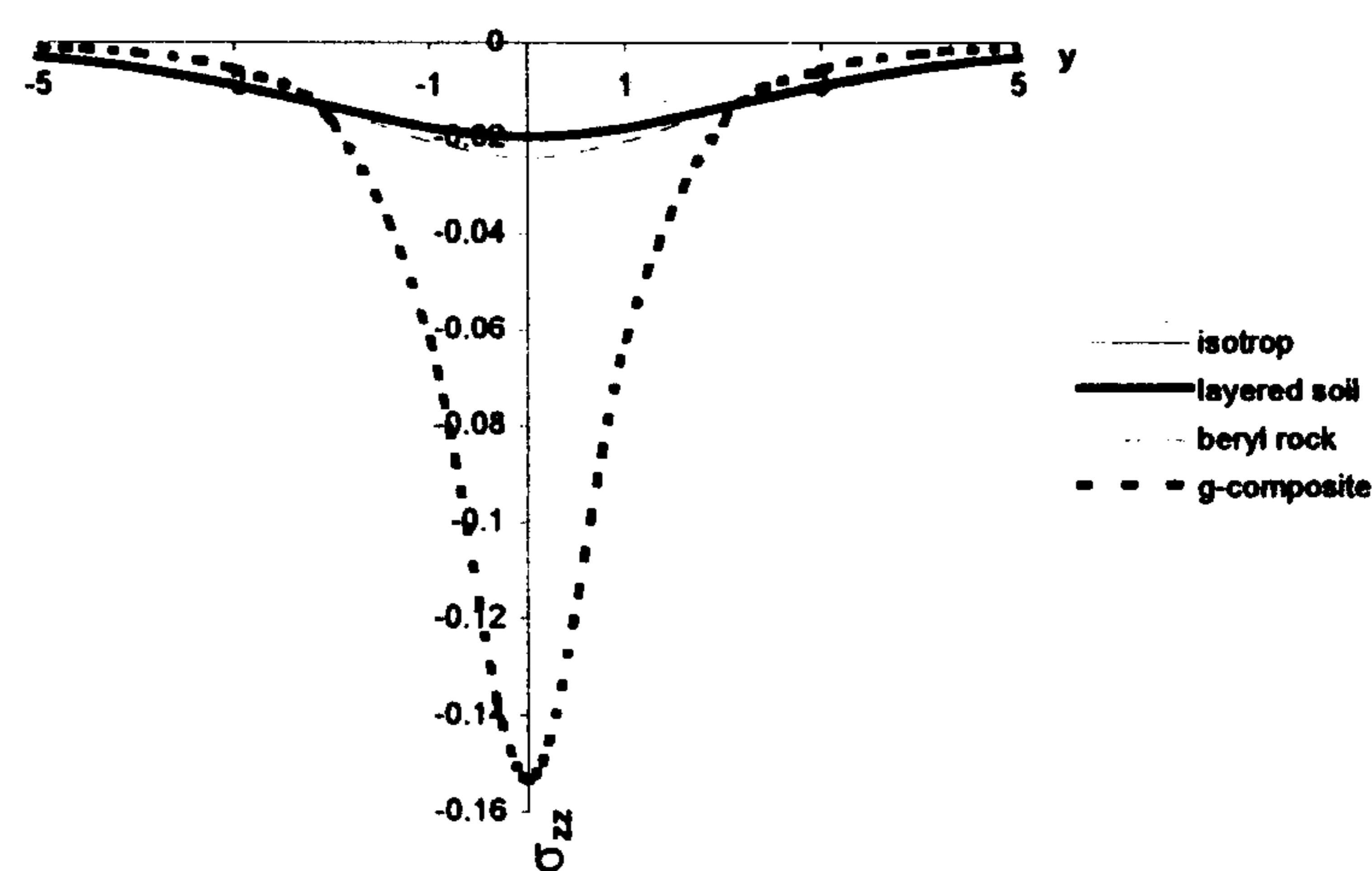
از بررسی نتایج عددی می‌توان دید که در حالاتی که سرعت حرکت بار از صفر تا حدود سرعت حرکت موج برشی باشد، شکل کلی تغییرات به صورت حالت استاتیکی خواهد بود. ولی شدت آن با افزایش سرعت افزایش می‌یابد (نمودارهای ۲ و ۴). با افزایش سرعت حرکت بار از حدود سرعت حرکت موج برشی، شکل تغییرات مقادیر تغییر مکان نسبت به تغییرات عمق حالت هارمونیک به خود می‌گیرد و نیز با افزایش سرعت، طول موجها کوتاهتر می‌شوند.

