

تحلیل قابها با اعضای خمیده و مقطع متغیر

رضا عطارنژاد

استادیار گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

حمید رضا ولیپور

دانشجوی دکتری سازه - دانشکده عمران - دانشگاه صنعتی امیر کبیر

(تاریخ دریافت ۷۹/۴/۸، تاریخ تصویب ۸۰/۳/۵)

چکیده

در مقاله حاضر با استفاده از اصل کار مجازی و با توجه به تئوری اویلر-برنولی^۱ در تیرها، یک فرمول بندی کلی برای تعیین ماتریس سختی و بردار نیروهای گیرداری المانهای خمیده با مقطع متغیر ارائه می شود. با توجه به اینکه برای استخراج ماتریس سختی و بردار نیروهای گیرداری از مبنای فرمول بندی نرمی^۲ استفاده می شود، روابط تعادل، نیرو-تغییر مکان و تغییر مکان- کرنش در کل المان به طور دقیق ارضاء می شوند. از آنجا که بر خلاف سایر روشهای مبتنی بر سختی مستقیم، از هیچ فرض اضافه ای برای درونیابی میدان تغییر مکان در طول المانهای خمیده استفاده نمی شود، جوابهای حاصل از فرمول بندی مزبور دقیق می باشند. در نهایت برای توسعه کاربرد فرمول بندی مزبور، از نگاشت قطعه ای استفاده شده و فرمول بندی با تقریب عالی هندسه^۳ برای یک المان تیر خمیده در حالت کلی استخراج می شود. مقایسه نتایج به دست آمده از فرمول بندی های پایه و با تقریب عالی هندسه ارائه شده در این مقاله با نتایج حاصل از روشهای متعارف و فرمول بندی های موجود دیگر، دقت و کارایی روش تشریح شده را به اثبات می رساند.

واژه های کلیدی: قابهای مسطحه، اعضای خمیده، مقطع متغیر، فرمول بندی نرمی

مقدمه

شده و اینکه بخش عمده ای از فرمول بندی ها و روابط دقیق ارائه شده برای تحلیل تیرهای با مقطع متغیر در حالت های خاص دوبعدی استخراج شده اند [۱۰-۶]، ارائه یک روش عمومی ماتریسی برای محاسبه ماتریس سختی و بردار نیروهای گیرداری دقیق المانهای خمیده و با مقطع متغیر مفید به نظر می رسد.

فرمول سازی های مبتنی بر نرمی، ابزاری توانمند برای استخراج ماتریس سختی، جرم و بردار نیروهای گیرداری می باشد. در گذشته کاربرد گسترده این نوع فرمول بندی به دلیل حجم بالای عملیات محاسباتی، بسیار محدود بوده است. امروزه به واسطه رشد و بهبود فن آوری سخت افزارها این محدودیت برداشته شده و دقت بالای روش نرمی توجه محققین زیادی را به خود جلب کرده است [۱۴-۱۱]. از جمله کارهای اخیر در زمینه تحلیل تیرهای

در بیشتر روشهای متعارف موجود برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی تیرهای خمیده با مقطع متغیر از فرمول بندی ماتریسی تغییر مکانها^۴ (فرمول بندی سختی مستقیم) مبتنی بر یک میدان پیش فرض تغییر مکان استفاده می شود [۴-۱]. روشهای مزبور عموماً دارای تقریب ذاتی می باشند، زیرا معادلات تعادل در طول المان به طور دقیق ارضاء نمی شوند. بنابراین برای دستیابی به جوابهای مناسب و نسبتاً دقیق با استفاده از فرمول بندی سختی مستقیم، ناگزیر باید تعداد المانهای زیادی بکار گرفته شوند که این امر نیز به نوبه خود زمان مدل کردن و تحلیل سازه را افزایش می دهد. علاوه بر روشهای مبتنی بر سختی مستقیم گروهی از محققین نیز با بهره گیری از فرمول بندی های نامتجانس^۵ سعی در افزایش دقت و بهبود نتایج داشته اند [۵]. با توجه به کاستی های بیان

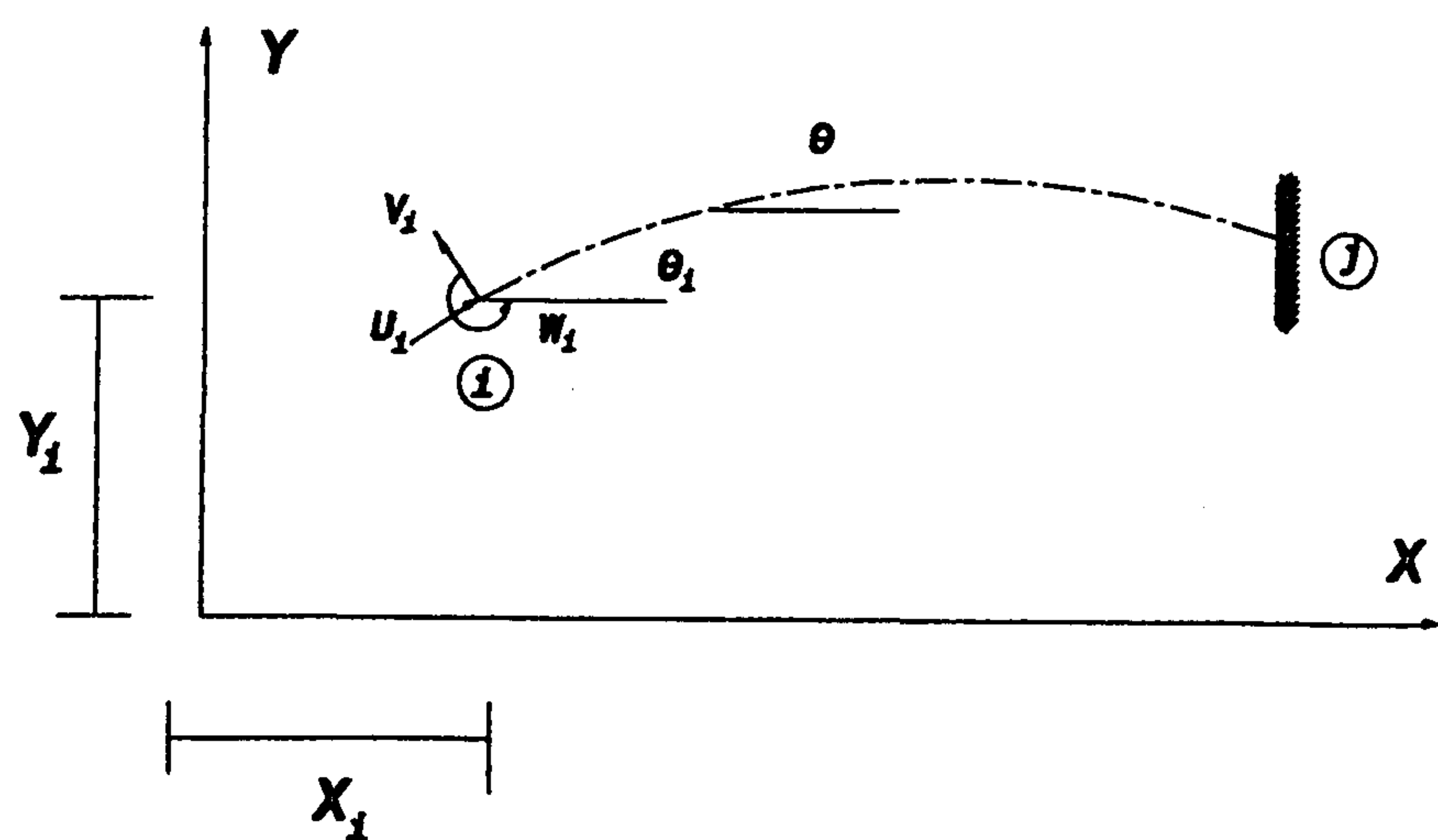
در اینجا از پیکره طره پایه نشان داده شده در شکل (۲) استفاده کرده، زیرماتریس نرمی انتهای i المان، یعنی F_{ii} به دست آورده می شود. با توجه به شکل (۲)، بر مبنای اصل کار مجازی، تغییر مکانهای u_i و v_i و دوران ω_i در انتهای i عضو، از روابط زیر قابل محاسبه اند:

$$u_i = \int_i^j \frac{[(x-x_i)\sin\theta_i - (y-y_i)\cos\theta_i] M ds}{EI} - \int_i^j \frac{\cos(\theta-\theta_i)}{EA} N ds + \alpha \int_i^j \frac{\sin(\theta-\theta_i)}{GA} T ds \quad (1)$$

$$v_i = \int_i^j \frac{[(x-x_i)\cos\theta_i + (y-y_i)\sin\theta_i] M ds}{EI} - \int_i^j \frac{\sin(\theta-\theta_i)}{EA} N ds - \alpha \int_i^j \frac{\cos(\theta-\theta_i)}{GA} T ds \quad (2)$$

$$\omega_i = - \int_i^j \frac{M}{EI} ds \quad (3)$$

که در روابط فوق M ، N و T به ترتیب معرف لنگر خمشی، نیروی محوری (مماسی) و نیروی برشی (شعاعی) در هر نقطه دلخواه می باشند. θ زاویه بین مماس بر منحنی عضو در هر نقطه با محور x بوده، (x_i, y_i) مختصات گره i است و x و y نیز مختصه های هر نقطه دلخواه در طول منحنی عضوند.



شکل ۲: تعریف پارامترها و درجات آزادی انتهای i عضو.

