

محاسبه همبستگی شبکه G_n^m ، شبکه ای با ماکسیم همبندی

دارا معظمی

دانشیار گروه علوم پایه مهندسی - دانشکده فنی - دانشگاه تهران
مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات سازمان انرژی اتمی ایران
(تاریخ دریافت ۸۰/۱۰/۳، تاریخ تصویب ۸۱/۷/۲۰)

چکیده

برای هر عدد صحیح ثابت m و n ، $m \geq n+1$ ، رده ای از گرافهای G_n^m را در نظر می گیریم، که آنها با تعداد یالهای مینیم، n -همبند باشند. گرافهای G_n^m مثالهای خوبی برای شبکه هایی با ماکسیم همبندی هستند. این خاصیت آنها را برای طراحان شبکه مفید می سازد و از این رو جالب است که پارامترهای پایداری شبکه ها را روی این گرافها مطالعه کنیم. در این مقاله با استفاده از پارامتر همبستگی به محاسبه شبکه G_n^m در حالتی می پردازیم که m زوج و n فرد باشد.

واژه های کلیدی: همبندی، همبستگی

مقدمه

شبکه ها را می توان به وسیله یک گراف G ، با مجموعه راسی $V(G)$ و مجموعه یالی $E(G)$ ، نمایش داد. یک شبکه ارتباطی ترکیبی از راسها و یالهای ارتباطی است. داشتن شبکه ای با ماکسیم همبندی و طراحی آن خود از اهمیت ویژه ای برخوردار است. وقتی شبکه ای شروع به از دست دادن یالها می کند موثر بودن خود را از دست میدهد. طبیعتاً لازم است به ترتیب مناسبی تعمیر شود. داشتن پارامتری که اطلاعات لازم را در اختیار بگذارد و به سوالات زیر

نامند اگر حذف آنها G را ناهمبند کند، و زیر مجموعه ای $E(G)$ را یک مجموعه برشی یالی نامند اگر حذف آنها G را ناهمبند کند.

همبستگی، یک پارامتر جدید برای گرافهاست و اولین بار در مقاله [۲] معرفی شد و سپس در مقاله های [۶، ۷، ۸، ۹] تعمیم داده شد. رده های بسیاری از گرافها وجود دارند که نشان می دهند پارامتر همبستگی مناسبترین اندازه گیر پایداری در شبکه هاست [۵]. این پارامتر قادر است بین گرافهایی که دارای پایداریهای مختلف هستند تفاوت قائل شود. همبستگی یک گراف G یعنی $T(G)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$T(G) = \min \left\{ \frac{|A| + \tau(G-A)}{\omega(G-A)} \right\}$$

که در آن منیم نسبت به همه راسهای مجموعه برشی A از G اختیار می شود. $G-A$ را گراف القا شده به وسیله راسهای $V-A$ و $\tau(G-A)$ را تعداد راسها در بزرگترین مولفه گراف القا شده به وسیله $G-A$ تعریف می کنیم. $\omega(G-A)$ تعداد مولفه های $G-A$ است. گراف همبند G را T - همبسته نامند اگر به ازای هر زیر

پاسخ دهد، برای طراحان شبکه بسیار مهم است: چند راس یا چند ایستگاه هنوز در ارتباط اند؟ و یا مشکلات وصل مجدد این شبکه آسیب دیده تا چه اندازه است؟

تعریفها

گراف G یک سه تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$ ، متشکل از مجموعه ناتهی $V(G)$ راسها، مجموعه $E(G)$ یالها، مجزا از $V(G)$ و تابع وقوع ψ_G است که با هر یال G یک جفت نامرتب (نه لزوماً مجزا) از راسهای G را همراه می کند. اگر e یک یال و u و v راسهایی باشند، به قسمی که $\psi_G(e) = uv$ ، آن گاه می گویند e ، u را به v وصل می کند؛ راسهای u و v را دو انتهای e می نامند. مجموعه ای از راسها در G مستقل است اگر هیچ دو راسی از آنها مجاور نباشند. بیشترین تعداد راسها در چنین مجموعه ای را عدد استقلال راسی G می نامند و به وسیله $\alpha(G)$ یا α نمایش می دهند. گراف ساده ای را که در آن هر جفت از راسهای متمایز به وسیله یک یال به هم متصل باشند، گراف کامل می نامند. گراف کامل n راسی را با K_n نشان می دهند. زیر مجموعه ای از $V(G)$ را مجموعه برشی

زوج بوده، $n=2r$ ، و دو راس i و j گراف G_{2r}^m مجاور باشند. دو راس i و j مجاورند اگر $i-r \leq j \leq i+r$ (که در آن جمع به پیمانانه m در نظر گرفته شده است). حال فرض کنید n فرد، $n > 1$ و m زوج باشد. گیریم $n=2r+1$ ، $(r > 0)$. در این صورت G_{2r+1}^m را به ترتیب زیر می سازیم: ابتدا G_{2r}^m را می سازیم و سپس یالهایی را که راس i را به راس $i + \frac{m}{2}$ برای $1 \leq i \leq \frac{m}{2}$ وصل می کند، رسم می کنیم. G_v^{14} را در شکل (۱) نشان داده ایم.

مجموعه A از راسهای G با $\omega(G-A) > 1$ رابطه $|A| + \tau(G-A) \geq T\omega(G-A)$ برقرار باشد. اگر G کامل نباشد، آنگاه بزرگترین T موجود است به طوری که G ، T -همبسته است. این T ، همبستگی G است. به سخنی دیگر، گراف کامل شامل مجموعه برش راسی نیست ولذا به ازای هر T ، T -همبسته است. به طور متناظر، تعریف می کنیم ∞ $T(K_p) =$ به ازای هر p ، $(p \geq 1)$. مجموعه $A \subseteq V(G)$ را T -مجموعه G نامند اگر

$$T(G) = \left\{ \frac{|A| + \tau(G-A)}{\omega(G-A)} \right\}$$

در بخش فوق سعی شده همه تعاریف مورد نیاز برای مطالعه این مقاله آورده شود، با وجود این و در صورت نیاز خواننده می تواند به کتابهای اصلی نظریه گراف و از آن جمله کتاب نظریه گراف با کاربردهای آن اثر باندی و مورتی [۳] که به تازگی به وسیله دکتر دارا معظمی ترجمه شده و توسط مرکز نشر دانشگاهی به چاپ رسیده است، مراجعه کند.

