



پایداری مجانبی اپراتورهای فوق کروی

غلامرضا شهريار حشمتی

استادیار گروه علوم پایه مهندسی - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۱/۷/۱۰، تاریخ تصویب ۸۱/۱۱/۱۵)

چکیده

اپراتورهای فوق کروی برای اندازه $d\mu_\alpha(x) = (1-x^2)^\alpha dx$ تشکیل یک سیستم متعامد بر بازه $[-1, 1]$ می دهند. برای $\frac{1}{4} < \alpha$ ، فرمول ضرب گنبنائز^۲ نشان می دهد که هسته گنبنائز تصادفی است. در این مقاله با در نظر گرفتن این هسته یک اپراتور مارکف^۳ $P_{\alpha x}$ تعریف می شود و با استفاده از خواص اپراتورهای مارکف پایداری مجانبی آن به ازای $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq 0$ ثابت می گردد. سپس این نتیجه با استفاده از تکنیک های آنالیز هارمونیک^۴ برای $\frac{1}{4} \leq \alpha$ تعمیم می یابد.

واژه های کلیدی: اپراتورهای مارکف، پایداری مجانبی، چند جمله ای های فوق کروی، هسته گنبنائز

مقدمه

اولین بار آنالیز هارمونیک در مورد چند جمله ای های فوق کروی توسط هیرشمن^۵ [۴] بررسی شد. بسیاری دیگر از خواص این چند جمله ای ها توسط گاسپر^۶ [۳، ۲] به اثبات رسیده است. در مورد پایداری مجانبی اپراتورهای مارکف می توان به [۷] رجوع کرد.

فرض کنیم (Ω, A, μ) یک فضای اندازه و $D = \{f \in L^1(\Omega, d\mu) \mid f \geq 0, \|f\|_1 = 1\}$ فضای چگالی های آن باشد. هر اپراتور خطی $P: L^1 \rightarrow L^1$ که در دو شرط زیر صدق کند یک اپراتور مارکف نامیده می شود.

الف) $Pf \geq 0$ برای هر $f \in L^1$ و $f \geq 0$

ب) $\|Pf\|_1 = \|f\|_1$ برای هر $f \in L^1$ و $f \geq 0$

اگر P یک اپراتور مارکف باشد، $\{P^m\}$ بطور مجانبی پایدار نامیده می شود هرگاه یک چگالی $f^* \in D$ وجود داشته باشد به طوری که $Pf^* = f^*$ و

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P^m f - f^*\|_1 = 0 \quad \text{برای هر } f \in D \quad (1)$$

هر هسته تصادفی $K \in \mathcal{K}^V$ یعنی هر تابع اندازه پذیر

$k: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ که در دو شرط زیر

$$k(x, y) \geq 0$$

$$\int_{\Omega} k(x, y) d\mu(x) = 1$$

$$Pf(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y) d\mu(y), f \in L^1$$

صدق کند، با رابطه

یک اپراتور انتگرال تعریف می کند که یک اپراتور مارکف است (به [۶] یا [۷] رجوع شود).

در [۷] یک شرط کافی برای پایداری مجانبی $\{P^m\}$ بصورت زیر بیان شده است:

لم^۱. فرض کنیم P یک اپراتور مارکف و $k_m: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$

هسته تصادفی متناظر با P^m باشد، در این صورت، شرط

$$\int_{\Omega} \inf_{y \in \Omega} k_m(x, y) d\mu(x) > 0 \quad (2)$$

پایداری مجانبی $\{P^m\}$ را نتیجه می دهد.

در این مقاله، با در نظر گرفتن هسته گنبنائز یک اپراتور مارکف بصورت زیر تعریف می کنیم. فرض کنیم

$$Q_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n}{\gamma^n (\alpha+1) \dots (\alpha+n)}$$

$$(1-x^2)^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{\alpha+n}$$

چند جمله ای فوق کروی^۹ از مرتبه n و با اندیس $\alpha > -1$ باشد، لازم به ذکر است که این چند جمله ای ها به ازای $\alpha = -\frac{1}{4}$ چند جمله ای های چیبیچف^{۱۰} نوع اول:

$$G_{\alpha}(x,y,z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})\Gamma(\alpha+\frac{1}{\alpha})} \frac{(1-x^{\alpha}-y^{\alpha}-z^{\alpha}+\alpha xyz)^{\alpha-\frac{1}{\alpha}}}{(1-x^{\alpha})^{\alpha}(1-y^{\alpha})^{\alpha}(1-z^{\alpha})^{\alpha}}$$