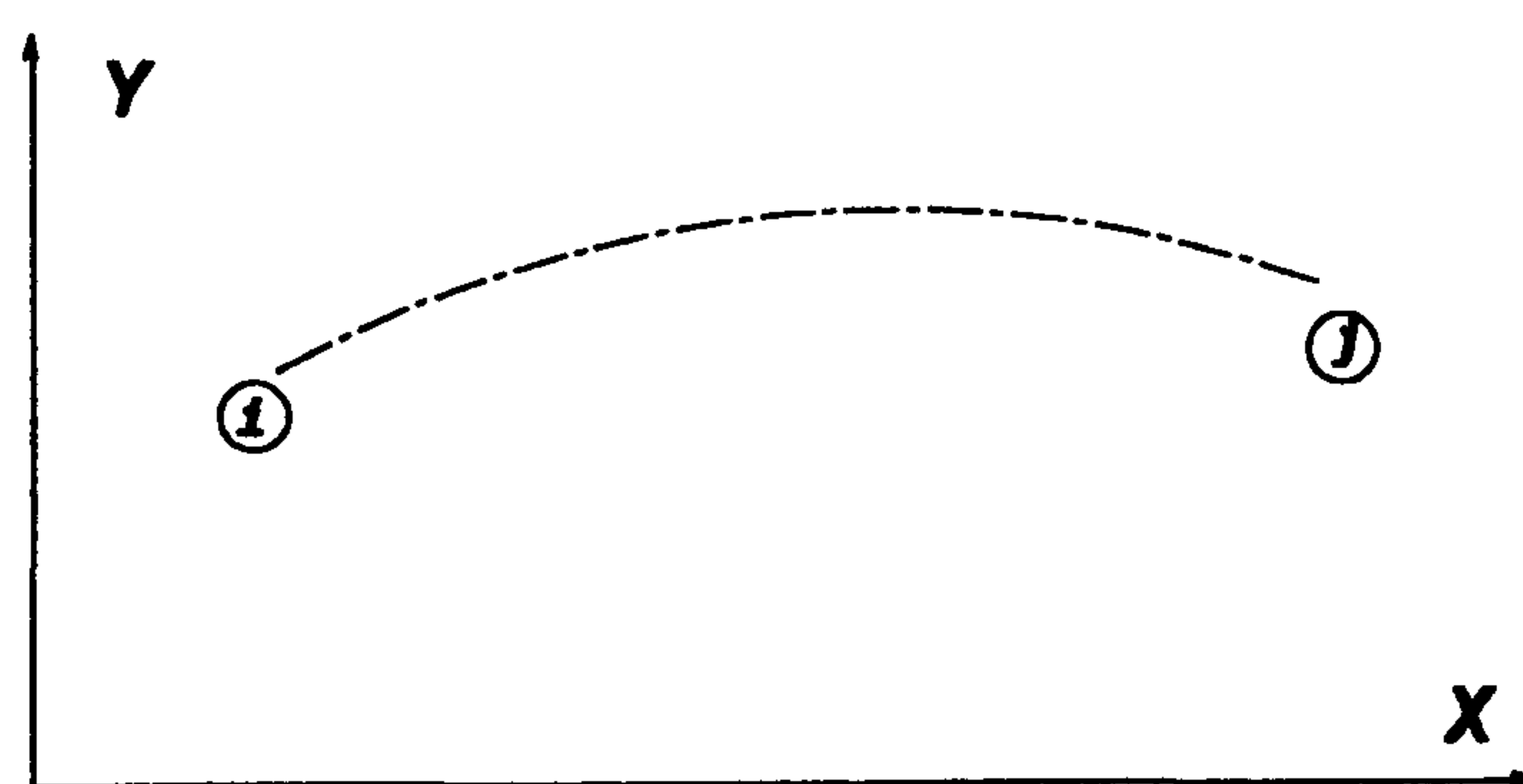
I و A به ترتیب نشان دهنده ممان اینرسی و مساحت مقطع عضو در هر نقطه از طول آن بوده E و G مدولهای الاستیسیته و برشی مصالح می باشند و α نیز معرف

خمیده می توان به مرجع [۱۱] اشاره کرد که در آن از فرمول بندی نرمی به همراه مفهوم ماتریس سختی مقطع^۶ برای استخراج ماتریس سختی دقیق المانهای مورد بحث استفاده شده است. اگر چه دقت فرمول بندی ارائه شده در مرجع مزبور بالاست، ولی به لحاظ دارا بودن مراحل متعدد انتگرال گیری روی مقاطع و در طول المان، زمانبر به نظر رسیده و کاربرد آن نیز در برنامه های تحلیل ماتریسی به سادگی میسر نمی باشد.

در مقاله حاضر با استفاده از اصل کار مجازی و ارضاء دقیق معادلات تعادل، سازگاری و ساختاری در هر نقطه از طول المان، ماتریس نرمی و به تبع آن ماتریس سختی دقیق و بردار نیروهای گیرداری المان تیر اویلر-برنولی خمیده در فضا محاسبه می شوند. در ادامه به کمک ویژگی انتگرالگیری از توابع قطعه ای پیوسته و کاربرد نگاشت مورد استفاده در روشهای اجزاء محدود، یک المان توانمند به شکل عمومی معرفی می گردد که برای تمامی اعضای خمیده و با مقطع متغیر قابهای مسطحه قابل استفاده است. برای تسهیل در تخمین انتگرالها، نگاشت قطعه ای هر المان نیز با استفاده از توابع لاگرانژ مرتبه دوم صورت می گیرد.

زیرماتریس نرمی^۷

برای محاسبه ماتریس سختی، ابتدا باید زیرماتریس نرمی مربوط به یکی از دو انتهای المان نشان داده شده در شکل (۱) را به دست آورد.



شکل ۱: معادله محور عضو در مختصات کلی.

$$\mathbf{F}_{ii} = \int_i^j \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_i ds$$

(۶)

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{B}'_i \mathbf{T}_i$$

(الف-۷)

$$\mathbf{B}'_i = \begin{bmatrix} \frac{(y-y_i)}{\sqrt{1+y'^2}} & \frac{-(x-x_i)}{\sqrt{1+y'^2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} & \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} & 0 \\ -\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} & 0 \end{bmatrix}$$

(ب-۷)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EA} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{GA} \end{bmatrix}$$

(۸)

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} -\cos\theta_i & \sin\theta_i & 0 \\ -\sin\theta_i & -\cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(۹)

با جایگذاری روابط (۷) تا (۹) در رابطه (۶)، نتیجه می شود:

$$\mathbf{F}_{ii} = \mathbf{T}_i^T \mathbf{F}'_{ii} \mathbf{T}_i$$

(الف-۱۰)

$$\mathbf{F}'_{ii} = \int_i^j \mathbf{B}'_i{}^T \mathbf{D} \mathbf{B}'_i ds$$

(ب-۱۰)

همانگونه که مشاهده می شود، در روابط اخیر \mathbf{F}'_{ii} نشان دهنده زیرماتریس نرمی مربوط به انتهای i عضو در مختصات کلی می باشد.

برای اینکه بتوان از روشهای عددی انتگرالگیری نظیر سیمپسون یا گوس استفاده نمود، با استفاده از تساوی $ds = \sqrt{1+y'^2} dx$ رابطه (ب-۱۰) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\mathbf{F}'_{ii} = \int_i^j \mathbf{B}'_i{}^T \mathbf{D}' \mathbf{B}'_i dx$$

(الف-۱۱)

ضریب شکل مقطع برای برش است.

بسط ماتریس نرمی \mathbf{F}'_{ii} به صورت زیر قابل ارائه است:

$$\mathbf{F}'_{ii} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ & f_{22} & f_{23} \\ \text{Sym.} & & f_{33} \end{bmatrix}$$

(۴)

f_{ij} : تغییر مکان ایجاد شده در درجه آزادی i ام تحت اثر بار واحد در درجه آزادی j ام می باشد.

با توجه به تعریف فوق از f_{ij} و روابط (۱) تا (۳) می توان نتیجه گرفت:

$$f_{11} = \int_i^j \frac{[(x-x_i)\sin\theta_i - (y-y_i)\cos\theta_i]^2}{EI} ds + \int_i^j \frac{\cos^2(\theta - \theta_i)}{EA} ds + \alpha \int_i^j \frac{\sin^2(\theta - \theta_i)}{GA} ds$$

(الف-۵)

$$f_{22} = \int_i^j \frac{[(x-x_i)\cos\theta_i + (y-y_i)\sin\theta_i]^2}{EI} ds + \int_i^j \frac{\sin^2(\theta - \theta_i)}{EA} ds + \alpha \int_i^j \frac{\cos^2(\theta - \theta_i)}{GA} ds$$

(ب-۵)

$$f_{33} = \int_i^j \frac{1}{EI} ds$$

(ج-۵)

$$f_{12} = \int_i^j \frac{[(x-x_i)\cos\theta_i + (y-y_i)\sin\theta_i]_x [(x-x_i)\sin\theta_i - (y-y_i)\cos\theta_i]_x}{EI} ds + \int_i^j \frac{\sin(\theta - \theta_i)\cos(\theta - \theta_i)}{EA} ds - \alpha \int_i^j \frac{\cos(\theta - \theta_i)\sin(\theta - \theta_i)}{GA} ds$$

(د-۵)

$$f_{13} = -\int_i^j \frac{[(x-x_i)\sin\theta_i - (y-y_i)\cos\theta_i]}{EI} ds$$

(ه-۵)

$$f_{23} = -\int_i^j \frac{[(x-x_i)\cos\theta_i + (y-y_i)\sin\theta_i]}{EI} ds$$

(و-۵)

مجموعه روابط (۵) را می توان به صورت ماتریسی زیر خلاصه نمود:

نیروهای خارجی وارد بر گره i بوده و u_i نیز بردار جابجایی گره i در مختصات کلی است. با ارضاء روابط تعادل برای پیکره طره مورد بحث می توان نتیجه گرفت:

$$r_{fj} = \Gamma_{ij} r_i \quad (\text{الف-۱۶})$$

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -(y_i - y_j) & (x_i - x_j) & 1 \end{bmatrix}$$

(ب-۱۶)

در صورتی که رابطه (الف-۱۶) در معادله (ب-۱۵) جایگزین شده و سپس بجای r_i رابطه (الف-۱۵) بکار برده شود:

$$k_{ij}^T = -\Gamma_{ij} k_{ij} \quad (\text{۱۷})$$

به همین ترتیب برای پیکره طره گیردار در انتهای i ، با برقراری بسط رابطه نیرو-تغییر مکان خواهیم داشت:

$$k_{ij} u_j = -r_{fi} \quad (\text{الف-۱۸})$$

$$k_{jj} u_j = r_j \quad (\text{ب-۱۸})$$

با استفاده از تبدیلی مشابه آنچه که در (الف-۱۶) ارائه شده است، از روابط (الف-۱۸) و (ب-۱۸) نتیجه خواهد شد:

$$k_{jj} = \Gamma_{ij} k_{ij} \Gamma_{ij}^T \quad (\text{۱۹})$$

همانگونه که مشاهده می شود، پس از محاسبه زیرماتریس سختی k_{jj} از رابطه (۱۳)، زیرماتریسهای k_{ij} و k_{ji} با استفاده از تبدیلهای (۱۷) و (۱۹) قابل محاسبه خواهند بود [۱۵].