شکل ۱: گراف G_7^{14} .

محاسبه همبستگی شبکه G_n^m

راسهای گراف G_n^m را با $m-1, \dots, 2, 1, 0$

قضیه زیر را هراری در [۳] ثابت کرد.

نشان گذاری می کنیم. ابتدا فرض کنید n

برهان: اگر $n \equiv 0 \pmod{2}$ ، آنگاه $r=1$ ،

$s=0$ ، $k=\frac{n}{2}$. لذا با استفاده از قضیه ۲،

داریم $T(G_n)=1+\frac{2}{n}$ اگر $n \equiv 1 \pmod{2}$ ، آن

گاه $s=1$ ، $k=\frac{n-1}{2}$ ، $r=1$. پس

$$T(G_n)=1+\frac{4}{n-1}$$

لم ۱: گیریم G_n^m با m زوج و n فرد باشد،

$n=2r+1$. در این صورت

$m \equiv 0 \pmod{n+1}$ اگر و تنها اگر $s=0$ و k

زوج باشد.

لم ۲: گیریم G_n^m با m زوج، $n=2r$ برای

n زوج و $n=2r+1$ برای n فرد باشد، آن

گاه

$$\alpha(G_n^m) = \begin{cases} k & m \not\equiv 0 \pmod{n+1} \\ k-1 & m \equiv 0 \pmod{m+1} \end{cases}$$

قضیه ۳: گیریم G_n^m با m زوج و n فرد،

$n=2r+1$ ، باشد. در این صورت

$$r + \frac{(1 + \lceil \frac{s}{k} \rceil)}{k} \leq T(G_n^m) \leq$$

$$\begin{cases} r + \frac{s+1}{k} & m \not\equiv 0 \pmod{n+1} \\ \frac{kr+s+2}{k-1} & m \equiv 0 \pmod{n+1} \end{cases}$$

برهان: گیریم $H=G_n^m$. در [۲] ثابت

کردیم که $T(H) \leq \frac{m - \alpha(H) + 1}{\alpha(H)}$. لذا با استفاده

از لم ۲، اگر $m \not\equiv 0 \pmod{n+1}$ ، آن گاه

قضیه ۱: گراف G_n^m ، n -همبند است.

هراری در مقاله اش نشان داد که بنا

به قضیه ۱ همبندی این گراف ماکسیم

است. پس گراف انتخاب شده

G_{2r+1}^m شبکه ای با همبندی ماکسیم است.

در این مقاله n را برابر $2r$ یا $n =$

$2r+1$ و $m=k(r+1)+s$ برای $0 \leq s < r+1$

در نظر می گیریم. لذا می توانیم نشان

دهیم که

$$k = \left\lfloor \frac{m}{r+1} \right\rfloor, \quad m \equiv s \pmod{r+1}$$

همچنین فرض می کنیم که گراف G_n^m کامل

نیست، $n+1 < m$. در مقاله [۵] همبستگی

گراف G_{2r}^m را با استفاده از قضیه ۲ محاسبه

کردیم. در این مقاله علاقه مند به یافتن

همبستگی G_{2r+1}^m ، شکل (۱) که به مراتب

مشکل تر است، هستیم.

قضیه ۲: $T(G_{2r}^m) = r + \frac{1 + \lceil \frac{s}{k} \rceil}{k}$

فرع ۱: فرض کنید $G_n = (v_1 v_2 \dots v_n)$ یک -

n دور باشد. در این صورت

$$T(G_n) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{n} & n \equiv 0 \pmod{2} \\ 1 + \frac{4}{n-1} & n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

حالت اول: r زوج است. لذا s فرد و ℓ زوج است.

بنابراین $s = k - 1 \geq 1$ و $\ell = 2t$. از اینرو:

$q \geq t$ ، $k - \ell = 2q + 1 - 2t \geq 1$

زیر را انتخاب کنید.

$$\omega_0 = \{m-1, 0\}$$

$$D = \{1, 2, \dots, \frac{m}{2} - \frac{r}{2} - 1\} = \{1, 2, \dots, qr + 2q - t\}$$

$$F = \{\frac{m}{2} + \frac{r}{2}, \dots, m - 2\} =$$

$$\{\frac{m}{2} + \frac{r}{2}, \dots, \frac{m}{2} + \frac{r}{2} + qr + 2q - t - 1\}$$

از اینرو $|D| = |F|$. مجموعه برشی زیر را در

نظر

می گیریم.

$$A = C \cup \{\frac{m}{2} - \frac{r}{2}, \dots, \frac{m}{2} + \frac{r}{2} - 1\} \cup Y$$

به طوری که C اجتماع مجموعه های زیر است.

$$\{1, 2, \dots, r\}, \{r+2, \dots, 2r+1\}, \dots, \{(t-1)r+t, \dots, tr+t-1\}, \\ \{tr+t+1, \dots, (t+1)r+t\}, \{(t+1)r+t+3, \dots, \\ (t+2)r+t+2\}, \dots, \{(q-1)r+2q-t-1, \dots, qr+2q-t-2\}$$

که در آن $Y = Y_1 \cup Y_2$ و

$$Y_1 = \cup \{ \frac{m}{2} + \frac{r}{2} + (c-1)r + c, \dots,$$

$$\frac{m}{2} + \frac{r}{2} + cr + c - 1 \mid 1 \leq c \leq t \},$$

$$Y_2 = \cup \{ \frac{m}{2} + \frac{r}{2} + (f-1)r + 2f - t, \dots,$$

$$\frac{m}{2} + \frac{r}{2} + fr + 2f - t - 1 \mid t+1 \leq f \leq q \},$$

پس C یک زیر مجموعه D و Y یک زیر

مجموعه F است. اکنون $W = D - C$ را در

$$T(H) \leq \frac{m-k+1}{k} = \frac{k(r+1)+s-k+1}{k}$$

$$= r + \frac{s+1}{k}$$

و اگر $m \equiv 0 \pmod{n+1}$ ، آن گاه:

$$T(H) \leq \frac{m-(k-1)+1}{k-1} = \frac{kr+s+2}{k-1}$$

چون $V(G_{2r}^m) = V(H)$ و $E(G_{2r}^m) \subseteq E(H)$ ، آن

گاه G_{2r}^m زیر گراف فراگیر G است. در

[۲] داشتیم

$T(G_{2r}^m) \leq T(H)$. لذا به وسیله قضیه ۱ داریم

:

$$r + \frac{(1 + \lfloor \frac{s}{k} \rfloor)}{k} \leq T(G_n^m)$$

اکنون آماده ایم که همبستگی این گراف را محاسبه کنیم.

