α-shape ها در مدلسازي رقومي سطح زمين

جلال امینی[*1] و حيدر راستيويسي[2]

[1]استاديار گروه مهندسی نقشه‌برداری - پرديس دانشكده هاي فنی- دانشگاه تهران

[1]قطب نقشه‌برداري- گروه مهندسی نقشه‌برداری - پرديس دانشكده هاي فنی- دانشگاه تهران

[2]دانش آموخته كارشناسی ارشد گروه مهندسی نقشه‌برداری - پرديس دانشكده هاي فنی- دانشگاه تهران

(تاريخ دريافت ۸۵/۴/۱۰، تاريخ دريافت روايت اصلاح شده ۸۵/۱۱/۱۵، تاريخ تصويب ۸۵/۱۱/۲۱)

چكيده

يكي از مشكلات اساسي در بازسازي سطوح در مهندسي نقشه‌برداري چگونگي اتصال نقاط نمونه‌برداری شده به يكديگر است. يكي از روشهاي اتصال، استفاده از شبکه نامنظم مثلث بندی شده (TIN) است، كه بهترين الگوريتم پيشنهاد شده، الگوريتم دلوني است. اين الگوريتم در برخي موارد در نشان‌دادن واقعيات و جزئيات ضعف دارد. هدف از اين مقاله معرفي α-shapeها است كه مي‌توانند نقاط ضعف و نواقص الگوريتم دلوني را بهبود دهند. در اين مقاله از α-shapeها براي مدل‌سازي رقومي زمين استفاده مي‌شود. با توجه به اينكه α-shapeها تا كنون در كاربردهاي مهندسي نقشه‌برداري مورد استفاده قرار نگرفته‌اند، بر آن شديم تا توانمندي‌هاي آنها را در اين كاربرد، DTM، بررسي نماييم. لذا، پس از یک سري تعاريف مقدماتي، مراحل ساخت α-shapeها را توضيح و كارهايي كه براي توسعه α-shapeها پيشنهاد شده مورد بررسي قرار داده‌ايم. α-shapeها بدليل داشتن معيار كنترلي α مي توانند براي تعيين گپ‌ها و تصحيح مثلث‌هاي بدست آمده از مثلث بندي دلوني استفاده شوند. با توجه به قابليت α-shapeها در تعيين مرز، مي‌توان از آنها براي بازسازي سطوح سه‌بعدي، بخصوص در داده‌هاي ليزر اسكن كه با ابري از نقاط مواجه هستيم، استفاده كرد.

واژه‌هاي كليدي: α-shapeها - انترپولاسيون - سطوح سه‌بعدي و مدل رقومي زمين (DTM)

مقدمه

ايجاد یک مدل سه‌بعدي با استفاده از یک مجموعه نقاط ساختار نيافته (تصادفي) از مدتها قبل به عنوان یک موضوع تحقيقاتي مطرح بوده است. اين مجموعه نقاط به روشهاي مختلفي از قبيل استفاده از اسكنرهاي ليزري، تصاوير استرئو، توتال استيشن‌ها وغيره مي‌توانند جمع-آوري شوند. بطوركلي ايجاد مدل سه بعدي یک شي شامل ۴ مرحله است.

جمع‌آوري داده: در اين مرحله مجموعه نقاط از قسمتهاي مختلف شي توسط یک سيستم اندازه‌گيري برداشت مي‌شوند.

ثبت داده‌ها: در اين مرحله تمامي داده‌هاي برداشت‌شده به یک سيستم مختصات منتقل و ثبت مي‌شوند.

ساختاردهي توپولوژي: در اين مرحله تمامي نقاط داراي یک ساختار مشخص مي‌شوند. سپس روي اين نقاط ساختار يافته، سطوحي قرار مي‌گيرد كه معمولا اين سطوح شبكه‌اي از مثلث‌ها هستند.

درونيابي: كه در آن مدلي ارائه مي‌شود تا در مورد نقاطي از سطح كه داده‌اي در مورد آنها نداريم، اطلاعات به ما بدهد.

در اين مقاله، بحث ما روي مرحله ساختاردهي توپولوژي روي مجموعه نقاط، به منظور ايجاد مدل رقومي زمين (DTM[1]) است. يكي از روشهاي ساخت مدل توپولوژي روش شبكه مثلثي نامنظم (TIN[2]) است. بهترين الگوريتم پيشنهاد شده براي ساخت یک TIN، الگوريتم دلوني است. در حالت دوبعدي اين الگوريتم بر اين اساس طراحي شده است كه نبايد هيچ نقطه چهارمي داخل دايره عبور كرده از سه نقطه یک مثلث، وجود داشته باشد. الگوريتم دلوني در حالت سه بعدی هم تعريف مي‌شود با اين تفاوت كه هيچ نقطه پنجمي داخل كره ايجاد شده توسط چهار نقطه ديگر، نبايد وجود داشته باشد. مثلث‌بندي دلوني پوسته محدب[3] مجموعه نقاط را مثلث‌بندي مي‌كند. الگوريتم دلوني در هنگام بازسازي سطوح در برخورد با سوراخ‌هاي موجود در شئ، همسايگي دو قسمت از شئ و شكستگي‌ها به خوبي عمل نمي‌كند. به همين دليل روش α-shape مطرح شده است كه قابليت انعطاف بيشتري دارد و در برخورد با مشكلات ذكر شده بهتر عمل مي‌كند. در اين مقاله نحوه ساختن α-shapeها و نيز چگونگي استفاده از آنها در بازسازي سطح رقومي زمين شـــرح داده