تعیین بردار بارهای معادل گرهی

بارهای وارد بر یک قاب به دو دسته (الف) بارهای وارد بر گره ها و (ب) بارهای اعمال شده در طول اعضاء دسته بندی می شوند. بارهای موثر در گره ها f_{ii} مستقیماً

$$D' = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{1+y'^2}}{EA} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \frac{\sqrt{1+y'^2}}{GA} \end{bmatrix} \quad (\text{ب-۱۱})$$

ماتریس سختی المان

با این فرض که ماتریس سختی K^e عضو در دستگاه مختصات کلی به صورت زیر باشد:

$$K^e = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ij}^T & k_{jj} \end{bmatrix} \quad (\text{۱۲})$$

با وارون کردن F'_{ii} ، زیرماتریس سختی k_{ii} را می توان مستقیماً به دست آورد:

$$k_{ii} = F'_{ii}{}^{-1} \quad (\text{۱۳})$$

برای محاسبه زیرماتریسهای k_{ij} و k_{ji} از روابط نیرو-تغییر مکان پیکره های طره پایه می توان بهره جست. به این منظور اگر رابطه نیرو-تغییر مکان پیکره طره نشان داده شده در شکل (۲) در دستگاه مختصات کلی نوشته شود، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ij}^T & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i \\ -r_{fj} \end{bmatrix} \quad (\text{۱۴})$$

با توجه به اینکه در پیکره طره مزبور $u_j = 0$ ، بسط رابطه (۱۴) به صورت زیر ساده می شود:

$$k_{ii} u_i = r_i \quad (\text{الف-۱۵})$$

$$k_{ij}^T u_i = -r_{fj} \quad (\text{ب-۱۵})$$

ناگفته پیداست که در روابط (۱۴) و (۱۵)، r_i و r_{fj} به ترتیب نشان دهنده بردار نیروهای تکیه گاهی j و

$$f_{2o} = \int_j^i \frac{[(x-x_i)\cos\theta_i + (y-y_i)\sin\theta_i]}{EI} M ds - \int_j^i \frac{\sin(\theta-\theta_i)}{EA} N ds - \alpha \int_j^i \frac{\cos(\theta-\theta_i)}{GA} T ds \quad (23)$$

$$f_{3o} = - \int_j^i \frac{M}{EI} ds \quad (24)$$

در روابط فوق M ، N و T به ترتیب معرف توابع لنگر خمشی، نیروی محوری (مماسی) و نیروی برشی (شعاعی) در طول پیکره طره، تحت اثر بار گسترده دلخواه q وارد بر طول عضو می باشند.

مجموعه معادلات (۲۲) تا (۲۴) را می توان به شکل ماتریسی زیر فشرده نمود:

$$F_{io} = \int_j^i B_i^T D \begin{bmatrix} M \\ N \\ T \end{bmatrix} ds \quad (25)$$

اگر در رابطه (۲۵) بجای B_i^T از تبدیل (الف-۷) و در رابطه (۲۱) بجای ماتریس F_{ii} از تبدیل (الف-۱۰) استفاده شود، با توجه به اینکه $T_i \neq 0$ ، نتیجه خواهد شد:

$$\{F'_{ii} T_i\} f_i^* + F'_{io} = 0 \quad (26)$$

$$F'_{io} = \int_j^i B_i'^T D' \begin{bmatrix} M \\ N \\ T \end{bmatrix} dx \quad (27)$$

که ماتریسهای F'_{ii} ، T_i ، B_i' و D' به ترتیب در معادلات (الف-۱۱)، (۹)، (ب-۷) و (ب-۱۱) تعریف شده اند. با حل دستگاه معادلات (۲۶)، بردار بارهای معادل گرهی f_i^* به دست می آید. برای محاسبه بردار بارهای معادل گرهی f_j^* با بکارگیری روشی مشابه برای پیکره طره گیردار در انتهای i ، به نتایج زیر می رسیم:

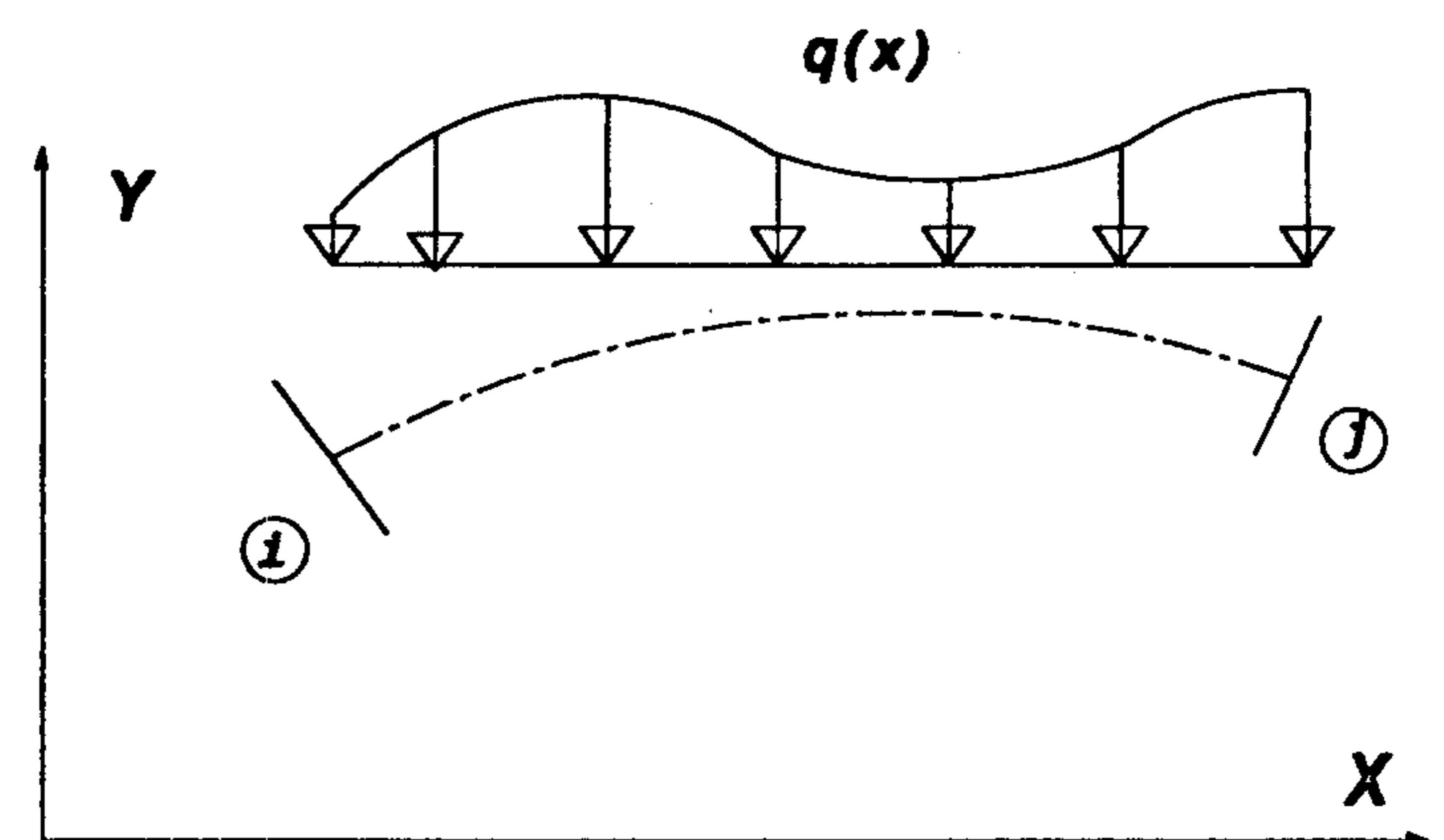
$$\{F'_{jj} T_j\} f_j^* + F'_{jo} = 0 \quad (28)$$

$$F'_{jo} = \int_j^i B_j'^T D' \begin{bmatrix} M \\ N \\ T \end{bmatrix} dx \quad (الف-۲۹)$$

در بردار بارهای گرهی جایگذاری می شوند، اما بارهای اعمالی در طول عضو را ابتدا باید به بردار بارهای معادل گرهی f^* تبدیل نمود. بنابراین بردار بار f به صورت زیر خواهد بود:

$$f = f^* + f_{ii} \quad (20)$$

برای تعیین f^* ، از روش کار مجازی نیروهای تکیه گاهی پیکره دوسر گیردار نشان داده شده در شکل (۳) باید به دست آورده شوند.



