

تعیین ژئوئید محلی با استفاده از داده های مرزی حاصل از ثقل سنجی و ارتفاع سنجی ماهواره ای مطالعه خاص : ژئوئید دقیق ایران

عبدالرضا صفری

دانشیار گروه مهندسی نقشه برداری - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

علیرضا آزموه اردلان

استادیار گروه مهندسی نقشه برداری - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۲/۴/۴، تاریخ تصویب ۸۲/۱۱/۲۵)

چکیده

در این مقاله مسئله مرزی آبل-پواسن بیضوی با مقادیر مرزی از نوع شتاب ثقل (حاصل از ثقل سنجی) و ارتفاع سطح دریا (حاصل از ارتفاع سنجی ماهواره ای) به عنوان راه حلی به منظور تعیین ژئوئید دقیق ارائه گردیده است. این روش علاوه بر تضمین دقت بالا از نظر تئوری حاکم، مشکل تعیین ژئوئید دقیق در مناطق ساحلی را نیز حل نموده است. نکات برجسته متدولوژی ارائه شده به شرح ذیل می باشد: (۱) حذف اثرات توپوگرافی جهانی و جرمهای در فاصله دور از طریق بسط هارمونیک های بیضوی تا درجه و مرتبه 360/360 به همراه میدان گریز از مرکز بیضوی از مشاهدات ثقلی بر روی سطح زمین با استفاده از مختصات GPS نقاط. (۲) حذف اثرات جرمها در فاصله نزدیک از طریق حل تحلیلی انتگرال نیوتن در سیستم تصویر هم مساحت استوانه ای بیضوی مینا. (۳) تشکیل معادلات مربوط به انتقال به سمت پایین مشاهدات شتاب ثقل تصحیح شده طی مراحل ۲۱ از سطح زمین به پتانسیل جاذبه بر روی بیضوی مینا با استفاده از مختصات GPS نقاط. (۴) تبدیل مشاهدات ارتفاع سنجی ماهواره ای به ارتفاع ژئوئید از طریق اطلاعات مربوط به توپوگرافی سطح آب دریا. (۵) تشکیل معادلات مربوط به تبدیل ارتفاع ژئوئید از مرحله ۴ به پتانسیل جاذبه بر روی بیضوی مینا از طریق کاربرد فرمول برونز بیضوی. (۶) حل توأم معادلات مربوط به مراحل ۳ و ۴ به منظور تعیین پتانسیل جاذبه بر روی بیضوی مینا از طریق کمترین مربعات. (۷) بازگرداندن اثرات حذف شده به پتانسیل جزیی حاصل از مرحله ۶. (۸) تبدیل پتانسیل حاصل از مرحله ۷ به ارتفاع ژئوئید از طریق فرمول برونز بیضوی. برای آزمایش عددی متدولوژی ارائه شده ژئوئید دقیق ایران بر مبنای مشاهدات ثقلی و ارتفاع سنجی ماهواره ای تعیین و نتایج حاصل ارائه گردیده اند.

واژه های کلیدی: تعیین ژئوئید، انتگرال آبل-پواسن، فرمول برونز، تقریب بیضوی

مقدمه

تعریف مسائل مقدار مرزی برای محاسبه ژئوئید با ثابت فرض نمودن مرز بیرونی (زمین) را مهیا نموده است. بموازات مراحل ذکر شده فوق ژئودزین ها و ژئوفیزیکدان ها تلاش گسترده ای را برای بالابردن سطح دقت محاسبات ژئوئید و تعریف تئوری های سازگار با دقت های بالای GPS آغاز کرده اند. از جمله تلاش هایی که اخیراً در جهت محاسبه ژئوئید با دقت بالا صورت گرفته است می توان به کار های انجام شده توسط [۱۹-۲۸] اشاره نمود. اردلان و گرافارند [۱۶] روشی جدید برای محاسبه ژئوئید بر مبنای مشاهدات از نوع پتانسیل ثقل و شتاب ثقل ارائه نمودند که کاملاً مبتنی بر تقریب بیضوی است. این روش بر اساس حل مسئله مقدار دو مرزی با

در طی دهه گذشته جامعه ژئودزی شاهد پیشرفت های عظیمی در اندازه گیری شتاب ثقل با دقت های بالا در روی زمین و در فضای اطراف آن بوده است. امروزه دقت در حدود میکرو گال برای مشاهدات شتاب ثقل زمینی کاری عادی به حساب می آید. همچنین ماهواره های گراویمتری نظیر CHAMP, GOCE, GRACE حجم عظیمی از داده های ثقلی جهانی با کیفیت بالا را در اختیار جامعه ژئودزی قرار داده اند. بعنوان نمونه از تحقیقات انجام شده توسط جامعه ژئودزی دربارگیی اطلاعات ماهواره های CHAMP, GOCE, GRACE در سال ۲۰۰۲ می توان به مقالات [۱۵-۱] اشاره نمود. قابلیت دسترسی به GPS امکان

این سطح قاره ای زمین (خشکی ها) M_h^2 یک مرز ثابت را تشکیل میدهد. سطح دریا M_g^2 نیز بدلیل اینکه موقعیت نقاط آن توسط ارتفاع سنجی ماهواره ای تعیین میگردد یک مرز ثابت می باشد. مقدار پتانسیل بر روی ژئوئید M_g^2 بعنوان مرز آزاد (w_0) معلوم می باشد. تعریف مسئله مقدار دو مرزی با مرزهای ثابت و آزاد غیرخطی در جدول (۱) آورده شده است.

این مسئله یک مسئله مقدار مرزی غیر خطی و مایل^۴ می باشد. مسئله غیر خطی است چرا که ارتباط بین داده های شتاب ثقل و ارتفاع سنجی ماهواره ای با پتانسیل یک ارتباط غیر خطی می باشد و بعلاوه مسئله یک مسئله مایل است چرا که امتداد بردار شتاب ثقل بر سطح مرزی که همان سطح زمین می باشد عمود نمی باشد.