که در آن f_+ قسمت مثبت f تابع است. بنابراین

$$G_{\alpha}(x,y,z) \geq 0.$$

با قرار دادن $n = 0$ در رابطه (۸) و استفاده از رابطه (۴) و تقارن G_{α} نسبت به x, y, z بدست می‌آید.

$\int_{-1}^1 G_{\alpha}(x,y,z) d\mu_{\alpha}(y) = 1$
 که نشان می‌دهد که G_{α} یک هسته تصادفی است.
 بنابراین می‌توان اپراتور مارکف وابسته به G_{α} را که اپراتور فوق کروی نام دارد به صورت زیر تعریف کرد:

$$[P_{\alpha,x}f](y) = \int_{-1}^1 G_{\alpha}(x,y,z)f(z)d\mu_{\alpha}(z)$$

$$\forall f \in L^1(I, d\mu_{\alpha}).$$

تقارن G_{α} نسبت به x, y, z نتیجه می‌دهد.

$$[P_{\alpha,x}f](y) = [P_{\alpha,y}f](x)$$

و

$$\langle P_{\alpha,x}f, g \rangle = \langle f, P_{\alpha,y}g \rangle$$

(۹)

رابطه اخیر نشان می‌دهد که $P_{\alpha,x}$ در $L^1(d\mu_{\alpha})$ یک اپراتور خود الحاقی است. هدف اصلی این مقاله، اثبات قضیه زیر است.

قضیه ۱

برای هر $\alpha > -\frac{1}{\alpha}$ و هر $|x| < 1$ ، $\{P_{\alpha,x}^n\}$ بطور مجانبی پایدار است و چگالی حدی آن برابر است با ω_{α}^1 که در آن 1 تابع ثابت $1(x) = 1$ می‌باشد.

ابتدا با استفاده از لم ۱ این قضیه را به ازای $\alpha \in [0, \frac{1}{\alpha}]$ ثابت کرده و سپس با استفاده از یک حاصلضرب تعمیم یافته در $L^1(d\mu_{\alpha})$ و جبر A_{α} قضیه را برای هر $\alpha > -\frac{1}{\alpha}$ تعمیم می‌دهیم.

با

$$Q_n^{-\frac{1}{\alpha}}(\cos\theta) = \cos n\theta$$

به ازای $\alpha = 0$ ، چند جمله‌های لژاندر^[۱]

$$Q_n^{\alpha}(x) = P_n(x)$$

و به ازای $\alpha = \frac{1}{\alpha}$ ، چند جمله‌ای های چیبیچف نوع دوم می‌باشند.

$$Q_n^{\frac{1}{\alpha}}(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{(n+1)\sin\theta}$$

این چند جمله‌ای‌ها روی بازه $I = (-1, 1)$ و برای اندازه $d\mu_{\alpha}(x) = (1-x^{\alpha})^{\alpha} dx$ با رابطه

$$\int_{-1}^1 Q_m^{\alpha}(x) Q_n^{\alpha}(x) d\mu_{\alpha}(x) =$$

$$\begin{cases} 0, & n \neq m \\ (\omega_n^{\alpha})^{-1}, & n = m \end{cases}$$

که در آن

$$\omega_n^{\alpha} = \frac{(\alpha n + \alpha + 1) \Gamma(n + \alpha + 1)}{\alpha^{\alpha n + 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(n + 1)}$$

یک دستگاه متعامد تشکیل می‌دهند (به [۱] رجوع شود).