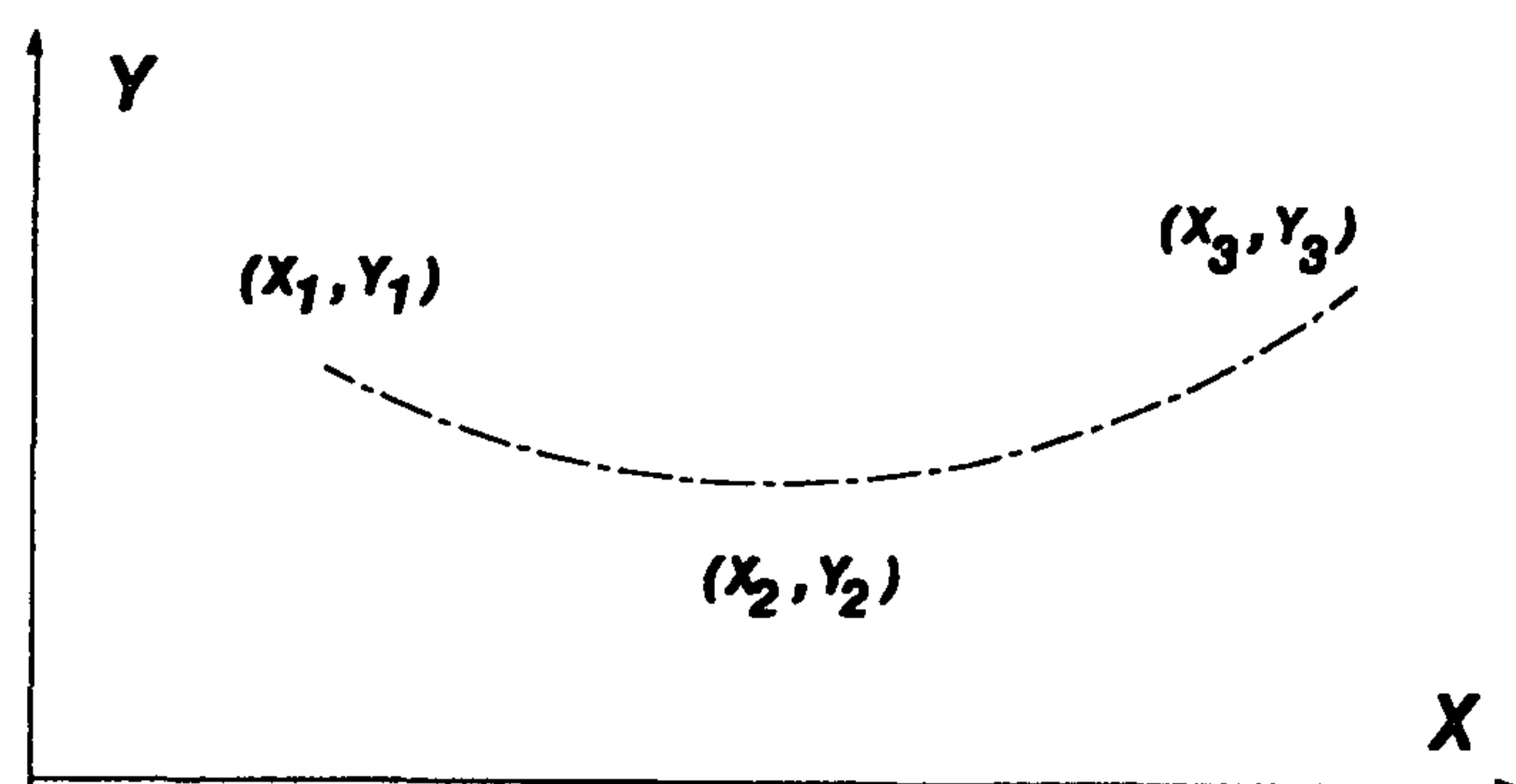
شکل ۳: پیکره دوسر گیردار تحت اثر بار گسترده دلخواه.

ابتدا تکیه گاه موجود در گره i را حذف کرد، و معادله سازگاری تغییر شکلها را در انتهای مزبور می نویسیم:

$$F_{ii} f_i^* + F_{io} = 0 \quad (21)$$

در رابطه فوق، F_{ii} زیرماتریس نرمی، f_i^* بردار بارهای معادل گرهی انتهای i المان بوده و بردار $F_{io} = [f_{1o} \ f_{2o} \ f_{3o}]^T$ معرف تغییرمکانهای ایجاد شده در انتهای i پیکره طره، تحت اثر بار گسترده q وارد بر طول عضو می باشد. از روش کار مجازی داریم:

$$f_{1o} = \int_j^i \frac{[(x-x_i)\sin\theta_i - (y-y_i)\cos\theta_i]}{EI} M ds - \int_j^i \frac{\cos(\theta-\theta_i)}{EA} N ds + \alpha \int_j^i \frac{\sin(\theta-\theta_i)}{GA} T ds \quad (22)$$



شکل ۴: جزء المان مورد استفاده برای نگاشت قطعه ای.

برای اینکه معادله درجه دوم منحنی به صورت یکتا تعیین شود، معلوم بودن سه نقطه روی آن ضرورت دارد. در این صورت می توان منحنی مزبور را با استفاده از روابط زیر روی $\zeta \in [-1, +1]$ نگاشت داد.

$$x = \sum_{i=1}^3 x'_i N_i \quad (\text{الف-۳۰})$$

$$y = \sum_{i=1}^3 y'_i N_i \quad (\text{ب-۳۰})$$

در روابط فوق N_i معرف توابع لاگرانژ مرتبه دوم است. استفاده از یک سهمی برای تخمین هندسه عضو خمیده، چندان جوابهای حاصل و کارآیی روش را بهبود نمی دهد. لذا در حد فاصل دو گره ابتدا و انتهای عضو مورد بحث که در شکل (۵) نشان داده شده به تعداد $(2n-1)$ نقطه واسطه انتخاب می کنیم، (n عددی طبیعی است.) با این شیوه هندسه عضو مورد نظر به کمک n سهمی تقریب زده می شود.

بنابراین المانی با شش درجه آزادی به دست می آید که فقط دو نقطه ابتدایی و انتهایی آن دارای درجه آزادی اند و نقاط واسطه میانی تنها برای اعمال دقیق تر هندسه عضو خمیده در فرمول بندی به کار رفته اند. به این ترتیب با توجه به پیچیدگی هندسه المان می توان تعداد و موقعیت نقاط واسطه را افزایش داد، بدون آنکه ابعاد ماتریس نرمی (سختی) آن تغییر کند.

$$B'_j = \begin{bmatrix} \frac{(y-y_j)}{\sqrt{1+y'^2}} & \frac{-(x-x_j)}{\sqrt{1+y'^2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} & \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} & 0 \\ -\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} & 0 \end{bmatrix}$$

(ب-۲۹)

برای محاسبه بردار f_j^* بجای رابطه (۲۸) می توان از معادلات تعادل عضو دوسر گیردار شکل (۳) استفاده کرد.

پس از محاسبه بردار بارهای معادل گرهی f_j^* و

ماتریس سختی K^e عضو بقیه رویه محاسبات که شامل سرهم بندی ماتریس سختی و بردار نیروهای گرهی اعضا است، همانند روشهای مبتنی بر سختی مستقیم خواهد بود.

در فرمول بندی تشریح شده، همواره ناگزیر باید معادله منحنی عضو را به عنوان ورودی به برنامه معرفی نمود که این نقیصه کاربرد عام المانهای حاصل را مخدوش می نماید. از سوی دیگر در پاره ای موارد نیز کاربرد مستقیم روشهای عددی انتگرالگیری (به دلیل شکل خاص منحنی عضو و وجود نقاط تکین در انتگران) می تواند منجر به خطاهای عددی بزرگی شود و جهت احتراز از این مشکل باید دستورهای شرطی زیادی در الگوریتم محاسباتی گنجانیده شود که اجرای آنها سبب کاهش کارآیی فرمول بندی می گردد.

برای رفع نقایص فوق، در ادامه به کمک ویژگی انتگرالگیری از توابع قطعه ای پیوسته و کاربرد نگاشت مورد استفاده در روشهای اجزاء محدود، یک المان توانمند به شکل عمومی معرفی می گردد که برای تمامی اعضای خمیده و با مقطع متغیر قابهای مسطحه قابل استفاده است.

نگاشت قطعه ای محور المان

برای به دست آوردن فرمول بندی با تقریب عالی هندسه، میاندار جزء المان نشان داده شده در شکل (۴) را با یک تابع سهمی درجه دوم تقریب می زنیم.

$$D' = \begin{bmatrix} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2} & 0 & 0 \\ EI & & \\ 0 & \sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2} & 0 \\ EA & & \\ 0 & 0 & \alpha \sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2} \\ GA & & \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$F'_{ii} = \int_{-1}^{+1} B_i'^T D' B_i' d\zeta \quad (34)$$

با وارون کردن ماتریس F'_{ii} ، زیرماتریس سختی k_{ii} از رابطه (۱۳) به دست آمده، و زیرماتریسهای k_{ij} و k_{ji} با استفاده از تبدیلهای (۱۷) و (۱۹) قابل محاسبه خواهند بود.