مسئله مقدار دو مرزی خطی با مرزهای ثابت و آزاد^۵

اپراتور مرزی برای مشاهدات قدرمطلق شتاب ثقل $\|\Gamma(x)\|_2 = \gamma$ یک اپراتور غیر خطی می باشد. در روابط ریاضی زیر فرم خطی شده آن تا مرتبه $O(\delta\Gamma^5)$ داده شده است برای جزئیات مربوط به خطی سازی این اپراتور به [۱۶] مراجعه شود.

$$\begin{aligned} \delta\Gamma(x) = \gamma(x) - \Gamma(x) &= \frac{1}{\Gamma} \langle \Gamma | \delta\Gamma \rangle + \frac{1}{2\Gamma} \delta\Gamma^2 \\ &- \frac{1}{2\Gamma^3} \langle \Gamma | \delta\Gamma \rangle^2 - \frac{1}{2\Gamma^3} \langle \Gamma | \delta\Gamma \rangle \delta\Gamma^2 - \frac{1}{8\Gamma^3} \delta\Gamma^4 \\ &+ \mathcal{O}_\gamma \{ \delta\Gamma^5 \} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \delta\Gamma(x) = \gamma(x) - \Gamma(x) &= \frac{1}{\Gamma} \langle \Gamma | \delta\Gamma \rangle + \mathcal{O}(\delta\Gamma^2) \\ &= \left\langle \frac{\Gamma}{\Gamma} \middle| \delta\Gamma \right\rangle + \mathcal{O}(\delta\Gamma^2) \\ &= \langle e_\gamma \middle| \delta\Gamma \rangle + \mathcal{O}(\delta\Gamma^2) \end{aligned} \quad (2)$$

در رابطه فوق $\gamma(x)$ شتاب ثقل رفرانس و $\Gamma(x)$ شتاب ثقل مشاهده شده بوده و $\langle e_\gamma \middle| \delta\Gamma \rangle$ مشتق امتدادی $\delta\Gamma$ در امتداد بردار ثقل رفرانس می باشد. بنابر این:

(iii) محاسبه پتانسیل واقعی در سطح بیضوی رفرانس

$$w(\mathbf{X}) = w_0 + dW(\mathbf{X}) \quad (6)$$

مرزهای ثابت و آزاد عمل می نماید که جزئیات آن در [۳۰] آورده شده است.

در این مقاله ما قصد داریم مسئله مقدار دو مرزی با مرزهای ثابت و آزاد بیضوی را بمنظور استفاده از داده های سطح متوسط دریا (حاصل از ارتفاع سنجی ماهواره ای) تعریف نمائیم. به این ترتیب علاوه برافزایش تعداد مشاهدات و بالا رفتن درجه آزادی مسئله قادر خواهیم بود که با استفاده از داده های حاصل از ارتفاع سنجی ماهواره ای مشکل تعیین ژئوئید در مناطق ساحلی را حل نمائیم. بعنوان مثال از محاسبه ژئوئید در مناطق نزدیک دریا، میتوان به ژاپن اشاره نمود که دارای داده های ثقلی دقیق و با تراکم بالا در داخل جزایر و دادهای ثقلی با دقت کم در دریا میباشد. این در حالی است که ژاپن در مناطق دریایی دارای پدیده های ژئوفیزیکی چون Trench با سیگنال های قوی در میدان ثقل است. برای رفع این مشکل در این مقاله استفاده از ارتفاع سنجی ماهواره ای در یک مسئله مرزی بامشاهدات از نوع شتاب ثقل و ارتفاع لحظه ای سطح دریا پیشنهاد شده است که میتواند به خوبی مشکل یاد شده در مرزهای آبی را بر طرف نماید. داده های ارتفاع سنجی ماهواره ای مورد استفاده در این بررسی داده های ماهواره Topex-Poseidon بوده که از طریق^۱ JPL آمریکا در اختیار ما قرار گرفت. ایده استفاده از داده های ارتفاع سنجی ماهواره ای در مسئله تعیین ژئوئید قبلاً توسط [۳۶-۳۱] بررسی شده است. در این جا بر خلاف روشهای قبلی برای داده های ارتفاع سنجی ماهواره ای معادلات مشاهداتی از طریق فرمول برونز معکوس تشکیل داده شده و این معادلات به همراه معادلات مربوط به انتقال بسمت پایین^۲ مشاهدات ثقلی بصورت یکجا در یک مسئله کمترین مربعات حل شده اند.

مسئله مقدار دو مرزی غیرخطی با مرزهای ثابت و آزاد^۳

در اینجا ما مسئله مقدار دو مرزی با مرزهای ثابت و آزاد و غیر خطی را با استفاده از معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی لاپلاس-پواسن برای داده های مرزی شتاب ثقل و ارتفاع سنجی ماهواره ای که بر روی سطح زمین مشاهده شده اند تعریف میکنیم. بعلاوه فرض بر معلوم بودن مختصات GPS کلیه نقاط ثقلی است. بنابر

جدول ۱: مسئله مقدار دو مرزی غیرخطی با مرزهای ثابت و آزاد.

div grad $w(x) = 2\omega^2$ (outside the Earth's masses)	$\forall x \in \mathbb{R}^3/D \cup \partial\mathcal{G}_e^+$
div grad $w(x) = -4\pi G\sigma + 2\omega^2$ (internal space plus boundary of the planet the Earth)	$\forall x \in D \cup \partial\mathcal{G}_e^-$
$E\{\ \text{grad}w\ \} = \mu_\gamma$ (boundary value data of type modulus of gravity)	$\forall x \in \partial\mathcal{G}_e = M_h^2$
$E\{h\} = \mu_h$ (boundary value data of type satellite altimetry)	$\forall x \in \partial\mathcal{G}_e = M_s^2$
$w(x) = w_0$ (equipotential value at the level of the geoid close to mean sea level)	$\forall x \in \partial\mathcal{G}_e = M_g^2$
$w(x) = \frac{1}{2} \omega^2 \ \mathbf{x} - \langle \mathbf{x} \mathbf{e}_\omega \rangle \mathbf{e}_\omega\ _2^2 + \frac{gm}{\ \mathbf{x}\ _2} + \mathcal{O}_w\left(\frac{1}{\ \mathbf{x}\ _2^3}\right) \ \mathbf{x}\ _2 \rightarrow \infty$ (regularity condition at infinity)	

در روابط فوق سطح قاره ای (خشکی) زمین با M_h^2 و سطح دریا با M_s^2 و ژئوئید با M_g^2 نشان داده است.