لم ۳: گیریم G_n^m با m زوج، $n = 2r+1$ ،

$r \geq 3$ ، $0 < s < r+1$ ، $s < k$ و k فرد باشد. در

این صورت یک برش راسی A با kr عنصر

وجود دارد به طوری که تعداد مولفه ها،

$\omega(G_n^m) = k$ ، و بزرگترین مولفه $\tau(G_n^m) = 2$

هستند.

برهان: فرض کنیم راسهای G_n^m به وسیله

$0, 1, 2, \dots, m-1$ نشان گذاری شده است. گیریم

$s < k$ ، در این صورت $s = k - \ell$. لذا

چون k فرد است، $m = s(r+2) + \ell(r+1)$

پس $k = 2q + \ell$.

عنصرها در مولفه ω_0 دارای عنصرهای مجاور در مجموعه برشی A هستند. تعداد عنصرهای مجموعه برشی A برابر است با rk و $\tau(G_n^m - A) = 2$ و $\omega(G_n^m - A) = k$.
حالت دوم: r فرد است. لذا S زوج و l فرد است. از اینرو $s = 2h$. مجموعه های زیر را انتخاب کنید.

$$\omega_0 = \{0\}$$

$$D = \{1, 2, \dots, \frac{m}{2} - \frac{r+1}{2}\} = \{1, 2, \dots, qr + q + h\}$$

$$F = \{\frac{m}{2} + \frac{r+1}{2}, \dots, m-1\} = \{\frac{m}{2} + \frac{r-1}{2} + 1, \dots, \frac{m}{2} + \frac{r-1}{2} + qr + q + h\}$$

از اینرو $|D|=|F|$. زیر مجموعه های زیر را در نظر بگیرید.

$$A = C \cup \{\frac{m}{2} + \frac{r-1}{2}, \dots, \frac{m}{2}, \dots, \frac{m}{2} + \frac{r-1}{2} - 1\} \cup A$$

به طوری که C اجتماع مجموعه های زیر باشد.

$$\{1, 2, \dots, r\}, \{r+3, \dots, 2r+2\}, \dots, \{hr+2h+1, \dots, (h+1)r+2h\},$$

$$\{(h+1)r+2h+2, \dots, (h+2)r+2h+1\}, \dots, \{(q-1)r+q+h, \dots, qr+q+h-1\}$$

و $Y = Y_1 \cup Y_2$ که در آن

نظر می گیریم. لذا W اجتماع مجموعه های زیر است:

$$\{r+1\}, \{2r+2\}, \dots, \{tr+1\}, \{(t+1)r+t+1, (t+1)r+t+2\}, \{(t+2)r+t+3, (t+2)r+t+4\}, \dots, \{qr+2q-t-1, qr+2q-t\}$$

W اجتماع t مولفه با ۱ عنصر و $q-t$ مولفه با ۲ عنصر است. مجموعه های تک عنصری به صورت $\{Lr+L\}$ هستند که در آن $1 \leq L \leq t$. مجموعه های دو عنصری به صورت $\{dr+2d-t-1, d+2d-t\}$ هستند که در آن $t+1 \leq d \leq q$. می خواهیم ثابت کنیم که اگر $x \in W$ آن گاه $x + \frac{m}{2} \in Y$. اگر X در یک مجموعه تک عنصری باشد، آن گاه X به صورت $x = Lr+L$ است که در آن $1 \leq L \leq t$. از اینرو:

$$x + \frac{m}{2} = [\frac{m}{2} + r + (L-1)r + L] \in Y_1$$

اگر $r \geq 3$. اولین عنصر مجموعه دو عنصری باشد، آن گاه X به صورت $x = dr+2d-t-1$ است که در آن $t+1 \leq d \leq q$. از اینرو:

$$x + \frac{m}{2} = [\frac{m}{2} + r + (d-1)r + 2d-t-1] \in Y_2$$

عنصرهای مولفه ω_0 برابر $m-1$ و 0 هستند. چون $r \geq 3$ ، آن گاه $0 + \frac{m}{2}$ در مجموعه $m-1 - \frac{m}{2} = \frac{m}{2} - 1$ هستند. از اینرو $\{\frac{m}{2} - \frac{r}{2}, \dots, \frac{m}{2} + \frac{r}{2} - 1\}$

از $x = Jr + J + h$ است که در آن $h + 1 \leq J \leq q$. اینرو $x + \frac{m}{2} = [\frac{m}{2} - \frac{r-1}{2} + (J-1)r + J + \frac{r+1}{2}] \in Y_2$. زیرا $r \geq 3$. عنصر مولفه ω_0 برابر 0 است. چون $0 + \frac{m}{2} \in \{\frac{m}{2} - \frac{r-1}{2}, \dots, \frac{m}{2}, \dots, \frac{m}{2} + \frac{r-1}{2}\}$ گاه عنصر مولفه ω_0 دارای عنصر مجاور در مجموعه برشی A است. بنابراین تعداد عنصرها در مجموعه برشی A برابر است با rk و $\tau(G_n^m - A) = 2$ و $\omega(G_n^m - A) = k$.

با استفاده از این نتایج، قضیه زیر را مطرح می کنیم.

قضیه ۴: گیریم G_n^m گراف مفروض با $n = 2r+1$ ، $r \geq 3$ ، m زوج، k فرد، $0 < s < r+1$ و $s < k$ باشد. در این صورت $T(G_n^m) = r + \frac{2}{k}$.

برهان: به وسیله قضیه ۲ داریم $r + \frac{1 + \lceil \frac{s}{k} \rceil}{k} \leq T(G_n^m)$. آن گاه $r + \frac{2}{k} \leq T(G_n^m)$ در لم ۳، A مجموعه برشی G_n^m با kr عنصر است. بزرگترین مولفه G_n^m دارای ۲ عنصر است و تعداد k مولفه موجود است. بنابراین همبستگی با استفاده از مجموعه A مقدار کران پایین را اختیار می کند، یعنی $T(G_n^m) = \frac{kr+2}{k} = r + \frac{3}{k}$.