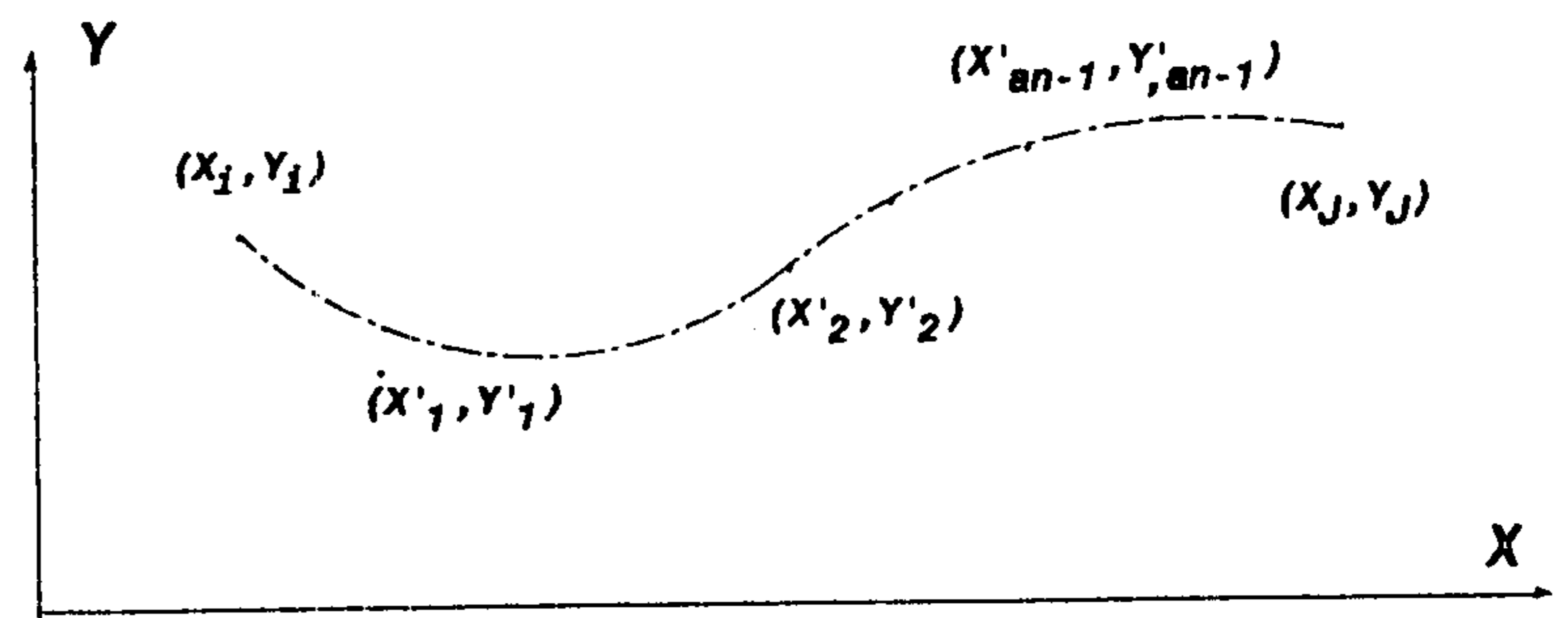
بردار نیروهای معادل گرهی

برای تعیین نیروهای معادل گرهی، می توان از رویه ای که در قسمت قبل توضیح داده شده استفاده کرد. تنها تفاوت در اینجا محاسبه مقادیر توابع M ، N و T در نقاط لازم برای انتگرالگیری عددی است و برای این منظور می توان از هر یک از روشهای عددی انتگرالگیری (مانند گوس یا سیمپسون) استفاده نمود.

به عنوان مثال اگر بخواهیم توابع M ، N و T را در نقطه انتگرالگیری (α, β) از پیکره نشان داده شده در شکل (۶) به دست آوریم، در روش گوس روابط زیر برای جزء المان k قابل استخراج خواهند بود:

$$M_k = \int_{-1}^{+1} aq \sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2} \left(\sum_{i=1}^3 x'_i N_i - \alpha\right) d\zeta \quad (35)$$

$$N_k = \left(\frac{\frac{dy}{d\zeta}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2}}\right) \int_{-1}^{+1} aq \sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2} d\zeta \quad (36)$$



شکل ۵: نقاط گرهی و نقاط واسطه واقع بر محور عضو.

ماتریس نرمی در مختصات نگاشت یافته

از روابط (الف-۳۰) و (ب-۳۰) نتیجه می گیریم:

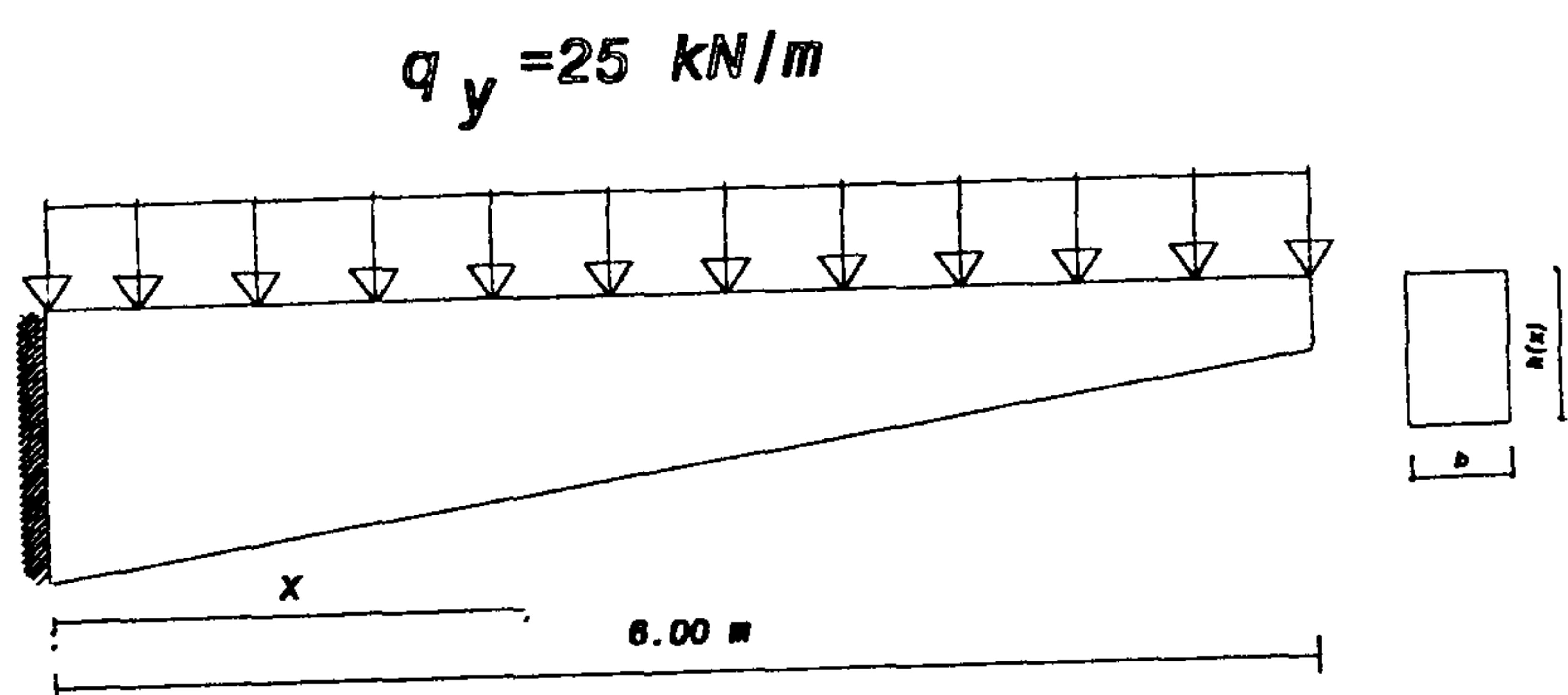
$$\frac{dx}{d\zeta} = \sum_{i=1}^3 x'_i \frac{dN_i}{d\zeta} \quad (الف-۳۱)$$

$$\frac{dy}{d\zeta} = \sum_{i=1}^3 y'_i \frac{dN_i}{d\zeta} \quad (ب-۳۱)$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2}}{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)} \quad (ج-۳۱)$$

با جایگذاری مجموعه روابط (۳۱) در معادلات (ب-۷) و (ب-۱۱)، ماتریس نرمی در دستگاه مختصات ζ به صورت زیر به دست می آید:

$$B_i' = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^3 y'_i N_i - y_i}{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)} & \frac{x_i - \sum_{i=1}^3 x'_i N_i}{\left(\frac{dy}{d\zeta}\right)} & -1 \\ \frac{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2}} & \frac{\left(\frac{dy}{d\zeta}\right)}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2}} & 0 \\ \frac{\left(\frac{dy}{d\zeta}\right)}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2}} & \frac{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2}} & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$