این چند جمله‌ای‌ها دارای خواص زیراند [۱].

$$Q_n^{\alpha}(1) = 1$$

(۳)

$$Q_n^{\alpha}(x) = 1, Q_1^{\alpha}(x) = x$$

(۴)

$$Q_n^{\alpha}(-x) = (-1)^n Q_n^{\alpha}(x)$$

(۵)

$$n \geq 1 \text{ و } |x| < 1, \alpha > -\frac{1}{\alpha} \text{ اگر } |Q_n^{\alpha}(x)| < 1$$

(۶)

$$(n \geq 1) Q_1^{\alpha}(x) Q_n^{\alpha}(x) = \frac{n}{\alpha n + \alpha + 1} Q_{n-1}^{\alpha}(x)$$

$$+ \frac{n + \alpha + 1}{\alpha n + \alpha + 1} Q_{n+1}^{\alpha}(x).$$

(۷)

برای $\alpha > -\frac{1}{\alpha}$ ، فرمول گگنباثر برقرار است [۲]، [۳].

$$(-1 < x, y < 1) Q_n^{\alpha}(x) Q_n^{\alpha}(y) =$$

$$\int_{-1}^1 G_{\alpha}(x,y,z) Q_n^{\alpha}(z) d\mu_{\alpha}(z)$$

(۸)

لم ۲. $([۲], [۳])$.

الف) $L^1(d\mu_\alpha)$ با حاصلضرب * یک جبر باناخ^{۱۵} جابجائی نیمه ساده^{۱۶} است.

ب) فرض کنیم $1 \leq p, q, r \leq \infty$ و $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ ، اگر

$f \in L^p(d\mu_\alpha)$ و $g \in L^q(d\mu_\alpha)$ ، آن گاه $f * g \in L^r(d\mu_\alpha)$ داریم:

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

برای هر $f \in L^1(d\mu_\alpha)$ ، ضرب فوریه تعمیم یافته \hat{f} را با رابطه

$$\hat{f}(n) = \omega_n^\alpha \int_1^\infty f Q_n^\alpha d\mu_\alpha$$

تعریف می کنیم.

لم ۳. برای هر $f, g \in L^1(d\mu_\alpha)$ داریم

$$\widehat{f * g}(n) = (\omega_n^\alpha)^{-1} \hat{f}(n) \hat{g}(n)$$

اثبات

این لم از رابطه

$$\widehat{f * g}(n) = \omega_n^\alpha \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x)g(y) d\mu_\alpha(x)$$

$$d\mu_\alpha(y) \int_{-1}^1 G_\alpha(x, y, z) Q_n^\alpha(z) d\mu_\alpha(z)$$

و رابطه (۸) نتیجه می شود.

حال فرض کنیم A_α جبر توابع f پیوسته روی بازه

I ، به صورت

$$f = \sum_{n \geq 0} \hat{f}(n) Q_n^\alpha$$

باشد به طوری که $\sum_{n \geq 0} |\hat{f}(n)| < \infty$

لم ۴. A_α با نرم $\|\cdot\|_\alpha$ برای حاصلضرب ساده توابع یک جبر باناخ جابجائی است.

اثبات

کافی است ثابت کنیم

$$\|fg\|_\alpha \leq \|f\|_\alpha \|g\|_\alpha.$$

(۱۰)

اثبات قضیه ۱ به ازای $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{p}$

فرض کنیم $X_{x,y} C(-1, 1)$ تکیه گاه مثبت^{۱۳} تابع

$1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xyz$ باشد، یعنی،

$$\int G_\alpha(x, y, z) d\mu_\alpha(z) =$$

$$\int_{X_{x,y}} G_\alpha(x, y, z) d\mu_\alpha(z)$$

واضح است که برای هر x و y در $(-1, 1)$ ، $X_{x,y}$ دارای اندازه مثبت

است و $\alpha - \frac{1}{p} \geq 1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xyz$ برای هر $z \in X_{x,y}$ و هر $\alpha \in [0, \frac{1}{p}]$ بنابراین

$$\inf \{ G_\alpha(x, y, z) \mid 1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xyz > 0, z \in X_{x,y} \} \geq$$

$$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\frac{1}{p}) \Gamma(\alpha + \frac{1}{p})}, \forall \alpha \in [0, \frac{1}{p}]$$

رابطه اخیر نشان می دهد که لم ۱ به ازای $m = 1$ برقرار است و در

نتیجه $\{P_{\alpha,x}\}$ به ازای $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{p}$ بطور مجانبی پایدار می باشد.