$Y_1 = \cup \{ \frac{m}{2} + \frac{r-1}{2} + (g-1)r + 2g + 1, \dots, \frac{m}{2} + \frac{r-1}{2} + gr + 2g \mid 1 \leq g \leq h \}$,
 $Y_2 = \cup \{ \frac{m}{2} + \frac{r-1}{2} + (b-1)r + b + h + 1, \dots, \frac{m}{2} + \frac{r-1}{2} + br + b + h \mid h+1 \leq b \leq q \}$,
 لذا C زیر مجموعه D و Y یک زیر مجموعه F است. اکنون فرض کنید $W = D-C$. از اینرو اجتماع مجموعه های زیر است:

$\{r+1, r+2\}, \dots, \{hr+2h-1, hr+2h\}$
 $\{(h+1)r+2h+1\}, \dots, \{qr+q+h\}$
 W اجتماع h مولفه با ۲ عنصر و q-h مولفه با ۱ عنصر است. مجموعه های دو عنصری به صورت $\{er+2e-1, er+2e\}$ است که در آن $\{1 \leq e \leq h\}$. مجموعه های تک عنصری به صورت $\{jr+j+h\}$ هستند که در آن $h+1 \leq j \leq q$. می خواهیم ثابت کنیم که اگر $x \in W$ آن گاه $x + \frac{m}{2} \in Y$. اگر X اولین عنصر مجموعه دو عنصری باشد، آنگاه X بصورت $x = er+2e-1$ است که در آن $1 \leq e \leq h$ از اینرو:

$x + \frac{m}{2} = [\frac{m}{2} + \frac{r-1}{2} + (e-1)r + 2e + \frac{r+1}{2}] \in Y_1$
 زیرا $r \geq 3$. به طور مشابه، $x + 1 + \frac{m}{2}$ هم در Y_1 است. اگر X در یک مجموعه تک عنصری باشد، آن گاه X به صورت

اگر x در W باشد، آن گاه x به صورت :

$$x = pa + pr + p + c$$

چون $0 \leq p \leq k-1$ و $c \leq a$ ، $m = k(r+1)$ و $s = ak$ ، $m = k(r+1+a)$ ،

حالت ۱ : k فرد است ، $k = 2q+1$ ، $k > 1$.

از اینرو :

$$m = (2q+1)(r+1+a) = 2q(r+1+a) + r+1+a$$

چون m زوج است، آن گاه :

$$\frac{m}{2} = q(r+1+a) + \frac{r+1+a}{2}$$

عدد صحیح است. بنابراین

$$x + \frac{m}{2} = pa + pr + p + c + qr + q + qa + \frac{r+1+a}{2}$$

$$= (p+q)a + (p+q)r + p + q + c + \frac{r+1+a}{2}$$

$$= (p+q+1)a + (p+q)r + p + q + 1 + c - a - 1 + \frac{r+1+a}{2}$$

که در مجموعه برشی A است، به شرطی که

$$0 \leq c - a - 1 + \frac{r+1+a}{2} \leq r-1$$

به طور هم ارزی $0 \leq 2c - a - 1 + r \leq 2r - 2$ ،

یا $0 \leq 2c - a - 1 + r \leq 2r - 2$ ، یا :

$$1 - r \leq 2c - a \leq r - 1$$

چون $c \leq a$ و $s = ak < r$ ، داریم

$$2c \leq 2a = a + a \quad \text{یا} \quad 2c - a \leq a < r$$

بنابراین $2c - a \leq r - 1$. همچنین

اکنون حالتی را در نظر می گیریم که m مضربی از k باشد.

لم ۴ : گیریم G_n^m با مجموعه راسی $V = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ ، $n = 2r+1$ ، m زوج ، $0 < s < r+1$ و $s = ak$ باشد، آن گاه :

$$A = \cup \{ \{ba + (b-1)r + b, ba + (b-1)r + b + 1, \dots, ba + br + b - 1\} \mid 1 \leq b \leq k \}$$

مجموعه برشی G_n^m با kr عنصر است اگر و تنها اگر k فرد باشد.

برهان : مجموعه A اجتماع مجموعه های زیر است :

$$\{a+1, a+2, \dots, a+r\}, \{2a+r+2, \dots, 2a+2r+1\}, \dots, \{ka + (k-1)r + k, \dots, ka + kr + k - 1\}$$

بنابراین $W = G_n^m - A$ اجتماع مجموعه های

$$\{0, 1, \dots, a\}, \{a+r+1, \dots, 2a+r+1\}, \dots, \{(k-1)a + (k-1)r + k - 1, \dots, ka + (k-1)r + k - 1\}$$

هریک با $a+1$ عنصر است. می توانیم نشان

دهیم که اگر x هر عنصر مجموعه W باشد،

آن گاه $x + \frac{m}{2}$ یک عنصر مجموعه A است.

از اینرو W مجموعه مولفه های $G_n^m - A$ است.

$$\omega(G_n^m - A) = k \quad \text{و} \quad \tau(G_n^m) = a + 1, |A| = kr$$

این رو :

$$\frac{|A| + \tau(G_n^m - A)}{\omega(G_n^m - A)} = \frac{kr + a + 1}{k} = r + \frac{1+a}{k}$$

بنابراین وقتی S مضربی از k و k فرد باشد،

$$T(G_n^m) = r + \frac{1+a}{k} \quad \text{آن گاه}$$

اکنون حالت‌هایی را در نظر می‌گیریم که $s > k$ باشد.

لم ۵: گیریم G_n^m با $n = 2r + 1$ ، m زوج،

$$0 < s < r + 1, k \text{ فرد و } s > k. \text{ بنویسید } S =$$

$$ak + b, \text{ برای } 0 < b < k.$$

حالت ۱: اگر r زوج باشد آن گاه

اگر a فرد باشد، $r \geq 6$ و

اگر a زوج باشد، $r \geq 8$.

حالت ۲: اگر r فرد باشد آن گاه

اگر a فرد باشد، $r \geq 5$ و

اگر a زوج باشد، $r \geq 9$.

برهان: حالت ۱: گیریم $S = ak + b$ برای

a و b ی باشد. چون r زوج است، آن

گاه S فرد است.