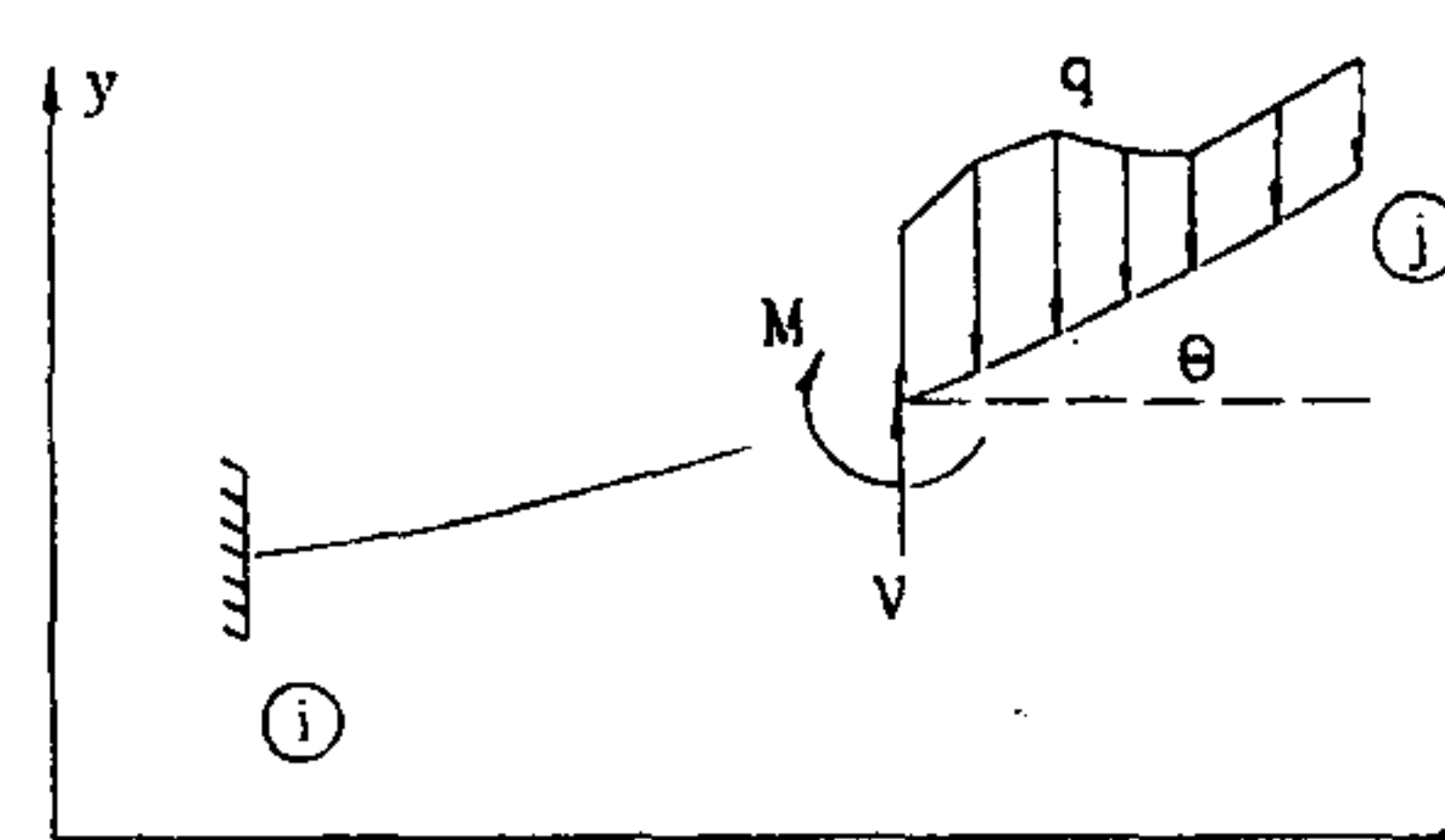
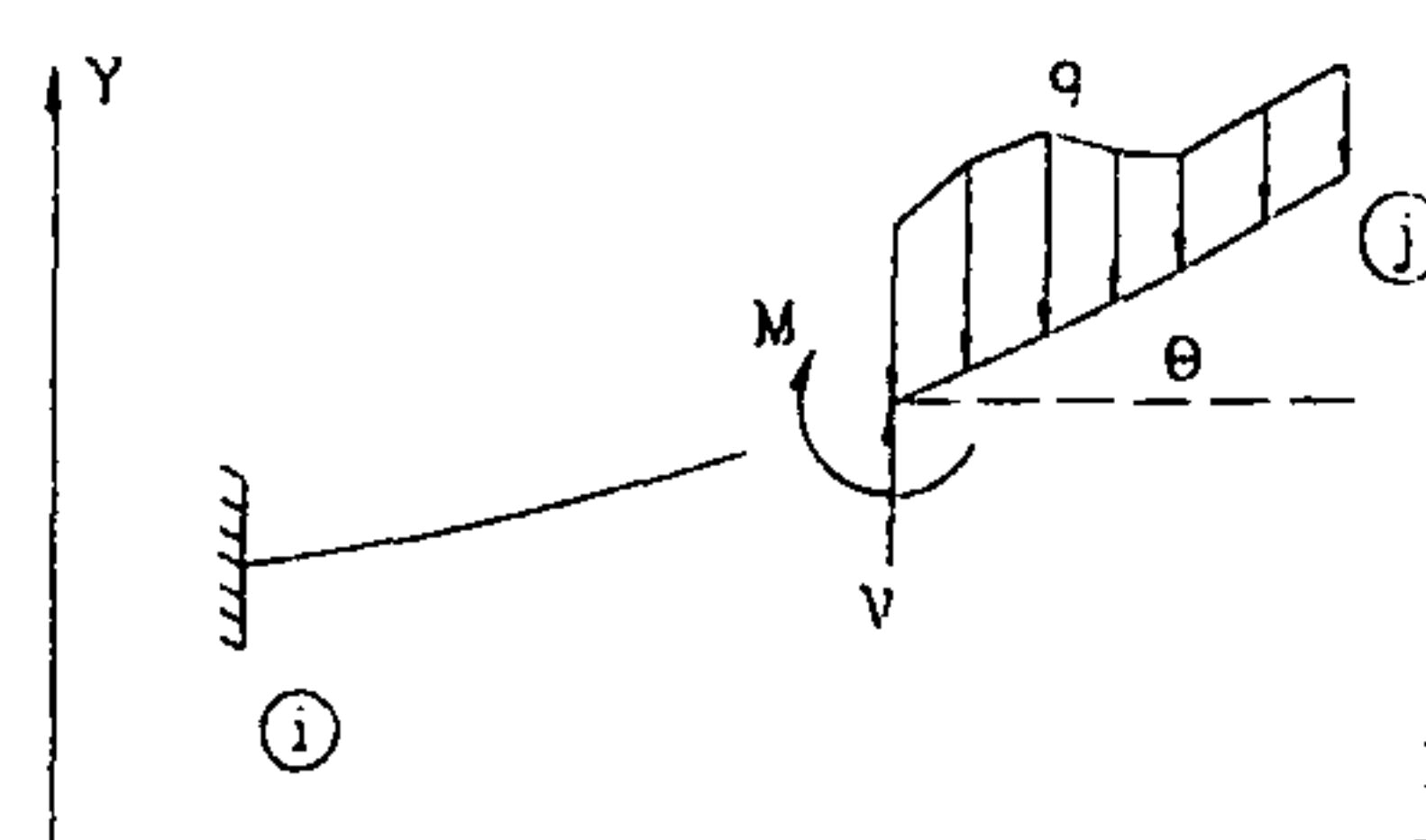
$$T_k = \left(\frac{\frac{dx}{d\zeta}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2}} \right) \int_{-1}^{+1} a q \sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2} d\zeta \quad (37)$$

در روابط (۳۵) تا (۳۷): $a = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}$

در نهایت با جمع کردن مقادیر M_k ، N_k و T_k از نقطه انتهایی تا مقطع انتگرالگیری مقدار عددی توابع M ، N و T به دست خواهد آمد.

شکل ۷: نمای جانبی تیر، تحت اثر بار گسترده یکنواخت.

مقادیر خیز و دوران انتهایی آزاد B تیر که از فرمول بندیهای های پایه و المان با تقریب عالی هندسه این مقاله به دست آمده، در جدول (۱) ارائه و با نتایج حاصل از روشهای دیگر مقایسه شده است.



جدول ۱: مقادیر خیز و دوران انتهایی (B) تیر.

| دوران انتهایی B ω_B (rad) | خیز انتهایی B $\delta_B \downarrow$ (mm) | نوع روش |
|-------------------------------------|---|---|
| 0.001766 | 7.0853 | حل تحلیلی |
| 0.001766 | 7.0853 | فرمول بندی پایه حاضر (۱ المان) |
| 0.001766 | 7.0853 | المان با تقریب عالی هندسه (۱ المان سه گرهی) |
| 0.001764 | 7.0850 | ANSYS (Beam 54) (۱ المان) |
| 0.001766 | 7.0853 | SAP90 (Frame) (۱ المان) |

شکل ۶: تلاشهای موثر در یک مقطع دلخواه.

آزمونهای عددی

در ادامه برای اثبات صحت و کارایی فرمول بندی حاضر، به ذکر چند نمونه پرداخته و دقت نتایج حاصل از المان با تقریب عالی هندسه تشریح شده در بخش دوم، در قیاس با فرمول بندی پایه ارائه شده در بخش اول و روشهای مبتنی بر سختی مستقیم نشان داده خواهد شد.

تیر طره با مقطع متغیر تحت بار گسترده یکنواخت

شکل (۷) یک تیر طره را تحت اثر بار گسترده یکنواخت $q_y = 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ نشان می دهد. مشخصات

مصالح و هندسه عضو به قرار زیر است:

$$E = 200 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$G = 70 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$h(x) = \left(1 - \frac{x}{12}\right) \text{ m} , \quad b = 0.5 \text{ m}$$

قاب شیبدار تحت اثر نیروی متمرکز

در شکل (۸) یک قاب شیبدار تحت اثر بار متمرکزی در راس نشان داده شده است. مشخصات مصالح و هندسه عضو به قرار زیر است.

$$A = 0.15 \text{ m}^2 , \quad I = 0.003125 \text{ m}^4$$

$$E = 20 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

بار متمرکزی در راس آن وارد شده است. مشخصات مصالح و هندسه عضو به قرار زیر است:

$$A = 1 \text{ in}^2, \quad I = \frac{1}{12} \text{ in}^4$$

$$E = 10^7 \text{ psi}, \quad r = 17 \text{ in}$$

جدول الف-۳: مقادیر نیروها و لنگر خمشی در نقطه (B).

| نیروی محوری N_B (lb) | لنگر خمشی M_B (lb.in) | نوع روش و تعداد و نوع المانها |
|---------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| 915.91 | 5164.51 | حل تحلیلی |
| 915.91 | 5164.51 | فرمول بندی پایه نرمی (۱ المان) |
| 915.88 | 5156.76 | ۵ گرهی |
| 915.91 | 5162.93 | ۷ گرهی |
| 915.91 | 5164.00 | ۹ گرهی |
| 915.91 | 5164.31 | ۱۱ گرهی |
| 915.83 | 4993.92 | ۵ المان |
| 915.91 | 5121.82 | ۱۰ المان |
| 915.93 | 5145.16 | ۱۵ المان |
| 915.92 | 5153.85 | ۲۰ المان |