حاصلضرب کانولوشن تعمیم یافته^{۱۴} در $L^1(d\mu_\alpha)$ و

جبر A_α

برای هر f و g در $L^1(d\mu_\alpha)$ ، حاصلضرب کانولوشن تعمیم

یافته f و g با رابطه زیر تعریف می شود.

$$(f * g)(x) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1$$

$$G_\alpha(x, y, z) f(y) g(z) d\mu_\alpha(y) d\mu_\alpha(z) =$$

$$\langle \bar{f}, P_{\alpha,x} g \rangle$$

شایان ذکر است که این حاصلضرب برای هر $\alpha \geq -\frac{1}{p}$ یک

حاصلضرب متمایزی است. لم های زیر نشان می دهند که این

حاصلضرب دارای شباهت زیادی با حاصلضرب کانولوشن معمولی

فضای L^1 است. در ادامه، نرم $f \in L^p(d\mu_\alpha)$ را با

$$\|f\|_p = \left[\int_{-1}^1 |f(x)|^p d\mu_\alpha(x) \right]^{\frac{1}{p}}$$

تعریف می کنیم:

برعکس اگر $g, h \in L^{\gamma}(d\mu_{\alpha})$ آنگاه $g^*h \in A_{\alpha}$ و

رابطه (۷) را می توان به صورت زیر

$$\|g^*h\|_{\alpha} \leq \|g\|_{\gamma} \|h\|_{\gamma} \quad (۱۴)$$

اثبات

برای هر $f \in A_{\alpha}$ ، تعریف می کنیم $\hat{g}(n) = \sqrt{\omega_n^{\alpha}} |\hat{f}(n)|$

$$\hat{h}(n) = \begin{cases} 0, & \hat{f}(n) = 0 \\ \sqrt{\omega_n^{\alpha}} \frac{\hat{f}(n)}{\sqrt{|\hat{f}(n)|}}, & \hat{f}(n) \neq 0 \end{cases}$$

$$h = \sum_{n \geq 0} \hat{h}(n) Q_n^{\alpha} \text{ و } g = \sum_{n \geq 0} \hat{g}(n) Q_n^{\alpha}$$

طبق لم ۳،

$$g^*h(n) =$$

$$(\omega_n^{\alpha})^{-1} \hat{g}(n) \hat{h}(n) = \hat{f}(n)$$

چون $\{\sqrt{\omega_n^{\alpha}} Q_n^{\alpha}\}_{n \geq 0}$ یک دستگاه متعامد کامل یک‌به‌یک^{۱۷} در $L^{\gamma}(d\mu_{\alpha})$ است و $\sum_{n \geq 0} |\hat{f}(n)| < \infty$ ، بدست می آید $f = g^*h$ و رابطه (۱۳) نیز از فرمول پارسوال^{۱۸} نتیجه می شود.

برعکس اگر $g, h \in L^{\gamma}(d\mu_{\alpha})$ ، با استفاده از نامساوی کشی - شوارتز، داریم

$$\sum_{n \geq 0} |g^*h(n)| = \sum_{n \geq 0} \left| \frac{1}{\omega_n^{\alpha}} \hat{g}(n) \hat{h}(n) \right| \leq \left(\sum_{n \geq 0} \left| \frac{1}{\omega_n^{\alpha}} \hat{g}(n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \geq 0} \left| \frac{1}{\omega_n^{\alpha}} \hat{h}(n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

که رابطه (۱۴) را نتیجه می دهد.

لم ۶. انژکسیون^{۱۹} A_{α} در $L^1(d\mu_{\alpha})$ پیوسته است و برای هر p ($1 \leq p < \infty$)، A_{α} در $L^p(d\mu_{\alpha})$ چگال می باشد.