(iv) حذف اثر میدان پتانسیل فرانس (بسط تا درجه و مرتبه 360/360 بعلاوه پتانسیل گریز از مرکز) از روی پتانسیل واقعی $w(\mathbf{X})$:

$$\delta W(\mathbf{X}) = w(\mathbf{X}) - W(\mathbf{X}) \quad (7)$$

(v) حذف اثر پتانسیل جرم های دریا $W_s(\mathbf{X})$ خارج از بیضوی فرانس $\mathbb{E}_{a,b}^2$ (چنانچه در خارج از بیضوی فرانس جرمی وجود داشته باشد):

$$\delta W(\mathbf{X}) = w(\mathbf{X}) - W(\mathbf{X}) - W_s(\mathbf{X}) \quad (8)$$

نتیجه مراحل فوق الذکر مدلی بصورت زیر است:

$$h(\mathbf{X}) = (W(\mathbf{X}) + W_s(\mathbf{X}) + \delta W(\mathbf{X}) - w_0) \times \frac{\varepsilon^2 \cosh \eta (\cos h^2 \eta - \cos^2 \phi)^{1/2}}{gm} \quad (9)$$

$$\delta \Gamma(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{e}_y} \delta W(\mathbf{x}) \quad (3)$$

مراحل تبدیل مشاهدات ارتفاع سنجی ماهواره ای به پتانسیل ثقل تفاضلی بصورت زیر است:

(i) جمع مشاهده حاصل از ارتفاع سنجی ماهواره ای h_{MSL} (سطح متوسط دریا) با توپوگرافی سطح دریا h_{SST} بمنظور ارتفاع ژئوئید $h(\mathbf{X})$:

$$h(\mathbf{X}) = h_{MSL} - h_{SST} \quad (4)$$

توپوگرافی سطح دریا از طریق مشاهدات اقیانوس شناسی قابل محاسبه بوده و به عنوان یکی از مدل های موجود میتوان به مدل POCM-4B اشاره نمود [۳۸].

(ii) تبدیل ارتفاع ژئوئید $h(\mathbf{X})$ با استفاده از فرمول برونز به پتانسیل معادل $dW(\mathbf{X})$ در سطح بیضوی فرانس $\mathbb{E}_{a,b}^2$:

$$h(\mathbf{X}) = dW(\mathbf{X}) \frac{\varepsilon^2 \cosh \eta (\cos h^2 \eta - \cos^2 \phi)^{1/2}}{gm} \quad (5)$$

جدول ۲: مسئله مقدار دو مرزی با مرزهای ثابت و آزاد و خطی.

$\operatorname{div} \operatorname{grad} \delta W(\mathbf{x}) = 0$	$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathcal{D} \cup \partial \mathcal{G}_g$	} Field Diff. Equ.
$\operatorname{div} \operatorname{grad} \delta W(\mathbf{x}) = -4\pi \delta P(\mathbf{x})$	$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \cup \partial \mathcal{G}_g$	
$\delta \Gamma(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{e}_r} \delta W(\mathbf{x})$	$\forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{G}_g := \mathbb{M}_h^2$	} Boundary Value
$\delta h(\mathbf{X}) = \frac{\varepsilon^2 \cosh \eta (\cos h^2 \eta - \cos^2 \phi)^{1/2}}{gm} \delta W(\mathbf{X})$	$\forall \mathbf{X} \in \mathbb{E}_{a,b}^2$	
$w_0 = W(\mathbf{x}) + \delta W(\mathbf{x})$	$\forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{G}_g := \mathbb{M}_g^2$	
$\delta W(\mathbf{x}) := \frac{gm}{\ \mathbf{x}\ _2} + \mathcal{O}_{\infty} \left(\frac{1}{\ \mathbf{x}\ _2^3} \right)$	$\text{for } \ \mathbf{x}\ _2 \rightarrow \infty$	} Regularity at Infinity

بنابراین مشاهدات ارتفاع سنجی ماهواره ای خطی شده بصورت زیر در می آید:

$$\delta h(\mathbf{X}) = \delta W(\mathbf{X}) \times$$

$$\frac{\varepsilon^2 \cosh \eta (\cos h^2 \eta - \cos^2 \phi)^{1/2}}{gm}$$

(۱۴)

با در نظر گرفتن موارد فوق مسئله مقدار دو مرزی خطی با مرزهای ثابت و آزاد بشکل جدول (۲) در می آید:

انتگرال آبل - پواسن

برای فضای خارج بیضوی که هیچگونه جرمی وجود ندارد مقادیر مرزی $\delta \Gamma$ در انتگرال آبل- پواسن صدق می کنند. بنابراین چنانچه بدنبال پتانسیل ثقل تفاضلی $\delta W(\mathbf{X})$ در روی بیضوی فرانس $\mathbb{E}_{a,b}^2$ باشیم انتگرال آبل- پواسن میتواند بعنوان یک معادله مشاهده بکار رود. با داشتن مقادیر تفاضلی شتاب ثقل میتوان از طریق انتگرال آبل- پواسن، پتانسیل ثقل تفاضلی $\delta W(\mathbf{X})$ در روی بیضوی فرانس $\mathbb{E}_{a,b}^2$ را بدست آورد. در جدول (۳) انتگرال آبل- پواسن برای شتاب ثقل تفاضلی ارائه گردیده است.

که بعد از مرتب کردن به فرم ذیل در خواهد آمد:

$$h(\mathbf{X}) = (W(\mathbf{X}) + W_s(\mathbf{X}) - w_0) \times$$

$$\frac{\varepsilon^2 \cosh \eta (\cos h^2 \eta - \cos^2 \phi)^{1/2}}{gm}$$

$$+ \delta W(\mathbf{X}) \frac{\varepsilon^2 \cosh \eta (\cos h^2 \eta - \cos^2 \phi)^{1/2}}{gm}$$

(۱۰)

بنابراین

$$h(\mathbf{X}) = h_R(\mathbf{X}) + \delta h(\mathbf{X})$$

(۱۱)

در رابطه فوق

$$h_R(\mathbf{X}) = (W(\mathbf{X}) + W_s(\mathbf{X}) - w_0) \times$$

$$\frac{\varepsilon^2 \cosh \eta (\cos h^2 \eta - \cos^2 \phi)^{1/2}}{gm}$$

(۱۲)

و

$$\delta h(\mathbf{X}) = \delta W(\mathbf{X}) \times$$

$$\frac{\varepsilon^2 \cosh \eta (\cos h^2 \eta - \cos^2 \phi)^{1/2}}{gm}$$

(۱۳)

جدول ۳: انتگرال آبل - پواسن برای شتاب ثقل تفاضلی.