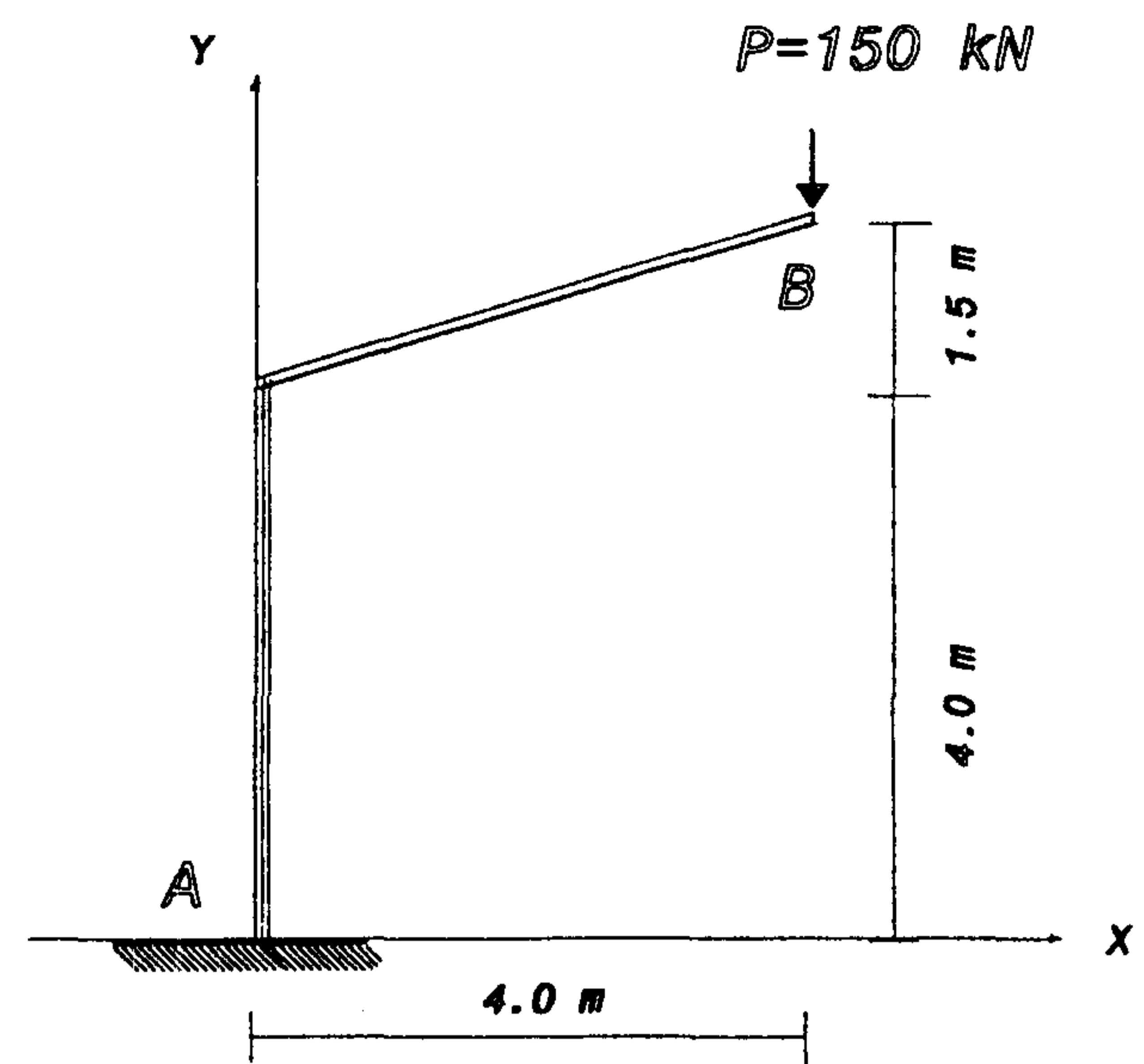
در این نمونه مقادیر جابجایی و نیروهای به دست آمده از روشهای مختلف، با توجه به تعداد المانها و تعداد گره های واسطه میانی مورد مقایسه قرار گرفته است. خلاصه نتایج در جداول (الف-۳) و (ب-۳) ارائه شده است. لازم به ذکر است که در کلیه محاسبات از اثر تغییرشکلهای ناشی از برش صرف نظر شده است و در مواردی که نیاز بوده است، برای محاسبه کلیه انتگرالها از روش گوس ۴ نقطه ای استفاده شده است.

قوس ربع دایره تحت اثر بار وزن

شکل (۱۰) یک قوس ربع دایره را نشان می دهد که تحت اثر بار وزنش قرار دارد. مشخصات مصالح و هندسه عضو به قرار زیر است:

$$A = 0.6 \text{ m}^2, \quad I = 0.0072 \text{ m}^4$$

$$E = 30 * 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \quad \gamma = 24.5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

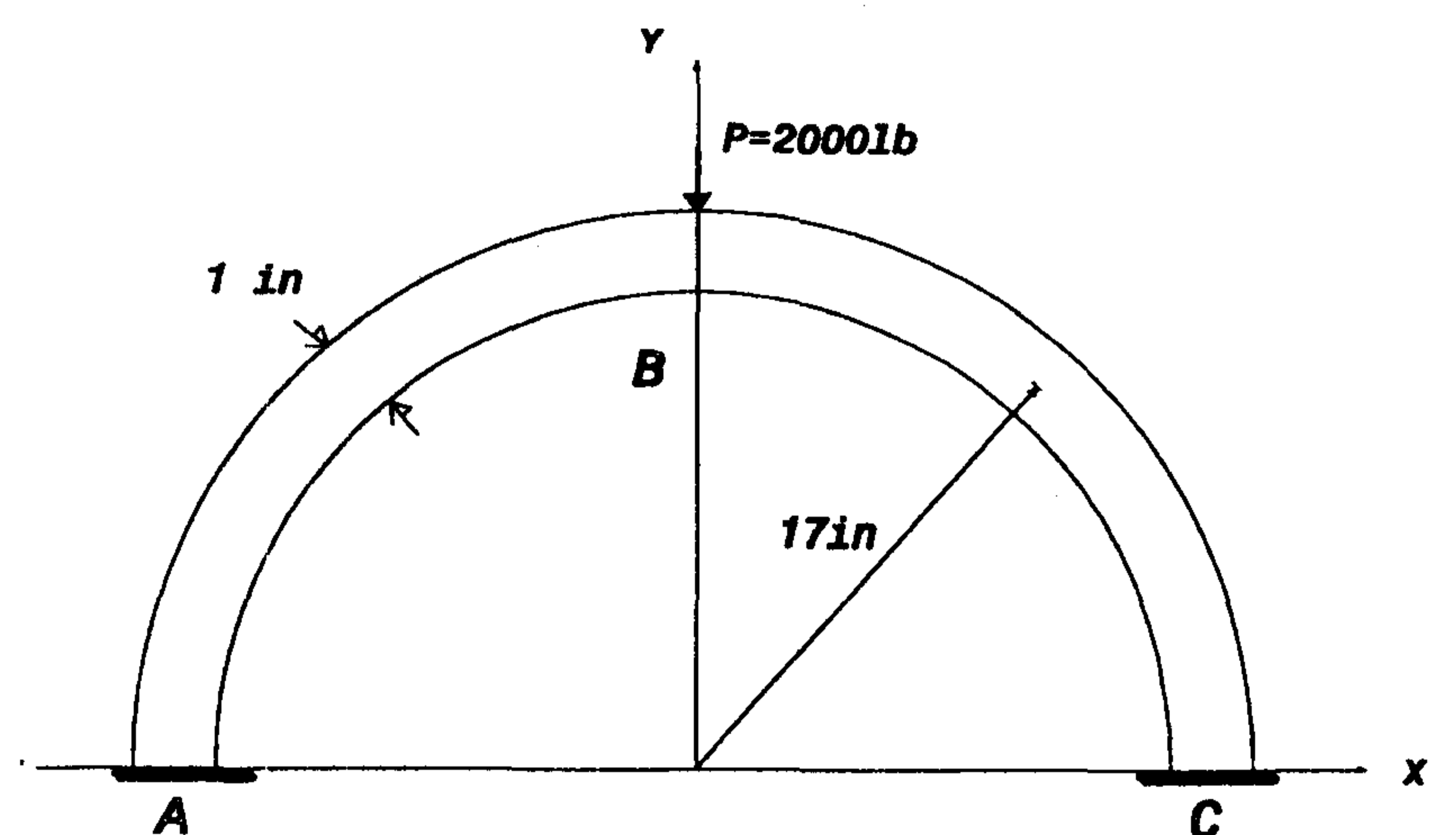


شکل ۸: قاب شیبدار تحت اثر بار متمرکز.

مقادیر جابجایی و دوران گره B که از روشهای مختلف به دست آمده در جدول (۲) ارائه شده است. لازم به ذکر است که در محاسبه انتگرالها از روش گوس دو نقطه ای استفاده شده است.

جدول ۲: مقادیر جابجایی و دوران گره (B).

| ω_B (rad) | $\delta_{yB} \downarrow$ (mm) | $\delta_{xB} \rightarrow$ (mm) | نوع روش و تعداد المانها |
|---------------------|----------------------------------|-----------------------------------|---|
| 0.00589 | 20.8508 | 15.483 | SAP90 (Frame) (۲ المان) |
| 0.00589 | 20.8508 | 15.483 | المان با تقریب عالی هندسه (۱ المان پنج گرهی) |



شکل ۹: قوس نیم دایره تحت اثر بار متمرکز.

قوس نیم دایره تحت اثر بار متمرکز

شکل (۹) یک قوس نیم دایره را نشان می دهد که

دقت جوابهای حاصل از دو نوع المان ۷ و ۱۱ گرهی در جداول (ب-۴) و (ج-۴) مورد بررسی قرار گرفته است. باید توجه داشت که در جدول (الف-۴) برای تخمین انتگرالها از روش گوس ۳ نقطه ای استفاده شده است.

جدول الف-۴: مقدار خیز در نقطه (B).

| $\delta_{yB} \downarrow$ (mm) | $\delta_{xB} \rightarrow$ (mm) | نوع روش و تعداد و نوع المانها | |
|----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|
| 10.25541 | 6.97263 | ۵ گرهی | المان با تقریب عالی هندسه (۱ المان) |
| 10.26828 | 6.97795 | ۷ گرهی | |
| 10.27045 | 6.97881 | ۹ گرهی | |
| 10.27105 | 6.97904 | ۱۱ گرهی | |
| 10.20853 | 6.96090 | ۱۰ المان | ANSYS (BEAM 54) |
| 10.25537 | 6.97446 | ۲۰ المان | |
| 10.26400 | 6.97701 | ۳۰ المان | |
| 10.26702 | 6.97764 | ۴۰ المان | |

جدول ب-۴: نتایج حاصل از یک المان ۷ گرهی.