به سایر مواد، مقادیر تنشهای به وجود آمده در محیط G-Composite هم با تنشهای ایجاد شده در سایر مواد نسبتاً تفاوت دارد. در نمودار (۸) منحنیهای مربوط به محیطهای Isotrop و Layered Soil تقریباً بر هم منطبق شده‌اند.



نمودار ۷: تغییرات  $U_z$  برحسب  $y$  در حالت استاتیکی برای محیطهای مختلف در  $z = 5 \text{ mm}$ .

در نمودار (۹) تغییرات  $u_z$  در عمق ثابت، در عرضهای مختلف و برای سرعتهای مختلف در محیط Beryl Rock ارائه شده است. در این نمودارها هم دیده می‌شود که با افزایش سرعت مقادیر تغییرمکان و تنش افزایش می‌یابد.



نمودار ۸: تغییرات  $\sigma_{zz}$  برحسب  $y$  در حالت استاتیکی برای محیطهای مختلف در  $z = 5 \text{ mm}$ .

وجود ندارد (نمودارهای ۱، ۲، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹). به عبارت دیگر نمی‌توان از نتایج ساده تر استاتیکی یا ایزوتروپ به ترتیب به جای نتایج پیچیده تر دینامیکی یا ایزوتروپ جانبی استفاده نمود.

به طور کلی مقایسه محیط‌های مختلف با یکدیگر و یا مقایسه سرعت‌های مختلف با یکدیگر نشان می‌دهد که هیچ همانندی خاصی بین نتایج حالات استاتیکی با دینامیکی و نیز بین محیط‌های ایزوتروپ با ایزوتروپ جانبی

## مراجع

- ۱ - بهار، ح. "تحلیل محیط نیمه-بی‌نهایت ایزوتروپ جانبی تحت اثر نیروی متحرک کسینوسی." پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی سازه، گروه عمران دانشکده فنی دانشگاه تهران، (۱۳۷۸).
- 2 - Pan, Y. C. and Chou, T. W. (1979). "Green's function solutions for semi-infinite transversely isotropic materials." *Int. J. of Eng. Sci.* , Vol. 17, pp. 545-551.
- 3-Lekhnitskii, S. G. (1981). *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Mir, Moscow.
- 4 - Wang, M. Z. and Wang, W. (1995). "Completeness and nonuniqueness of general solutions of transversely isotropic elasticity." *Int. J. of Solid Structures*, Vol. 32, No. 374 , pp. 501-513 .
- 5 - Gakenheimer, D. C. and Miklowitz, J. (1969). "Transient excitation of an elastic half space by a point load traveling on surface." *J. of Applied Mechanics*, Vol. 36, No. 3, pp. 505-515.
- ۶ - اسکندری قادی، م. "توابع گرین مسائل الاستودینامیک در محیط‌های ایزوتروپی صفحه‌ای (عبوری) و کاربرد آن در روش المانهای مرزی." متن پیش دفاع پایان نامه دکتری گروه عمران دانشکده فنی دانشگاه تهران، (۱۳۷۵).
- 7 -Boresi, A. P. and Chong, K. P. (1987). *Elasticity in engineering mechanics*. Elsevier science publishing co. inc
- ۸ - بهنیا، ک. و طباطبایی، ا. م. "مکانیک خاک." انتشارات دانشگاه تهران، (۱۳۷۳).

## واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 - Transversely Isotropic Half Space
- 2 - Transversely Isotropic
- 3 - Uncoupled
- 4 - Improper