اپراتور مرزی خطی شده :

$$\delta\Gamma(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}) - \Gamma(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{e}_\Gamma | \delta\Gamma \rangle + \mathcal{O}(\delta\Gamma^2)$$

بردار واحد ثقل رفرانس \mathbf{e}_Γ :

$$\mathbf{e}_\Gamma = \frac{\Gamma}{\|\Gamma\|}$$

بردار شتاب ثقل تفاضلی :

$$\begin{aligned} \delta\Gamma(\lambda, \phi, \eta) &= \text{Grad}(\delta W(\lambda, \phi, \eta)) \\ &= \text{Grad} \left(\frac{1}{S} \int_{\mathbb{E}_{a,b}^2} dS' \omega(\phi') \mathbf{K}(\lambda, \phi, \eta, \lambda', \phi', \eta_0) \delta W(\lambda', \phi') \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{S} \int_{\mathbb{E}_{a,b}^2} dS' \omega(\phi') \mathbf{K}(\lambda, \phi, \eta, \lambda', \phi', \eta_0) \delta W(\lambda', \phi') \right) \mathbf{e}_\lambda \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{S} \int_{\mathbb{E}_{a,b}^2} dS' \omega(\phi') \mathbf{K}(\lambda, \phi, \eta, \lambda', \phi', \eta_0) \delta W(\lambda', \phi') \right) \mathbf{e}_\phi \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{S} \int_{\mathbb{E}_{a,b}^2} dS' \omega(\phi') \mathbf{K}(\lambda, \phi, \eta, \lambda', \phi', \eta_0) \delta W(\lambda', \phi') \right) \mathbf{e}_\eta \end{aligned}$$

انتگرال آبل - پواسن برای شتاب ثقل تفاضلی

$$\begin{aligned} \delta\Gamma(\mathbf{x}) &= \gamma(\mathbf{x}) - \Gamma(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{e}_\Gamma | \delta\Gamma \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}} \frac{\Gamma_\lambda}{\|\Gamma\|} \frac{1}{S} \int_{\mathbb{E}_{a,b}^2} dS' \omega(\phi') \frac{\partial \mathbf{K}(\lambda, \phi, \eta, \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \lambda} \delta W(\lambda', \phi') \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} \frac{\Gamma_\phi}{\|\Gamma\|} \frac{1}{S} \int_{\mathbb{E}_{a,b}^2} dS' \omega(\phi') \frac{\partial \mathbf{K}(\lambda, \phi, \eta, \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \phi} \delta W(\lambda', \phi') \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\Gamma_\eta}{\|\Gamma\|} \frac{1}{S} \int_{\mathbb{E}_{a,b}^2} dS' \omega(\phi') \frac{\partial \mathbf{K}(\lambda, \phi, \eta, \lambda', \phi', \eta_0)}{\partial \eta} \delta W(\lambda', \phi') \end{aligned}$$

در رابطه فوق کرنل آبل - پواسن بوسیله رابطه زیر بیان گردیده است :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\lambda, \phi, \eta, \lambda', \phi', \eta_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{Q_{n|ml}(i \sinh \eta)}{Q_{n|ml}(i \sinh \eta_0)} \\ &\quad \times \mathbf{e}_{nm}(\lambda', \phi') \mathbf{e}_{nm}(\lambda, \phi) \end{aligned}$$

فرمول برونز بیضوی

رفرانس عبارتند از (i) اولین جمله بسط هارمونیک میدان جاذبه میدان پتانسیل زمین (ii) میدان پتانسیل ثقل Bjerhammar (iii) اولین جمله بسط هارمونیک جاذبه میدان ثقل زمین بعلاوه میدان گریزازمرکز (iv)

در جدول (۴) انواع میدان های رفرانس مختلفی که میتوانند سطوح هم پتانسیل رفرانس از نوع کره یا بیضوی را تولید نمایند آورده شده است. این میدانهای

میدان پتانسیل ثقل Somigliana-Pizzetti [۳۹-۴۰]. همانطوریکه از نام آن پیداست تنها میدان نوع چهارم مولد میدان رفرانس Somigliana-Pizzetti میباشد. فرمول های برونز وابسته به این میدان های رفرانس در جدول (۵) آورده شده است. طبق تحقیق بعمل آمده توسط اردلان و گرافارند [۱۷] در مورد دقت فرمولهای برونز مختلف، آنها اثبات کردند که فرمول برونز محاسبه شده بر اساس میدان های رفرانس (i) و (iii) تا جملات غیر درجه دو میتوانند، ارتفاع ژئوئید به دقت سانتی متر را تضمین نمایند. فرمول برونز محاسبه شده بر اساس میدان رفرانس Somigliana-Pizzetti فقط با در نظرگرفتن قسمت خطی فرمول دقت در حد میلی متر دارد. علاوه بر این ژئوئید محاسبه شده بر اساس میدان Somigliana-Pizzetti دارای این حسن بوده که مجموع ارتفاع ژئوئید جهانی نسبت به آن برابر صفرمی باشد [۴۱]. اردلان و گرافارند [۱۷] برای محاسبات ژئوئید با دقت زیر میلیمتر استفاده از فرمول برونز بیضوی محاسبه شده بر اساس میدان Somigliana-Pizzetti را پیشنهاد نموده اند.

میدان پتانسیل ثقل Somigliana-Pizzetti [۳۹-۴۰]. همانطوریکه از نام آن پیداست تنها میدان نوع چهارم مولد میدان رفرانس Somigliana-Pizzetti میباشد. فرمول های برونز وابسته به این میدان های رفرانس در جدول (۵) آورده شده است. طبق تحقیق بعمل آمده توسط اردلان و گرافارند [۱۷] در مورد دقت فرمولهای برونز مختلف، آنها اثبات کردند که فرمول برونز محاسبه شده بر اساس میدان های رفرانس (i) و (iii) تا جملات غیر درجه دو میتوانند، ارتفاع ژئوئید به دقت سانتی متر را تضمین نمایند. فرمول برونز محاسبه شده بر اساس میدان رفرانس Somigliana-Pizzetti فقط با در نظرگرفتن قسمت خطی فرمول دقت در حد میلی متر دارد. علاوه بر این ژئوئید محاسبه شده بر اساس میدان Somigliana-Pizzetti دارای این حسن بوده که مجموع ارتفاع ژئوئید جهانی نسبت به آن برابر صفرمی باشد [۴۱]. اردلان و گرافارند [۱۷] برای محاسبات ژئوئید با دقت زیر میلیمتر استفاده از فرمول برونز بیضوی محاسبه شده بر اساس میدان Somigliana-Pizzetti را پیشنهاد نموده اند.

جدول ۵: انواع فرمول های برونز تا حد

$$\text{دقت } \mathcal{O}(\delta W(x_0)^2)$$

Reference Field	Bruns Formula
$\frac{gm}{r}$	$h = \delta W(R) / \left(\frac{gm}{R^2}\right)$
Bjerhammar reference field	$h = -\delta W(X_0) \left(\left(-\frac{gm}{r^2} + \frac{2}{3}r\omega^2\right) + \left(\frac{R^5\omega^2}{\sqrt{5}r^4} - \frac{2r\omega^2}{3\sqrt{5}}\right) \frac{\sqrt{5}}{2} (3\sin^2\phi - 1) \right)^{-1}$
$\frac{gm}{\varepsilon} \text{arc cot}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)$	$h = \frac{a}{gm} \sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sin^2\phi} \delta W(X_0) + \mathcal{O}(\delta W(X_0)^2)$
Somigliana-Pizzetti reference field	$h = -\frac{\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sin^2\phi}}{a} \delta W(X_0) - \frac{gm}{a^2} \omega^2 \left(\frac{6(b^2 + \varepsilon^2) \text{arccot}\left(\frac{b}{\varepsilon}\right) - 3\varepsilon + \varepsilon^2 - 3\varepsilon}{(3b^2 + \varepsilon^2) \text{arccot}\left(\frac{b}{\varepsilon}\right) - 3\varepsilon} \right) (3\sin^2\phi + 1) + \omega^2 b \cos\phi + \mathcal{O}(\delta W(X_0)^2)$

شکل (۴) توپوگرافی سطح دریا SST حاصل از مدل POCM-4B میباشد. حداقل، حداکثر، میانگین و انحراف معیار SST در خلیج فارس و دریای عمان بر اساس اطلاعات مستخرج از این مدل برابر بترتیب $-0.06m$ ، $0.29m$ ، $0.22m$ و $0.09m$ میباشد.