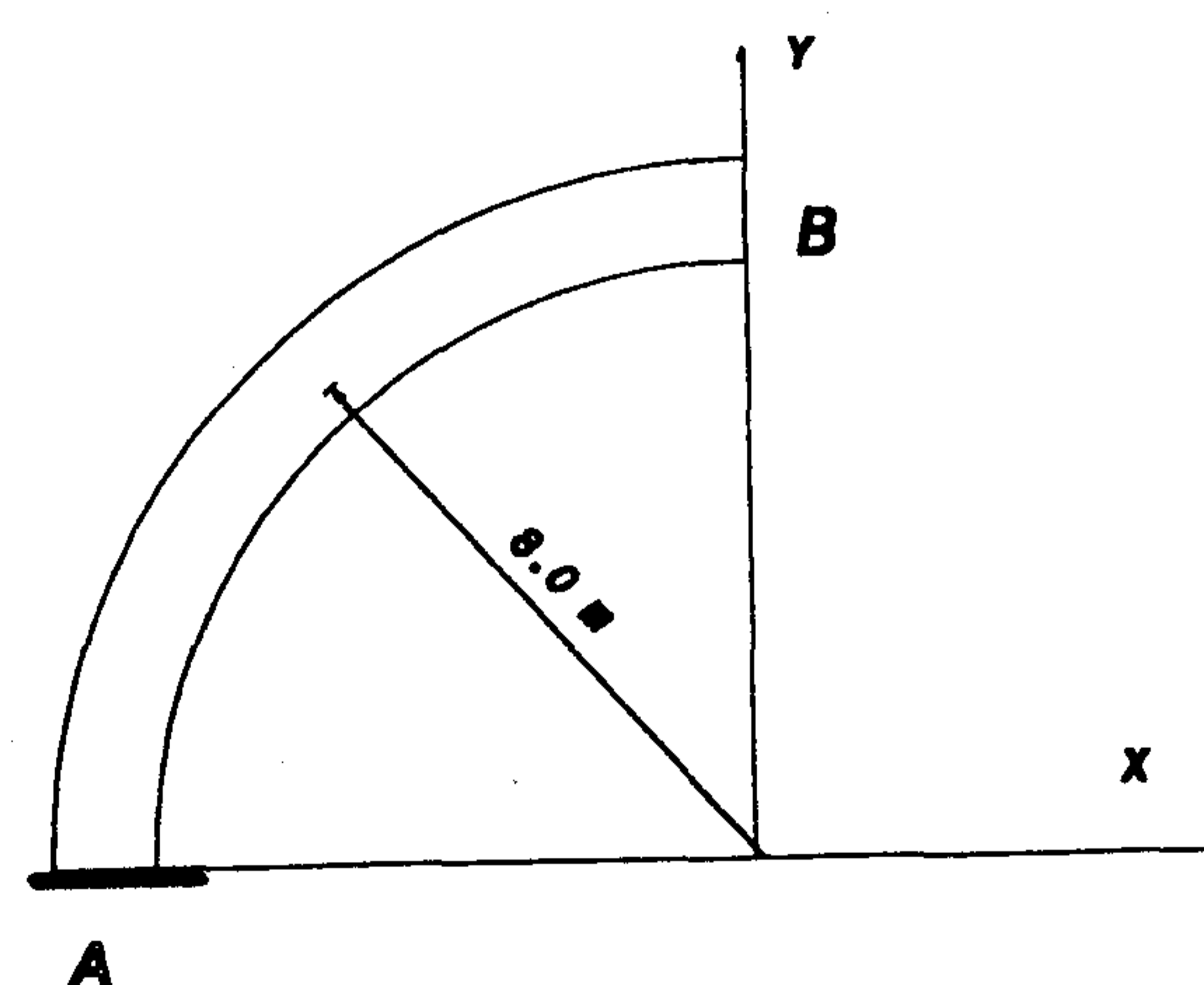
| $\delta_{yB} \downarrow$ (mm) | $\delta_{xB} \rightarrow$ (mm) | المان با تقریب عالی هندسه (۱ المان) | |
|----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|--|
| 10.26893 | 6.97794 | ۲ نقطه | تعداد نقاط گوس مورد استفاده در تخمین انتگرالها |
| 10.26828 | 6.97795 | ۳ نقطه | |
| 10.26827 | 6.97793 | ۴ نقطه | |
| 10.26827 | 6.97793 | ۵ نقطه | |

جدول ج-۴: نتایج حاصل از یک المان ۱۱ گرهی.

| $\delta_{yB} \downarrow$ (mm) | $\delta_{xB} \rightarrow$ (mm) | المان با تقریب عالی هندسه (۱ المان) | |
|----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|--|
| 10.27111 | 6.97904 | ۲ نقطه | تعداد نقاط گوس مورد استفاده در تخمین انتگرالها |
| 10.27105 | 6.97904 | ۳ نقطه | |
| 10.27105 | 6.97904 | ۴ نقطه | |
| 10.27105 | 6.97904 | ۵ نقطه | |

جدول ب-۳: مقدار خیز در نقطه (B).

| مقدار خیز (in) $\delta_{yB} \downarrow$ | نوع روش و تعداد و نوع المانها | |
|--|--------------------------------|--|
| 0.1415238 | حل تحلیلی | |
| 0.1415238 | فرمول بندی پایه نرمی (۱ المان) | |
| 0.1414071 | ۵ گرهی | المان با تقریب عالی هندسه (۱ المان) |
| 0.1414955 | ۷ گرهی | |
| 0.1415142 | ۹ گرهی | |
| 0.1415196 | ۱۱ گرهی | |
| 0.13888 | ۵ المان | ANSYS (BEAM 54) |
| 0.14087 | ۱۰ المان | |
| 0.14123 | ۱۵ المان | |
| 0.14139 | ۲۰ المان | |
| 0.140829 | ۱۰ المان | مرجع [۱۶] (روش سختی مستقیم) المانهای خمیده با ۶ درجه آزادی |
| 0.141039 | ۱۲ المان | |
| 0.141167 | ۱۴ المان | |
| 0.141250 | ۱۶ المان | |
| 0.141353 | ۶ المان | مرجع [۱۶] (روش سختی مستقیم) المانهای خمیده با ۸ درجه آزادی |
| 0.141478 | ۸ المان | |
| 0.141507 | ۱۰ المان | |
| 0.141516 | ۱۲ المان | |



شکل ۱۰: قوس ربع دایره تحت اثر بار وزن.

مقدار جابجایی قائم گره B که از دو نوع فرمول بندی مختلف به دست آمده در جدول (الف-۴) ارائه شده است. به عنوان نمونه ای کوچک، اثر تعداد نقاط گوس بر روی

نتیجه گیری

در فرمول بندی پایه تشریح شده، هر سه رابطه تعادل، سازگاری و ساختاری در طول عضو به طور دقیق

می کنند.
 نمونه های مختلف حل شده، نشان می دهند که برای دستیابی به تخمین مناسب از انتگرالها، استفاده از ۳ یا ۴ نقطه گوسی کفایت می کند.
 از آنجا که درجات آزادی گره های میانی المان در ماتریس سختی وارد نمی شوند، فرمول بندی حاضر می تواند کاهش چشمگیری در حجم محاسبات تحلیلهای غیر خطی پدید آورد.

ارضاء می شوند. از اینرو تنها تقریب احتمالی که در فرمول بندی وجود دارد به تخمین عددی انتگرالها مربوط می شود.
 المانهای با تقریب عالی هندسه که در بخش دوم مقاله شرح آنها رفت، توانایی مدل کردن اعضای با اشکال پیچیده را دارا می باشند، بگونه ای که این المانها حتی برای اعضای دارای تغییرات ناگهانی شیب یا مشخصات مقطع نیز قابل استفاده اند. نمونه های ارائه شده دقت و سرعت همگرایی بالای المانهای مورد بحث را تایید

مراجع

- 1- Jirousek, J. (1981). "A family of variable section curved beam and thick-shell or membrane-stiffening isoparametric elements." *Int. J. Numerical Methods in Eng.*, Vol. 17, PP. 171-186.
- 2- Eisenberger, M., and Reich, Y. (1989). "Static, vibration and stability analysis of non-uniform beams." *Comput. Struct.*, Vol. 4, PP. 567-573.
- 3- Kohnke, P. C. (1977). "ANSYS theoretical manual." *Swanson Analysis Systems*.
- 4- Zienkiewicz, O. C. (1988). *The finite element method*, 4th Edition, McGraw Hill (UK).
- 5- Oral, S. (1991). "Anysoparametric interpolation in hybrid-stress Timoshenko beam element." *J. Struct Eng., ASCE*, Vol. 117, No. 4, PP. 1070-1078.
- 6- Attarnejad, R. (2000). "On the derivation of geometric stiffness matrices and consistent mass matrices for non-prismatic Euler- Bernoulli beam elements." *Proc., European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Barcelona, Spain.
- ۷- عطارنژاد، ر. "محاسبه ماتریس جرم دقیق تیرهای با مقطع متغیر"، در دست چاپ.
- 8- Karabalis, D. L., and Beskos, D.E. (1983). "Static, dynamic and stability analysis of structures composed of tapered beams." *Comput. Struct.*, Vol. 16, No. 6, PP. 731-748.
- 9- Eisenberger, M. (1985). "Explicit stiffness matrices for non-prismatic members." *Comput. Struct.*, Vol. 20, No. 4, PP. 715- 720.
- 10- Banjeree, J. R., and Williams, F. W. (1986). "Exact Bernoulli-Euler static stiffness matrix for a range of tapered beam-columns." *Int. J. Numerical Methods in Eng.*, Vol. 23, PP. 1615-1628.
- 11- Molins, C., Roca, P., and Barbat, H. (1998). "Flexibility- based linear dynamic analysis of complex structures with curved-3d members." *J. Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 27, PP. 731-747.
- 12- Carol, I., and Murcia, J. (1989). "Nonlinear time-dependent analysis of planar frames using an exact formulation – I. Theory." *Comput. Struct.*, Vol. 33, No. 1, PP. 79-87.
- 13- Blandford, G. E., and Glass, G. C. (1987). "Static/dynamic analysis of locally buckled frames." *J. Struct. Eng., ASCE*, Vol. 113, No. 2, PP. 363-380.
- 14- Spacon, E., Filippou, F. C., and Taucer, F. (1996). "A fiber beam-column model for nonlinear analysis of R/C frames: Part I. Formulation" *J. Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 25, No. 7, PP. 711-725.

- 15- Baron, F. (1961). "Matrix analysis of structures curved in space." *J. Struct. Div., ASCE*, Vol. 87, No. ST3, PP. 17-38.
- 16- Yong, T. Y. (1986). *Finite element structural analysis*. McGraw-Hill.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 - Euler-Bernoulli Beam theory
- 2 - Flexibility Formulation
- 3 - Super parametric Formulation
- 4 - Displacements Based Formulation
- 5 - Hybrid Formulation
- 6 - Sectional Stiffnes
- 7 - Flexibility Sub-Matrix