(i) a فرد باشد، آن گاه b فرد است. لذا

مقدار مینیمم برای b برابر ۲ است. چون a

و k فرد هستند و $b < k$ ، آن گاه مقادیر

$$r + 2c \geq ak + 2c > a + 1, \text{ پس } 2c - a \geq 1 - r$$

لذا:

$$(x + \frac{m}{2}) \in A \quad \text{و} \quad 1 - r \leq 2c - a \leq r - 1$$

بنابراین ثابت کردیم که هر عنصر مجموعه

W ، دارای یک عنصر مجاور در مجموعه

برشی A است. از اینرو

$$\omega(G_n^m - A) = k \quad \text{و} \quad \tau(G_n^m - A) = a + 1, |A| = rk$$

حالت ۲: k زوج است، $k = 2q$.

$$\text{از اینرو } m = 2q(r + 1) + s = 2q(r + 1 + a)$$

$$\text{و } \frac{m}{2} = q(r + 1 + a).$$

$$\text{لذا } x + \frac{m}{2} = (p + q)a + (p + q)r + (p + q) + c$$

چون $c \leq a$ ، $x + \frac{m}{2}$ مولفه دیگری است، لذا

در مولفه W ، A یک مجموعه برشی

نیست. بنابراین A مجموعه برشی G_n^m با kr

عنصر است اگر و تنها اگر k فرد باشد.

قضیه ۵: اگر G_n^m با $n = 2r + 1$ ، m زوج

$$, 0 < s < r + 1, k \text{ فرد و } S = ak \text{ باشد، در}$$

این صورت:

$$T(G_n^m) = r + \frac{1+a}{k}$$

برهان: به وسیله قضیه ۳ داریم

$$r + \frac{1+a}{k} \leq T(G_n^m)$$

کران پایین را به دست می‌دهد، زیرا

است. چون r فرد و $s < r+1$ ، آن گاه $r \geq 9$.
لم ۶: گیریم G_n^m با $n=2r+1$ ، m زوج،
 $s = ak+b$ و $0 < s < r+1$ فرد باشد. اگر
 برای $0 < b < k$ ، آنگاه $a+1 < \frac{r}{2}$.

برهان: حالت ۱: r زوج است، پس S فرد است.

(i) زوج a است. لذا b فرد است. از اینرو مقدار مینیمم برای b برابر ۱ است. چون $b < k$ و k فرد است، آن گاه مقدار مینیمم برای k برابر ۳ است. لذا $3a+1 \leq ak+b=s$.

چون a زوج است، $2a+2 < 3a+1$. لذا $2a+2 < s < r$. بنابراین $a+1 < \frac{r}{2}$.

(ii) فرد a است. لذا b زوج است. از اینرو مقادیر مینیمم برای b و k به ترتیب برابر ۲ و ۳ هستند. پس $3a+2 \leq ak+b=s$. چون $2a+2 < 3a+2$ ، آن گاه $2a+2 < s < r$. بنابراین $a+1 < \frac{r}{2}$.

حالت ۲: r فرد است. در این صورت S زوج است.

(i) زوج a است. لذا b زوج است و مقدار مینیمم برای b برابر ۲ است و چون k فرد است و $b < k$ ، آن گاه مقدار مینیمم برای k برابر ۳ است. لذا $3a+2 \leq ak+b=s$. چون

مینیمم برای k و a به ترتیب برابر ۳ و ۱ هستند. بنابراین مقدار مینیمم برای S برابر $s=1(3)+2=5$. چون r زوج است و $S < r+1$ ، آن گاه $r \geq 6$.

(ii) a زوج است. لذا b فرد بوده و مقدار مینیمم برای b برابر ۱ است. چون a زوج و k فرد است و $b < k$ ، آن گاه مقادیر مینیمم برای k و a به ترتیب برابر ۳ و ۲ هستند. بنابراین مقدار مینیمم برای S برابر $s=2(3)+1=7$. چون r زوج و $s < r+1$ ، آن گاه $r \geq 8$.

حالت ۲: r فرد باشد، آن گاه S زوج است.
 (i) فرد a باشد، از اینرو b فرد است. لذا مقدار مینیمم برای b برابر ۱ است. چون a و k فردند و $b < k$ ، آن گاه مقادیر مینیمم برای k و a به ترتیب برابر ۳ و ۱ هستند. بنابراین مقدار مینیمم برای S برابر $s=1(3)+1=4$. چون r فرد است و $S < r+1$ ، آن گاه $r \geq 5$.

(ii) زوج a است. در این صورت b زوج است. لذا مقدار b برابر ۲ است. چون a زوج است و k فرد و $b < k$ ، آن گاه مقادیر مینیمم برای a و k به ترتیب برابر ۲ و ۳ هستند. بنابراین مقدار مینیمم برای S برابر $s=2(3)+2=8$.

اگر r زوج، a فرد یا اگر r فرد، a زوج باشند، آن گاه b زوج است. بنابراین $b=2h$. چون k فرد است، $k=2q+1$. از اینرو

$$q \geq h, k - b = 2q + 1 + 2h \geq 1$$

مجموعه های زیر را انتخاب کنید:

$$\omega_0 = \{m - a, \dots, 0\}$$

$$D = \{1, 2, \dots, \frac{m}{2} - \frac{r}{2} - \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\} =$$

$$\{1, 2, \dots, qr + (q-1)a + q + h + a\}$$

$$F = \{\frac{m}{2} + \frac{r}{2} - \frac{a}{2} + \frac{1}{2}, \dots, m - a - 1\} =$$

$$\{\frac{m}{2} + \frac{r}{2} - \frac{a}{2} + \frac{1}{2}, \dots, \frac{m}{2} + \frac{r}{2} + (q - \frac{1}{2})(a + 1) +$$

$$qr + h\}$$

از اینرو $|D|=|F|$. مجموعه های زیر را در

نظر می گیریم:

$$A = C \cup \{\frac{m}{2} - \frac{r}{2} - \frac{a}{2} - \frac{1}{2}, \dots, \frac{m}{2}, \dots, \frac{m}{2} + \frac{r}{2} - \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\} \cup Y$$