شتاب ثقل تفاضلی بعد از حذف اثر میدان رفرانس و اثر جرم های محلی در شکل (۵) نشان داده شده است. برای جزئیات محاسبه اثر جرمهای محلی به [۴۲] مراجعه نمایید. حداقل، حداکثر، میانگین و انحراف

جدول ۴: انواع سطوح هم پتانسیل رفرانس.

Reference Potential fields	Ref. Equipotential surfaces
$\frac{gm}{r}$	Reference sphere
$\frac{GM}{r} + \frac{1}{3}r^2\omega^2 + \left(\frac{1}{3\sqrt{5}}\frac{R^5\omega^2}{r^3} - \frac{r^2\omega^2}{3\sqrt{5}}\right) \frac{\sqrt{5}}{2} (3\sin^2\phi - 1)$	Bjerhammar sphere
$\frac{gm}{\varepsilon} \text{arc cot}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)$	Ref. ellipsoid
$\frac{gm}{\varepsilon} \text{arc cot}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{6}\omega^2 a^2 \left(\left(3\frac{u^2}{\varepsilon^2} + 1\right) \text{arc cot}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) - 3\frac{u}{\varepsilon} \right) (3\sin^2\phi - 1) + \left(3\frac{b^2}{\varepsilon^2} + 1\right) \text{arc cot}\left(\frac{b}{\varepsilon}\right) - 3\frac{b}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\omega^2 (u^2 + \varepsilon^2) \cos^2\phi$	Somigliana-Pizzetti ref. Ellipsoid, e.g. WGD2000

مطالعه خاص: تعیین ژئوئید دقیق ایران

در این بخش نتایج ژئوئید دقیق ایران بر اساس روش بیان شده در بخش های قبلی ارائه میگردد. شکل (۱) نشان دهنده ایستگاههای ثقل در منطقه ایران میباشد. حداقل، حداکثر، میانگین و انحراف معیار شتاب ثقل در ایران بر اساس اطلاعات مستخرج از بانک داده های BGI بترتیب برابر $978533.87mgal$ ، $979197.5595mgal$ ، $980317.64mgal$

استفاده در ترسیم اشکال فوق الذکر سیستم مخروطی هم فاصله با مدارهای استاندارد $30^{\circ} N$ و $35^{\circ} N$ نسبت به بیضوی رفرانس WGD2000 میباشد.

برای نشان دادن میزان تاثیر مشاهدات ارتفاع سنجی ماهواره ای در ژئوئید دقیق محاسبه شده ، اقدام به محاسبه ژئوئید ایران در دو حالت ذیل گردید:

(۱) محاسبه ژئوئید با استفاده از مشاهدات ثقلی به تنهایی
(۲) محاسبه ژئوئید با استفاده از مشاهدات توام ثقلی و ارتفاع سنجی ماهواره ای.

ارتفاع ژئوئید محاسبه شده در پنج مارک ایستگاه جزرومد سنج بوشهر با مشاهدات ثقلی به تنهایی $-22.55m$ بوده که با استفاده از مشاهدات توام ثقلی و ارتفاع سنجی ماهواره ای به $-22.43m$ تغییر می یابد.

در این ایستگاه سطح متوسط دریا از طریق مشاهدات جزرومد سنج تعیین و از طریق ترازبایی دقیق به پنج مارک مربوطه منتقل گردیده است. ارتفاع ژئوئید بدست آمده بدین طریق برای پنج مارک ایستگاه جزرومد سنج $-21.49m$ میباشد. همانگونه که ملاحظه میگردد تلفیق مشاهدات ثقلی و ارتفاع سنجی ماهواره ای در این ایستگاه موجب بهبود در حدود $12cm$ در ارتفاع ژئوئید گردیده است. بدیهی است ارزشیابی دقیق در مورد میزان تاثیر روش جدید بر محاسبه ژئوئید مستلزم انجام چنین مقایسه ای در تعدادی ایستگاه جزرومد سنج میباشد که امیدواریم در آینده با انجام مشاهدات مربوطه امکان انجام این بررسی نیز پدید آید.

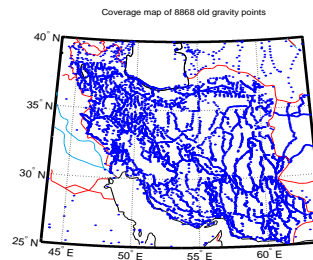
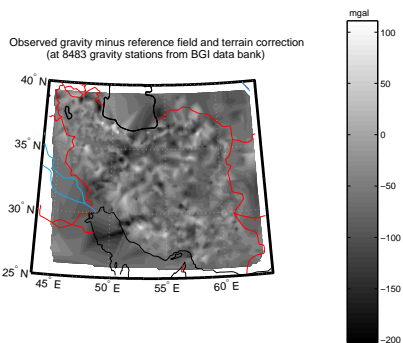
یکی از راههای مرسوم برای کنترل ژئوئید ، مقایسه با ژئوئید حاصل از GPS/LEVELLING میباشد بهمین منظور برای کنترل ژئوئید جدید محاسبه شده از داده های GPS/LEVELLING تهیه شده توسط سازمان نقشه برداری کشور (به تعداد ۵۷ نقطه) استفاده گردید. خلاصه اطلاعات آماری مربوط به مقایسه ژئوئید جدید با نتایج حاصل از GPS/LEVELLING در جدول (۶) داده شده است:

جدول ۶: خلاصه اطلاعات آماری مربوط به مقایسه ژئوئید جدید با نتایج حاصل از GPS/LEVELLING.