* نويسنده مسئول : تلفن : ۶۱۱۱۴۳۷۸ ، فاكس : ۸۸۰۰۸۸۳۷ ، Email: jamini@ut.ac.ir

شده است.

α-shape يک مجموعه نقاط، انتخاب مثلث‌هايي از مجموعه مثلث‌هاي حاصل از مثلث‌بندي دلوني مي‌باشد بطوري که يک شرط اضافي را تأمين مي‌کنند[۹].

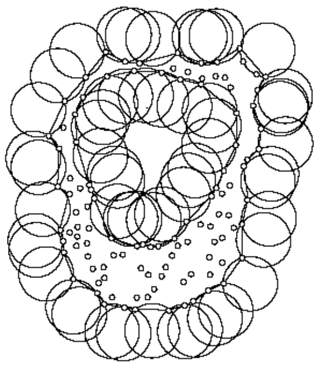
روشهاي متعددي براي ساختن شکل يک عارضه، با استفاده از مجموعه نقاط، پيشنهاد شده است. بويسن‌نت[۴] دو روش براي مثلث‌بندي يک مجموعه نقاط (يعني رأسهاي مثلث‌ها) پيشنهاد داد[۵]. روش اول بر اساس گرفتن نزديک‌ترين دو نقطه که تشکيل لبه مي‌دهند، شروع شده و نقطه سومي براي تشکيل مثلث انتخاب مي-شود. روش دوم بر اساس ايده مثلث‌بندي دلوني، تشکيل پوسته محدب مجموعه نقاط، و سپس حذف مثلث‌هاي مرزي است. ولت‌کمپ[۵][۶] روش γ-graph را پيشنهاد داد. اين روش ابتدا بر اساس پوستة محدب نقاط، مقداردهي اوليه مي‌شود و سپس به تدريج مرزهاي اضافي حذف مي-شوند تا سطح عبور کرده از تمام نقاط بدست آيد. هاپ[۶] و همکارانش[۷] يک تابع فاصله، براي مجموعه داده محاسبه مي‌کنند و سپس منحني صفر[۷] را به عنوان تقريب شيئ محاسبه مي‌کنند. α-shapeها در صفحه، ابتدا توسط ادلزبرونر[۸] و همکارانش [۸] معرفي و سپس به ابعاد بالاتر نيز بسط داده شدند[۱۱و۹]. آنها از اين ابزار به عنوان يک ابزار هندسي براي بيان شکل يک مجموعه نقاط تصادفي استفاده کردند. برنارديني[۹] و همکارانش [۱] از α-shapeها براي بازسازي و ساخت لوله‌هاي چند شاخه استفاده کردند. روشهاي بازسازي متعددي بر اساس α-shapeها و فيت‌کردن پچ بصورت جبري توسعه داده شده-اند[۲،۱۰،۱۲و۱۳].

در اين مقاله از α-shapeها براي مدل سازي رقومي زمين استفاده مي‌شود. با توجه به اينکه α-shapeها تا کنون در کاربردهاي مهندسي نقشه‌برداري مورد استفاده قرار نگرفته‌اند، بر آن شديم تا توانمندي‌هاي آنها را در يکي از کاربردها، DTM، بررسي نماييم. اين مقاله در ۵ بخش سازماندهي شده است. در بخشهاي باقيمانده، بخش ۲ در مورد مفاهيم α-shapeها، بخش۳ محدوديتهاي α-shape ها و روشهاي بهبود آن را توضيح مي دهد، بخش۴ پياده-سازي α-shapeها در DTM و قابليت α-shapeها را در مقايسه با مثلث‌بندي دلوني بيان مي‌کند و در انتها در بخش ۶ نتيجه‌گيري ارائه خواهد شد.

مفاهيم اوليه

تعريف α–shape ها

α-shape ها براي اولين بار توسط ادلزبرونر، در سال ۱۹۸۳در حالت دو بعدي مطرح شد[۸]، در سال ۱۹۹۴ همين شخص آن را براي سه بعدي نيز گسترش داد[۲]. براي فهم بهتر α-shapeها آن را با يک مثال شرح مي-دهيم. فرض کنيد نقاط مجموعه S، به عنوان نقطه‌هاي شکلاتي باشند که اطراف آنها را حجمي از بستني پوشانده است. اگر با يک قاشق مخصوص بستني، بدون اينکه به نقاط شکلاتي دست زده شود، شروع به برداشتن بستني شود و اين کار، تا جايي که امکان نفوذ در لابلاي نقاط شکلاتي باشد، ادامه يابد، چيزي که باقي مي‌ماند يک سطح از بستني است که داراي چاله‌ها و برجستگي‌هايي است که از يک سري منحني‌ها و کلاهک‌ها تشکيل شده است.