به طوری که C اجتماع مجموعه های زیر

است:

$$\{1, 2, \dots, r\}, \{r + a + 3, \dots, 2r + a + 2\}, \dots, \{(h-1)r + (h-1)a$$

$$+ 2h - 1, \dots, hr + (h-1)a + 2h - 2\}, \{hr + ha +$$

$$2h + 1, \dots, (h+1)r + ha + 2h\}, \dots, \{(h+1)r + (h+1)$$

$$a + 2h + 2, \dots, (h+2)r + (h+1)a + 2h + 1\}, \dots,$$

$$\{(q-1)r + (q-1)a + q + h, \dots, qr + (q-1)a + q + h - 1\}$$

که در آن $Y = Y_1 \cup Y_2$ و

$$Y_1 = \cup \{\frac{m}{2} + \frac{r}{2} + (c - \frac{1}{2})(a + 1) + (c - 1)r + c + 1, \dots,$$

$$\frac{m}{2} + \frac{r}{2} + (c - \frac{1}{2})(a + 1) + cr + c\} | 1 \leq c \leq h\},$$

$$Y_2 = \cup \{\frac{m}{2} + \frac{r}{2} + (j - \frac{1}{2})(a + 1) + (j - 1)r + h + 1, \dots,$$

$$\frac{m}{2} + \frac{r}{2} + (j - \frac{1}{2})(a + 1) + jr + h\} | h + 1 \leq j \leq q\},$$

$2a + 2 < 3a + 2$ ، آن گاه $2a + 2 \leq s < r$.

بنابراین $a + 1 < \frac{r}{2}$.

(ii) فرد است. پس b فرد است و مقدار مینیمم برای b برابر ۱ است. چون k فرد

است و $b < k$ ، آن گاه مقدار مینیمم برای k

برابر ۳ است. لذا $3a + 1 \leq ak + b = s$. چون

$2a + 2 \leq 3a + 1 \leq ak + b = s < r$ ، آن گاه

$a + 1 < \frac{r}{2}$.

اگر m مضربی از k نباشد، در این صورت داریم:

لم ۷: گیریم G_n^m با $n = 2r + 1$ ، m زوج،

$0 < s < r + 1$ ، k فرد و $s > k$ ، که در آن $s =$

$ak + b$ باشد. در این صورت یک مجموعه

برشی A با kr عنصر وجود دارد به طوریکه

تعداد مولفه ها برابر با k با $\omega(G_n^m - A) = k$ ، و

مرتبه بزرگترین مولفه برابر $\tau(G_n^m) = a + 2$

است.

برهان: گیریم $s = ak + b$ ، $s > k$ ، برای

لذا $0 < b < k$.

$m = kr + (k - b)(a + 1) + b(a + 2)$ بنویسید

$m = k(r + 1) + s$. اگر r زوج باشد، آن گاه S

فرد است. اگر a فرد باشد، آن گاه b زوج

است. اگر r فرد باشد، آن گاه S زوج است.

اگر a زوج باشد، آن گاه b زوج است. لذا

به وسیله لم ۵، $r \geq 6$ و به وسیله لم ۶،

$$a+1 < \frac{r}{2} \text{ و } g \leq a \text{ در این صورت:}$$

$$\frac{r}{2} + g - \frac{a+1}{2} > \frac{r}{2} + g - \frac{r}{4} = \frac{r}{4} + g > 1$$

$$\frac{r}{2} + g - \frac{a+1}{2} \leq \frac{r}{2} + a + 1 - \frac{a+1}{2} = \frac{r}{2} + \frac{a+1}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{4} = \frac{3r}{4} < r$$

اکنون فرض کنید X یک عنصر مجموعه ای

با $a+1$ راس در W باشد. لذا X به صورت

:

$$x = dr + (d-1)a + d + h + 1$$

$$h+1 \leq d \leq q \text{ و } \ell \leq a \text{ از اینرو:}$$

$$x + \frac{m}{2} = \frac{m}{2} + r + (d - \frac{1}{2})(a+1) + (d-1)r$$

$$+ h + \ell + \frac{a+1}{2} - a \in Y_2$$

به شرطی که

$$\frac{r}{2} + 1 \leq r + \ell + \frac{a+1}{2} - a \leq \frac{r}{2} + r$$

به طور هم ارزی

$$1 \leq \frac{r}{2} + \ell + \frac{a+1}{2} - a \leq r$$

به وسیله لم ۵، $r \geq 6$ و به وسیله لم ۶،

$$a+1 < \frac{r}{2} \text{ و } \ell \leq a \text{ در این صورت}$$

$$\frac{r}{2} + \ell + \frac{a+1}{2} - a \geq \frac{r}{2} + \ell \frac{a+1}{2} + (1 - \frac{r}{2}) = \ell + 1 + \frac{a+1}{2} > 1$$

و

$$\frac{r}{2} + \ell + \frac{a+1}{2} - a \leq \frac{r}{2} + a + \frac{a+1}{2} - a < \frac{r}{2} + \frac{r}{4} = \frac{3r}{4} < r$$

لذا

$$\frac{r}{2} + \ell \leq r + \ell + \frac{a+1}{2} - a \leq \frac{r}{2} + r$$

و

$$x + \frac{m}{2} \in Y$$

لذا C زیر مجموعه D و مجموعه برشی Y

زیر مجموعه F است. اکنون $W = D - C$ را

در نظر بگیرید. پس اجتماع مجموعه

های زیر است:

$$\{r+1, \dots, r+a+2\}, \{2r+a+3, \dots, 2r+2a+4\}, \dots, \\ \{hr + (h-1)a + 2h - 1, \dots, hr + ha + 2h\}, \{(h+1)r + ha + 2h + 1, \dots, (h+1)r + (h+1)a + 2h + 1\}, \dots, \\ \{qr + (q-1)a + q + h, \dots, qr + qa + q + h\}$$

W اجتماع h مولفه $a+2$ عنصر و $q-h$

مولفه با $a+1$ عنصر است. مجموعه هایی

با $a+2$ عنصر به صورت زیر هستند:

$$\{Lr + (L-1)a + 2L - 1, \dots, Lr + La + 2L\}$$

که در آن $1 \leq L \leq h$.

مجموعه ها با $a+1$ عنصر به صورت زیر

هستند:

$$\{fr + (f-1)a + f + h, \dots, fr + fa + f + h\}$$

که در آن $h+1 \leq f \leq q$.