Max	2.066m
Min	-2.148m
Mean	0.161m
STD	1.068m

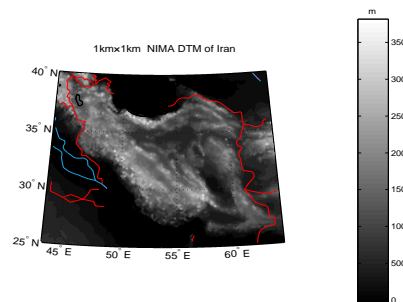
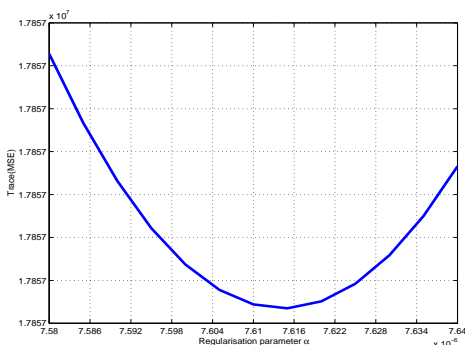
معیار شتاب ثقل تفاضلی در این شکل برابر بترتیب $-202.4095mgal$ ، $126.7039mgal$ ، $-57.6947mgal$ و $31.1793mgal$ میباشد . شتاب ثقل تفاضلی حاصل با اعمال انتگرال ابل پواسن به مقادیر پتانسیل جاذبه در سطح بیضوی رفرانس WGD2000 تبدیل میگردد. شکل (۶) تغییرات Trace ماتریس خطای مربعی متوسط MSE (Mean Square Error) به ازاء مقادیر مختلف پارامتر منظم سازی α [۴۴-۴۳] هنگامی که فقط از مشاهده شتاب ثقل برای تعیین ژئوئید استفاده گردد نشان میدهد. در شکل (۷) تغییرات Trace ماتریس MSE، به ازاء مقادیر مختلف پارامتر α هنگامی که از ترکیب مشاهده شتاب ثقل و داده های ارتفاع سنجی ماهواره ای استفاده شده است نشان میدهد. این شکل نشان میدهد که داده های ارتفاع سنجی ماهواره ای باعث پایداری بیشتر مسئله میگردد. شکل (۸) نتیجه انتقال بسمت پایین بعد از پایدار نمودن مسئله را نشان میدهد. اطلاعات آماری مربوط به این شکل بترتیب حداقل ، حداکثر ، میانگین و انحراف معیار برابر $-0.85m^2/s^2$ ، $1.56m^2/s^2$ ، $0.09m^2/s^2$ ، $0.11m^2/s^2$ میباشد. بعد از این مرحله ما چنانچه میدان پتانسیل جاذبه بیضوی رفرانس از درجه و مرتبه $360/360$ و میدان گریز از مرکز بعلاوه پتانسیل ناشی از جرم های محلی

شعاع $55km$ را برگردانیم پتانسیل واقعی در سطح بیضوی رفرانس حاصل میگردد. شکل (۹) نشان دهنده پتانسیل واقعی در سطح بیضوی رفرانس میباشد. حداقل ، حداکثر ، میانگین و انحراف معیار پتانسیل واقعی در سطح بیضوی رفرانس بترتیب برابر $6.263712558 \times 10^7 m^2/s^2$ ، $6.2636412 \times 10^7 m^2/s^2$ ، $6.263675171 \times 10^7 m^2/s^2$ ، $21.0796 m^2/s^2$ میباشد. در مرحله پایانی پتانسیل ثقل در سطح بیضوی رفرانس WGD2000 [۴۵] از طریق فرمول برونز ارائه شده در جدول (۵) به ارتفاع ژئوئید نسبت به بیضوی رفرانس WGD2000 تبدیل میگردد. ژئوئید دقیق ایران در شکل (۱۰) نشان داده شده است. حداقل ، حداکثر ، میانگین و انحراف معیار ژئوئید محاسبه شده برابر بترتیب $-45.27m$ ، $27.53m$ ، $-11.06m$ و $2.15m$ میباشد. لازم به ذکر است که سیستم تصویر مورد



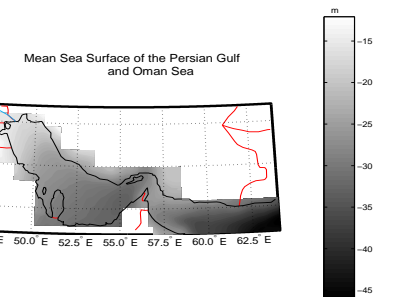
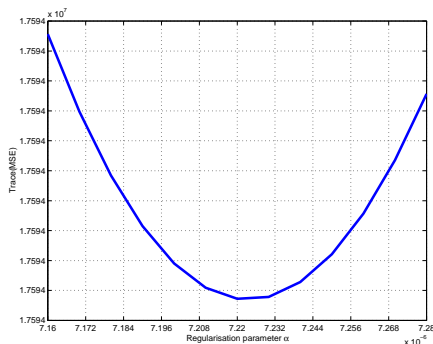
شکل ۱: توزیع نقاط ثقلی ایران، گرفته شده از بانک داده های BGI.

شکل ۵: شتاب ثقل مشاهده شده در ایستگاههای BGI بعد از حذف اثر میدان ثقل رفرنس تا درجه و مرتبه +۳۶ و شتاب گریز از مرکز و اثر جرمهای در فاصله نزدیک.



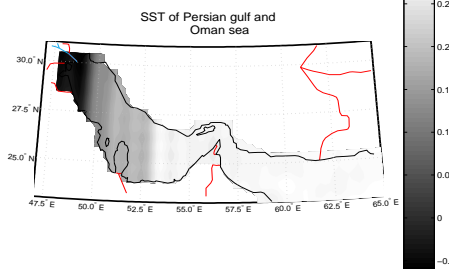
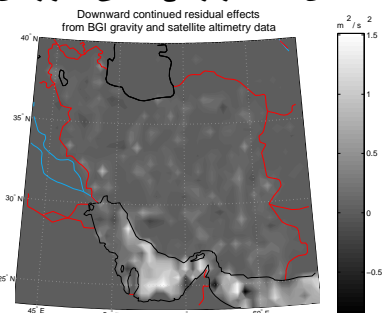
شکل ۲: تغییرات ارتفاعی ایران بر اساس DTM 1km x 1km مستخرج از بانک داده NIMA.

شکل ۶: پارامتر Regularization بر اساس داده های BGI.



شکل ۳: سطح متوسط دریا در خلیج فارس و دریای عمان بر اساس مدل CSRMSS95.

شکل ۷: پارامتر Regularization بر اساس داده های BGI و داده های حاصل از ارتفاع سنجی ماهواره ای.



شکل ۸: پتانسیل ثقل تفاضلی بر اساس انتقال به سمت پایین شتاب ثقل تفاضلی حاصل از اساس داده های BGI و داده های حاصل از ارتفاع سنجی ماهواره ای.

شکل ۴: توپوگرافی سطح دریا در خلیج فارس و دریای عمان بر اساس مدل POCM-4B.