اثبات

فرض کنیم $f = \sum_{n \geq 0} a_n Q_n^{\alpha}$ با $\sum_{n \geq 0} |a_n| < \infty$ چون $|Q_n^{\alpha}(x)| \leq 1$ برای هر x ، داریم

$$Q_m^{\alpha} Q_n^{\alpha} = \sum_r h_{m,n,r}^{\alpha} Q_r^{\alpha} \quad (۱۱)$$

نوشت که در آن γ روی مجموعه اعداد طبیعی به طوری که $h_{m,n,r}^{\alpha} \neq 0$ یعنی روی مجموعه اعداد طبیعی $|n-m| \leq r \leq n+m$ و $m+n+r$ زوج تغییر می کند. با محاسبه (۱۱) در نقطه $x=1$ بدست می آید:

$$\sum_r h_{n,m,r}^{\alpha} = 1 \quad (۱۲)$$

بنابراین اگر $\hat{f} = \sum_{n \geq 0} \hat{f}(n) Q_n^{\alpha}$ و $g = \sum_{n \geq 0} \hat{g}(n) Q_n^{\alpha}$ با استفاده از روابط تعامد بین Q_k^{α} و Q_r^{α} بدست می آید.

$$\hat{f}g(k) = \omega_k^{\alpha} \int \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \hat{f}(n) \hat{g}(m) Q_n^{\alpha}(x) Q_m^{\alpha}(x) Q_k^{\alpha}(x) d\mu_{\alpha}(x)$$

$$= \omega_k^{\alpha} \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \hat{f}(n) \hat{g}(m) \int \sum_r h_{n,m,r}^{\alpha} Q_r^{\alpha}(x) Q_k^{\alpha}(x) d\mu_{\alpha}(x)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} h_{n,m,k}^{\alpha} \hat{f}(n) \hat{g}(m)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} h_{n,m,k}^{\alpha} \hat{f}(n) \hat{g}(m)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} h_{n,m,k}^{\alpha} \hat{f}(n) \hat{g}(m)$$

بالاخره با استفاده از رابطه (۱۲) داریم:

$$\|fg\|_{\alpha} = \sum_{k \geq 0} |\hat{f}g(k)| = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} |\hat{f}(n) \hat{g}(m)| \left(\sum_{k \geq 0} h_{n,m,k}^{\alpha} \right)$$

$$\leq \left(\sum_{n \geq 0} |\hat{f}(n)| \right) \left(\sum_{m \geq 0} |\hat{g}(m)| \right)$$

$$\leq \left(\sum_{n \geq 0} |\hat{f}(n)| \right) \left(\sum_{m \geq 0} |\hat{g}(m)| \right)$$

که رابطه (۱۰) را نتیجه می دهد. از لم زیر در ادامه استفاده می شود.

لم ۵. برای هر $f \in A_{\alpha}$ ، توابع $g, h \in L^{\gamma}(d\mu_{\alpha})$ وجود دارند به طوری که $f = g^*h$ و به طوری که

$$\|f\|_{\alpha} = \|g\|_{\gamma}^{\gamma} = \|h\|_{\gamma}^{\gamma}$$

(۱۳)

طبق فرمول (۸) برای $f \in D$ ، داریم،

$$[P_{\alpha, x}^m f](y) = \sum_{n \geq 0} Q_n^\alpha(x)^m Q_n^\alpha(y) \hat{f}(n)$$

$$\hat{f}(0) = \omega_\alpha^\alpha \int_1 f d\mu_\alpha = \omega_\alpha^\alpha \quad , f \in D.$$

بنابراین، طبق روابط (۱۴) و (۱۵)،

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_{\alpha, x}^m f - \omega_\alpha^\alpha\|_{\alpha} \leq$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\omega_\alpha^\alpha)^{-1} \sum_{n \geq 1} |Q_n^\alpha(x)|^m |\hat{f}(n)| = 0.$$

در اینجا جای حد و سیگما را با استفاده از همگرایی مسلط^{۲۱} عوض کرده و از شرط آنکه به ازای هر $x \in I$ ، $\lim_{m \rightarrow \infty} |Q_n^\alpha(x)|^m = 0$ استفاده نموده ایم.

نتیجه گیری

یابداری مجانبی اپراتور فوق کروی که یک اپراتور مارکف می باشد به اثبات رسید.