می خواهیم ثابت کنیم که اگر $x \in W$ ، آن گاه

$$x + \frac{m}{2} \in Y \text{ . گیریم } x \in W \text{ . اگر } X$$

مجموعه ای با $a+2$ عنصر باشد، آن گاه X

به صورت

$$x + pr + (p-1)a + 2p - 1 + g$$

$$g \leq a+1 \text{ و } 1 \leq p \leq h$$

$$x + \frac{m}{2} = \frac{m}{2} + r + (p - \frac{1}{2})(a+1) + (p-1)r + p + g - \frac{a+1}{2} \in Y_1$$

به شرطی که $\frac{r}{2} + 1 \leq r + g - \frac{a+1}{2} \leq \frac{r}{2} + r$ ، به

$$\text{طور هم ارزی } 1 \leq \frac{r}{2} + g - \frac{a+1}{2} \leq r$$

بنابراین $k-b=2t$ زوج است. برای این مجموعه های زیر را انتخاب کنید:

$$\omega_0 = \{m - (a+1), \dots, 0\}$$

$$D = \{1, 2, \dots, \frac{m}{2} - \frac{r}{2} - \frac{a}{2} - 1\} =$$

$$\{1, 2, \dots, qr + qa + 2q - t\}$$

$$F = \{\frac{m}{2} + \frac{r}{2} - \frac{a}{2}, \dots, m - a - 2\} =$$

$$\{\frac{m}{2} + \frac{r}{2} - \frac{a}{2}, \dots, \frac{m}{2} + \frac{r}{2} + qr + (q - \frac{1}{2})a$$

$$+ 2q - t - 1\}$$

از اینرو $|D|=|F|$. مجموعه برشی زیر را در نظر بگیرید:

$$A = C \cup \{\frac{m}{2} - \frac{r}{2} - \frac{a}{2}, \dots, \frac{m}{2} + \frac{r}{2} - \frac{a}{2} - 1\} \cup Y$$

به طوری که C اجتماع مجموعه های زیر است:

$$\{1, 2, \dots, r\}, \{r+a+2, \dots, 2r+a+1\}, \dots,$$

$$\{tr+ta+t+1, \dots, (t+1)r+ta+t\}, \{(t+1)r$$

$$+ (t+1)a + t + 3, \dots, (t+2)r + (t+1)a$$

$$+ t + 2\}, \dots, \{(q-1)r + (q-1)a + 2q - t - 1, \dots,$$

$$qr + (q-1)a + 2q - t - 2\}$$

و $Y = Y_1 \cup Y_2$ که در آن

$$Y_1 = \cup \{\frac{m}{2} + \frac{r}{2} + (u-1)r + (u - \frac{1}{2})a + u, \dots,$$

$$\frac{m}{2} + \frac{r}{2} + ur + (u - \frac{1}{2})a + u - 1\} | 1 \leq u \leq t\},$$

$$Y_2 = \cup \{\frac{m}{2} + \frac{r}{2} + (v-1)r + (v - \frac{1}{2})a + 2v - t, \dots,$$

$$\frac{m}{2} + \frac{r}{2} + vr + (v - \frac{1}{2})a + 2v - t - 1\} | t+1 \leq v \leq q\},$$

لذا C زیر مجموعه D و Y زیر مجموعه F است. اکنون $W=D-C$ را در نظر بگیرید.

پس W اجتماع مجموعه های زیر است:

$$\{r+1, \dots, r+a+1\}, \{2r+a+2, \dots, 2r+2a+2\}, \dots,$$

$$\{tr+(t-1)a+t, \dots, tr+ta+t\}, \{(t+1)r$$

$$+ ta+t+1, \dots, (t+1)r+(t+1)a+t+2\}, \dots,$$

$$qr+(q-1)a+2q-t-1, \dots, qr+qa+2q-t\}$$

بنابراین هر عنصر در مولفه مجموعه W

دارای یک عنصر مجاور در مجموعه برشی

Y است. اکنون مجموعه زیر را در نظر

بگیرید:

$$H = \{\frac{m}{2} - \frac{r}{2} - \frac{a}{2} + \frac{1}{2}, \dots, \frac{m}{2}\}$$

عنصر 0 در ω_0 دارای یک راس مجاور در

H است، زیرا $0 + \frac{m}{2} = \frac{m}{2} \in H$. چون

$|a+1| = a+1$ و به وسیله لم ۶، $a+1 < \frac{r}{2}$ ، آن

گاه $|a+1| < |H|$. در این صورت عنصرها در

مولفه ω_0 دارای عنصر مجاور در H هستند.

$$H \subseteq \{\frac{m}{2} - \frac{r}{2} - \frac{a}{2} + \frac{1}{2}, \dots, \frac{m}{2}, \dots, \frac{m}{2} + \frac{r}{2} - \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\} \in A$$

بنابراین تعداد عنصرهای مجموعه برشی A

برابر است با rk و $\tau(G_n^m - A) = a+2$ و

$$\omega(G_n^m - A) = k$$

اگر r زوج باشد، آن گاه s فرد است. اگر

$k-b$ زوج باشد، آن گاه b فرد است. از اینرو

زوج است. اگر r فرد باشد، آن گاه s زوج

است. اگر a فرد باشد، آن گاه b فرد است.

از اینرو $k-b$ زوج است. لذا اگر r زوج و

زوج یا اگر r فرد و a فرد باشند، آن گاه $k-$

اکنون فرض کنید X یک عنصر مجموعه با $a+2$ راس در W است. پس X به صورت $x = dr + (d-1)a + 2d - t - 1 + \ell'$ است که در

آن از اینرو: $t+1 \leq d \leq q$ و $\ell' \leq a+1$.

$$x + \frac{m}{2} = \left[\frac{m}{2} + r + (d-1)r + (d-1)a + 2d - t - \frac{a}{2} - 1 + \ell' \right] \in Y_2$$

به شرطی که $\frac{r}{2} \leq r + \ell' - \frac{a}{2} - 1 \leq \frac{r}{2} + r - 1$ ، به طور هم ارزی $0 \leq \frac{r}{2} + \ell' - \frac{a}{2} - 1 \leq r - 1$. به وسیله لم ۵، $r \geq 5$ و به وسیله لم ۶،

$a+1 < \frac{r}{2}$ و $\ell' \leq a+1$. در این صورت

$$\frac{r}{2} + \ell' - \frac{a}{2} - 1 > \frac{r}{2} + \ell' + \frac{1}{2} - \frac{r}{4} - 1 = \frac{r}{4} + \ell' - \frac{1}{2} \geq 0$$