نتیجه گیری

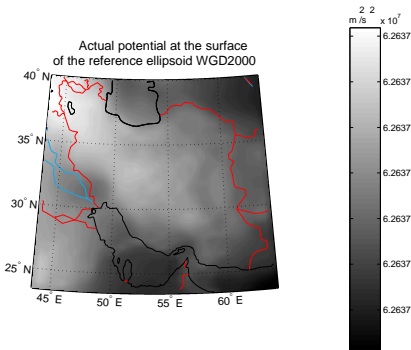
مهمترین نکات این روش را میتوان به صورت ذیل

خلاصه نمود:

- استفاده از تقریب بیضوی در تمام محاسبات.
- استفاده از فرمول برونز میدان Somigliana-Pizzetti
- که تنها فرمول برونز بیضوی مناسب برای تعیین ژئوئید با دقت بالا است.
- استفاده بهینه از مختصات GPS در مراحل مختلف محاسبات و مدلسازی مسئله.
- استفاده از مدل های ژئوپتانسیلی به مناسبترین وجه ممکن.
- استفاده از حل تحلیلی انتگرال نیوتن در سیستم تصویر هم مساحت بیضوی مبنا که تامین کننده تقریب بیضوی در مختصات کارتزین سیستم تصویر میباشد.
- نتیجه نهایی آنکه روشی را ارائه و تست نمودیم که علاوه بر گشودن درها به روی محاسبه دقیق ژئوئید که جزء نیازهای عصر GPS میباشد مشکل مناطق ساحلی که از نظر محاسبات ژئوئید از مشکلترین مناطق بشمار میروند نیز رفع گردیده است.

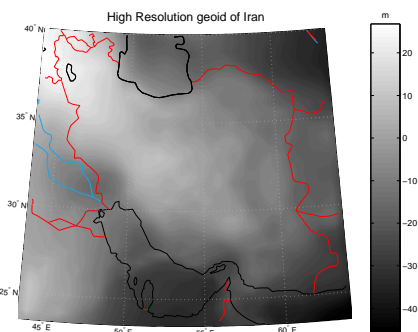
تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله بدینوسیله مراتب تشکر و قدردانی خود را از معاونت پژوهشی دانشگاه تهران به منظور حمایت مالی از این پژوهش در قالب طرح پژوهشی دانشگاه تهران اعلام می دارند.



شکل ۹: پتانسیل واقعی در روی سطح بیضوی رفرانس.

با توجه به جدول (۶) به این نتیجه میرسیم که بطور متوسط ژئوئید محاسبه شده $16cm$ با نتایج GPS/LEVELLING تفاوت دارد که میتواند ناشی از خطای صفر ارتفاعی باشد. انحراف معیار محاسبه شده (1.066) نشان دهنده تفاوت ژئوئید جدید با GPS/LEVELLING بوده که در حد خطای GPS/LEVELLING میباشد. یادآوری مینماید که ارتفاع ژئوئید محاسبه شده از طریق GPS/LEVELLING بدون اعمال تصحیح ارتومتریک بوده و نیز با احتساب خطای سیستماتیک موجود در شبکه ترازبایی دقیق ایران چنین تفاوتی در حد انتظار میباشد.



شکل ۱۰: ژئوئید دقیق ایران حاصل از تلفیق اطلاعات جاذبه ای و ارتفاع سنجی ماهواره ای.

مراجع

- 1 - Albertella, A., Migliaccio, F. and Sanso, F. (2002). "GOCE: The Earth gravity field by space gradiometry." Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Vol. 83, PP. 1-15.
- 2 - Moreaux, G., Balmino, G. (2002). "Impact of some land hydrological phenomena on GOCE mission." Geophysical Research Letters, Vol. 29: No.-1205.
- 3 - Iorio, L. (2002). "A critical approach to the concept of a polar, low-altitude LARES satellite." Classical and Quantum Gravity, Vol. 19, PP. L175-L183.

- 4 - Iorio, L., Ciufolini, I. And Pavlis, E.C. (2002). "Measuring the relativistic perigee advance with satellite laser ranging." *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 19, PP. 4301-4309.
- 5 - Jakowski, N., Wehrenpfennig, A., Heise, S., Reigber, C., Luhr, H., Grunwaldt, L. and Meehan, T.K. (2002). "GPS radio occultation measurements of the ionosphere from CHAMP: Early results." *Geophysical Research Letters*, Vol. 29: art. No.-1457.
- 6 - Knudsen, P., Andersen, O. (2002). "Correcting GRACE gravity fields for ocean tide effects." *Geophysical Research Letters*, Vol. 29, art. No.-1178.
- 7 - Konig, R., Zhu, S., Reigber, C., Neumayer, K.H., Meixner, H., Galas, R., Baustert, G., Schwintzer, P. (2002). "Champ rapid orbit determination for GPS atmospheric limb sounding." *New Trends in Space Geodesy*, Vol. 30, PP. 289-293.
- 8 - Leuliette, E. W., Nerem, R. S. and Russell, G. L. (2002). "Detecting time variations in gravity associated with climate change." *Journal of Geophysical Research-solid Earth*, Vol. 107, art. No.-2112
- 9 - Luhr, H., Maus, S., Rother, M. and Cooke, D. (2002). "First in-situ observation of night-time F region currents with the CHAMP satellite." *Geophysical Research Letters*, Vol. 29, art. No.-1489
- 10 - Wickert, J., Beyerle, G., Hajj, G. A., Schwieger, V. and Reigber, C. (2002). "GPS radio occultation with CHAMP: Atmospheric profiling utilizing the space-based single difference technique." *Geophysical Research Letters*, Vol. 29, No. 8, art. No.-1187.
- 11 - Oberndorfer, H., Muller, J., Rummel, R. and Sneeuw, N. (2002). "A simulation tool for the new gravity field satellite missions." *New Trends in Space Geodesy*, Vol. 30, PP. 227-232.
- 12 - Petrovskaya, M. S., Vershkov, A. N. and Zielinski, J. B. (2002). "Recovering the Earth's potential spectral characteristics from GOCE mission." *New Trends in Space Geodesy*, Vol. 30, PP. 221-226.
- 13 - Reigber, C., Luhr, H. and Schwintzer, P. (2002). "CHAMP mission status:." *New Trends in Space Geodesy*, Vol. 30, PP. 129-134.
- 14 - Rodell, M., Famiglietti, J. S. (2002). "The potential for satellite-based monitoring of groundwater storage changes using GRACE: the High Plains aquifer, Central US." *Journal of Hydrology*, Vol. 263, PP. 245-256.
- 15 - Schroter, J., Losch, M. and Sloyan, B. (2002). "Impact of the Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer (GOCE) mission on ocean circulation estimates 2. Volume and heat fluxes across hydrographic sections of unequally spaced stations." *Journal of Geophysical Research-oceans*, Vol. 107, No. C2, art. No.-3012.
- 16 - Ardalan, A. A. and Grafarend, E. W. (2004). High-resolution geoid computation without applying Stokes's formula; case study: High-resolution geoid of Iran. Accepted for publication in *Journal of Geodesy*.
- 17 - Ardalan A. A. and Grafarend, E. W. (2001). "Ellipsoidal geoidal undulations (ellipsoidal Bruns formula): case studies." *Journal of Geodesy*, Vol. 75, PP. 544-552.
- 18 - Blitzkow, D. (1999). "Toward a 10' resolution Geoid for South America: a comparison study." *Physics and chemistry of the earth, part A Solid Earth and Geodesy*, Vol. 24, PP. 33-39
- 19 - Denker, H. and Torge, W. (1993). "Present state and future developments of the European geoid." *Surveys in Geophysics*, Vol. 14, PP. 433-447.
- 20 - Featherstone, W. E., Kirby, J. F. (2000). "The reduction of aliasing in gravity anomalies and geoid heights using digital terrain data." *Geophysical Journal International*, Vol. 141, PP. 204-212.