تقدیر و تشکر

این مقاله تحقیقی، مستخرج از طرح پژوهشی ۶۱۱/۳/۶۹۴ با پشتیبانی مالی و معنوی دانشکده فنی دانشگاه تهران میسر گردید. لازم می دانم از دانشگاه تهران و دانشکده فنی بخاطر پشتیبانی بی دریغشان از امر پژوهش تشکر نمایم.

$$\|f\|_{\alpha} \leq \sum_{n \geq 0} |a_n| \int_T |Q_n^\alpha(x)| d\mu_\alpha(x) \leq$$

$$\frac{1}{\omega_\alpha^\alpha} \sum_{n \geq 0} |a_n| = \frac{1}{\omega_\alpha^\alpha} \|f\|_{\alpha}$$

(۱۵)

چگالی A_α در $L^p(d\mu_\alpha) \subset C^\infty(I) \subset A_\alpha$ از نتیجه می شود. لم ۷. اپراتور فوق کروی $P_{\alpha, x}$ جبر A_α را در خودش می نگارد و یک انقباض^{۲۰} این جبر است.

اثبات

از فرمول (۸) داریم:

$$P_{\alpha, x} \hat{f}(n) = \omega_\alpha^\alpha \int_1 \int_1 G_\alpha(x, y, z)$$

$$f(z) d\mu_\alpha(z) Q_n^\alpha(y) d\mu_\alpha(y)$$

$$= \omega_\alpha^\alpha \int_1 Q_n^\alpha(x) Q_n^\alpha(z) f(z) d\mu_\alpha(z) = Q_n^\alpha(x) \hat{f}(n)$$

بنابراین، طبق رابطه (۶)،

$$\|P_{\alpha, x} f\|_{\alpha} = \sum_{n \geq 0} |P_{\alpha, x} \hat{f}(n)| =$$

$$\sum_{n \geq 0} |Q_n^\alpha(x) \hat{f}(n)| \leq \sum_{n \geq 0} |\hat{f}(n)| = \|f\|_{\alpha}$$

اثبات قضیه ۱

فرض کنیم $D_\alpha = D \cap A_\alpha$ ، چون طبق لم ۶، A_α در $L^1(d\mu_\alpha)$ چگال است، D_α نیز در D چگال است. به علاوه چون $P_{\alpha, x}$ یک اپراتور مارکف و بنابراین یک انقباض L^1 است، کافی است شرط (۱) را برای تنها $f \in D_\alpha$ بررسی کنیم.

مراجع

- 1 - Erdelyi, A. (1953). *Higher transcendental functions*, Vol. 1, MacGraw Hill, New York.
- 2 - Gasper, G. (1971). "Positivity and the convolution structure for Jacobi series." *Ann. Math.*, 93, PP. 112-118.
- 3 - Gasper, G. (1972). "Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel." *Ann. Math.*, 95 PP. 261-280.
- 4 - Hirschman, Jr., I. I. (1956). "Harmonic analysis and the ultraspherical polynomials." *Symposium of the Conference on Harmonic Analysis (Cornell)*.
- 5 - Hirschman, Jr. (1956). *Sur les polynomes ultraspheriques*, C. R. Acad. Sci., Paris 242, PP. 2212-2214.
- 6 - Lasota, A. and Mackey, M. (1958). *Probabilistic properties of deterministic systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, London.

- 7 - Lasota, A. and Mackey, M. (1994). *Chaos, fractals and noise, stochastic aspects of dynamics*, Springer Verlag, Berlin, New York.
- 8 - Meyer-Nieberg, P. (1991). *Banach lattices*, Springer Verlag, New York, Berlin.
- 9 - Schaefer, H. (1974). *Banach lattices and positive operators*, Springer Verlag, New York Berlin.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 - Ultraspherical Operators
- 2 - Gegenbauer
- 3 - Markov
- 4 - Harmonic Analysis
- 5 - Hirschman
- 6 - Gasper
- 7 - Stochastic Kernel
- 8 - Lemma
- 9 - Ultraspherical Polynomial
- 10 - Tchebichef
- 11 - Legendre
- 12 - Positive Part
- 13 - Positive Support
- 14 - Generalized Convolution Product
- 15 - Banach
- 16 - Semisimple
- 17 - Complete Orthonormal System
- 18 - Parseval
- 19 - Injection
- 20 - Contraction
- 21 - Dominated Convergence