و

$$\frac{r}{2} + \ell' - \frac{a}{2} - 1 < \frac{r}{2} + a + 1 - \frac{a}{2} - 1 =$$

$$\frac{r}{2} + \frac{a}{2} \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3r}{4} - \frac{1}{2} < r - 1$$

لذا $x + \frac{m}{2} \in Y$. بنابراین هر عنصر در مولفه

مجموعه W دارای یک عنصر مجاور در

مجموعه برشی Y است.

$$H = \left\{ \frac{m}{2} - \frac{r}{2} - \frac{a}{2}, \dots, \frac{m}{2} \right\}$$

عنصر 0 در ω_0 دارای یک راس مجاور در

H است، زیرا $0 + \frac{m}{2} = \frac{m}{2} \in H$. چون

$|\omega_0| = a+2$ و به وسیله لم ۶، $a+1 < \frac{r}{2}$ ، آن

گاه:

$$|\omega_0| = a+2 \leq \frac{r}{2} + \frac{a}{2} + 1 = |H|$$

لذا عنصرها در مولفه ω_0 دارای عنصر

مجاور در H هستند،

W اجتماع t مولفه با $a+1$ عنصر و $q-t$

مولفه با $a+2$ عنصر است. مجموعه های با

$a+1$ عنصر به صورت زیر هستند:

$$\{zr + (z-1)a + z, \dots, zr + za + z\}$$

که در آن $1 \leq z \leq t$

مجموعه های با $a+2$ عنصر به صورت زیر

هستند:

$$\{wr + (w-1)a + 2w - t - 1, \dots, wr + wa + 2w - t\}$$

که در آن $t+1 \leq w \leq q$

می خواهیم ثابت کنیم که اگر $x \in W$ ، آن

گاه $x + \frac{m}{2} \in Y$. بگیریم $x \in W$. اگر X در

مجموعه ای با $a+1$ عنصر باشد، آن گاه X

بصورت زیر است:

$$x = pr + (p-1)a + p + g' \quad \text{که در آن } 1 \leq p \leq t$$

از اینرو: $g' \leq a$

$$x + \frac{m}{2} = \frac{m}{2} + r + (p-1)r + (p-1)a + p + g' - \frac{a}{2} \in Y_1$$

به شرطی که $\frac{r}{2} \leq r + g' - \frac{a}{2} \leq \frac{r}{2} + r - 1$ ، به طور

هم ارزی $0 \leq \frac{r}{2} + g' - \frac{a}{2} \leq r - 1$.

به وسیله لم ۵، $r \geq 5$ و بوسیله لم ۶،

$a+1 < \frac{r}{2}$ و $g' \leq a$. در این صورت:

$$\frac{r}{2} + g' - \frac{a}{2} > \frac{r}{2} + g' + \frac{1}{2} - \frac{r}{4} = \frac{r}{4} + g' + \frac{1}{2} > 0$$

و

$$\frac{r}{2} + g' - \frac{a}{2} \leq \frac{r}{2} + a - \frac{a}{2} =$$

$$\frac{r}{2} + \frac{a}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3r}{4} - \frac{1}{2} < r - 1$$

برهان: از لم ۷، A مجموعه برشی G_n^m با kr عنصر است. تعداد مولفه ها برابر k است و بزرگترین مولفه $G_n^m - A$ ، دارای تعداد عنصرهای $a+2$ است. لذا

$$\frac{|A| + \tau(G_n^m - A)}{\omega(G_n^m - A)} = \frac{kr + a + 2}{k} = r + \frac{a + 2}{k}$$

به وسیله قضیه ۳، داریم

$$r + \frac{1 + \left\lceil \frac{s}{k} \right\rceil}{k} \leq T(G_n^m)$$

چون $s = ak + b$ برای

$$\left\lceil \frac{s}{k} \right\rceil = a + 1, \quad 0 < b < k$$

از اینرو

$$r + \frac{2 + a}{k} \leq T(G_n^m)$$

بنابراین

$$T(G_n^m) = r + \frac{a + 2}{k}$$

$$H \subseteq \left\{ \frac{m}{2} - \frac{r}{2} - \frac{a}{2}, \dots, \frac{m}{2}, \dots, \frac{m}{2} + \frac{r}{2} - \frac{a}{2} - 1 \right\} \in A$$

بنابراین تعداد عنصرهای مجموعه برشی A برابر است با rk و $\tau(G_n^m - A) = a + 2$ و $\omega(G_n^m - A) = k$.

اکنون می توانیم به طور دقیق همبستگی گراف G_n^m را تعیین کنیم.

قضیه ۷: گیریم G_n^m با $n = 2r + 1$ ، m زوج k ، فرد، $0 < s < r + 1$ و $s > k$ ، که در آن $s = ak + b$ برای a و b ، آن گاه

$$T(G_n^m) = r + \frac{a + 2}{k}$$

مراجع

- 1 – Bundy, J. A. and Murty, U. S. R. (1976). *Graph theory with applications*, The Macmillan Press Ltd.
- 2 – Cozzens, M. B., Moazzami, D. and Stueckle, S. (1995). "The tenacity of a graph." *Graph Theory, Combinatorics, and Algorithms*, Yousef Alavi and Allen Schwenk eds. Willey, New York, PP. 1111-1122.
- 3 – Harary, F. (1962). "The maximum connectivity of a graph." *Proc. Nat. Acad. Sci., USA*, Vol. 48, PP. 1142-1146.

-
- 4 – Moazzani, D. (1995). "The NSM of a graph." *Combinatorics Advances*, C. J. Colbourn and E. S. Mahmoodian, eds., Kluwer, PP. 243-250.
 - 5 – Moazzami, D. (1999). "Vulnerability in Graphs – a Comparative Survey." *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, Vol. 30, PP. 23-31.
 - 6 - Moazzani, D. *On the vulnerability parameters of networkks*, submitted.
 - 7 - Moazzani, D. "Stability measure of a graph – a survey." *Utilitas Mathematica* 57, PP. 171-191.
 - 8- Moazzani, D. (2001). "On networks with maximum graphical structure, tenacity T." *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, Vol. 39.
 - 9 - Moazzani, D. (1999). "A note on Hamiltonian properties of tenacity," *Proceeding of the International Conference, Paul Erdos and his mathematics*, Budapest, July 4-11, PP. 174-178.
-