- 21 - Featherstone, W. E., Evans, J. D. and Olliver, J. G. (1998). "A Meissl-modified Vanicek and Kleusberg kernel to reduce the truncation error in gravimetric geoid computations." *Journal of Geodesy*, Vol. 72, PP. 154-160.
- 22 - Forsberg, R. (1993). "Modeling the fine structure of the geoid – methods, data requirements and some results." *Survey Review*, Vol. 14, PP. 403-418.
- 23 - Hwang, C. (1997). "Analysis of some systematic errors affecting altimeter-derived sea surface gradient with application to geoid determination over Taiwan." *Journal of Geodesy*, vol. 71, PP. 113-130.
- 24 - Kearsley, A. H. W., Forsberg, R., Olesen, A., Bastos, L., Hehl, K., Meyer, U. and Gidskehaug, A. (1998). "Airborne gravimetry used in precise geoid computations by ring integration." *Journal of Geodesy*, Vol. 72, PP. 600-605.
- 25 - Novak P., Vanicek, P., Martinec, Z. and Veronneau, M. (2001a). "Effects of the spherical terrain on gravity and the geoid." *Journal of Geodesy*, Vol. 75, PP. 491-504.
- 26- Novak, P., Vanicek, P., Veronneau, M., Holmes, S. and Featherstone, W. (2001b). "On the accuracy of modified Stokes's integration in high-frequency gravimetric geoid determination." *Journal of Geodesy*, Vol. 74: PP. 644-654.
- 27 - Vajda, P. and Vanicek, P. (1999). "Truncated geoid and gravity inversion for one point-mass anomaly." *Journal of Geodesy*, Vol. 73, PP. 58-66.
- 28 - Vanicek, P., Novak, P. and Martinec, Z. (2001). "Geoid, topography, and the Bouguer plate or shell." *Journal of Geodesy*, Vol. 75, PP. 210-215.
- 29 - Tziavos, I. N. and Andritsanos, V. D. (1999). Recent geoid computations for the Hellenic area. *Physics and chemistry of the earth, part A Solid Earth and Geodesy*, Vol. 24, PP. 91-96
- 30 - Tziavos, I. N. (1996). "Comparisons of spectral techniques for geoid computations over large regions." *Journal of Geodesy*, Vol. 70, PP. 357-373.
- 31 - Ardalan, A. A. (1999). High Resolution Regional Geoid Computation in the World Geodetic Datum 2000, based upon collocation of linearized observational functionals of the type GPS, gravity potential and gravity intensity , Ph.D. thesis , stuttgart university.
- 32 - Svensson, S. L. (1983). Solution of the Altimetry-Gravimetry problem. *Bull. Geod.* Vol. 57, PP. 332-353.
- 33 - Sacerdote, F. and Sanso, F. (1983). A contribution to the analysis of the Altimetry-Gravimetry problem. *Bull Geod.* Vol. 57 PP. 257-272.
- 34 - Sacerdote, F. and Sanso, F. (1987) Further remarks on the Altimetry-Gravimetry problems. *Bull. Geod.* Vol. 61, PP. 65 82.
- 35 - Grafarend, E. W., Krarup, T. and Syffus, R.(1996). "An algorithm for the inverse of a multivariate homogeneous polynomial of degree n." *Journal of geodesy*, Vol. 70, PP. 276-286.
- 36 - Grafarend, E. W., Keller, W. (1995). "Setup of observational functionals in gravity space as well as in geometry space." *Manuscr Geod*, Vol. 20, PP. 301-305.
- 37 - Jinghai Y. and Xiaoping, W. (1997). "The solution of mixed boundary value problems with the reference ellipsoid as boundary." *J. Geod.*, Vol. 71 PP. 454-460.
- 38 - Lehmann, R. (1999). "Boundary-value problems in the complex world of geodetic measurements." *J. Geod*, Vol. 73, PP. 491-500.
-

-
- 39 - Grafarend, E. W., Finn. G. and Ardalan, A. A. (2003). "Ellipsoidal vertical deflections and ellipsoidal gravity disturbances, case studies." Under review Journal of Geodesy.
- 40 - Rapp, R. H. (1998). The Development of a Degree 360 Expansion of the Dynamic Ocean Topography of the POCM_4B Global Circulation Model, NASA/CR-1998-206877, Greenbelt Maryland 20771.
- 41- Pizzetti, P. (1894). Geodesia--Sulla es pressione della gravita alla superficie del geoide, supposto ellissoidico. Atti Reale Accademia dei Lincei 3, PP. 166-172.
- 42 - Somigliana, C. (1930). Geofisica--Sul campo gravitazionale esterno del geoide ellissoidico. Atti della Reale Academia Nazionale dei Lincei Rendiconti 6, PP.237-243.
- 43 - Heiskanen, W. A. and Moritz, H. (1967). Physical Geodesy. W.H. Freeman, San Francisco.
- 44 - Ardalan, A. A. and Safari, A. (2004). "Terrain correction on the multi-cylindrical equal area map projection of the surface of the reference ellipsoid." Accepted for publication in Journal of Geodesy.
- 45 - Phillips, D. L. (1962). "A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind." J. Ass. comput. Mach. 9, PP. 84-96.
- 46 - Tikhonov, A. N. (1963). "The regularization of incorrectly posed problems." Soviet Math., Doklady 4, PP. 1624-1627.
- 47 - Grafarend, E. W. and Ardalan, A. A. (1999). "World Geodetic Datum 2000." Journal of Geodesy, Vol. 73, PP. 611-623.
-