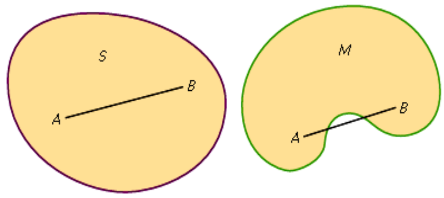


شکل ۱: نمايش α-shape يک مجموعه نقاط در حالت دوبعدي.

اگر همه وجوه و منحني‌ها با مثلث‌ها و خطوط صاف شود، چيزي که درنهايت باقي مي‌ماند α-shape مربوط به نقاط S است[۳]. شکل (۱) اين مسئله را در حالت دو بعدي نشان مي‌دهد. اما نقش α در اين مثال چيست؟ در جواب بايد گفت که α شعاع قاشقي است که با آن بستني جدا مي‌شود.

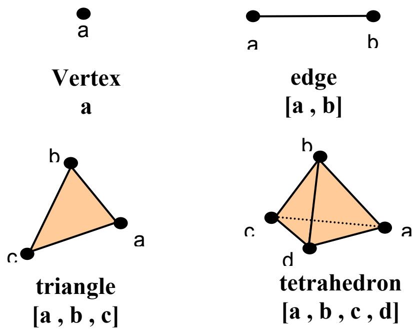
قبل از بيان چگونگي ساخت α-shapeها جهت آشنايي بهتر با بحث، برخي تعاريف اوليه آورده مي‌شود.

تحدب[۱۰] : اگر S يک مجموعه، در فضاي اقليدسي باشد، اين مجموعه را محدب گويند اگر به ازاي هر خط مستقيم و دلخواه در اين فضا تمام نقاط روي خط، عضوS باشند. شکل (۲) دو مجموعه محدب و غيرمحدب را نشان مي-دهد. در اين شکل S يک مجموعه محدب و M يک مجموعه غيرمحدب يا مقعر[۱۱] است.



شکل ۲ : مجموعه محدب و مقعر.

k-simplex : ترکيبي ساده و محدب ازK+1 نقطه با بعد K را k-simplex مي‌نامند. حداقل مقدار K برابرصفر (نقطه) و حداکثر مقدار آن ۳ (چهار وجهي) است. در شکل (۳)، k-simplex هاي مختلف نشان داده شده است.



شکل ۳ : k-simplexها در ابعاد مختلف.

پوسته محدب: روي مجموعه نقاط S از فضاي R^d، پوسته محدب S يک ترکيب محدب از نقاط S (لزوماً نه همه نقاط) است که همه نقاط S را در بر دارد.

وضعيت عمومي[12] : اگر S مجموعه‌اي از نقاط در فضاي R^3 باشد، آنگاه اين نقاط در وضعيت عمومي قرار دارند اگر داراي دو شرط زير باشند[۳].

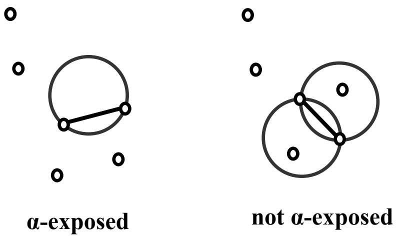
۱- هيچ چهار نقطه‌اي روي يک صفحه مشترک و هيچ پنج نقطه‌اي روي يک کره مشترک، قرار نگرفته باشند.

۲- به ازاي مقدار ثابت α ، اين مقدار با شعاع کوچکترين کره ساخته شده توسط ۲، ۳ و يا ۴ نقطه از S، برابر نباشد.

وضعيت عمومي تضمين مي‌کند که به ازاي هر زيرمجموعه اختياري از S با تعداد عضوهاي کمتر يا مساوي ۴، شکل محدب درست شده توسط نقاط اين زيرمجموعه يک k-simplex است و براي يک زير مجموعه مثلT آن را با ΔT نشان مي‌دهند.

λ-ball : يک گوي باز با شعاع λ که $0<\lambda<\infty$ است λ-ball گوييم. پس 0-ball يک نقطه و ∞-ball يک نيم‌فضاي باز را به ما مي‌دهد. يک λ-ball مثل b را تهي گويند هرگاه $b\cap S=\phi$.

α-exposed ؛ يک k-simplex را α-exposed مي‌گويند در صورتي که يک λ-ball تهي مثل b موجود باشد که اشتراک مرز b با S، عضوهاي اين k-simplex را به ما بدهد[۳]. مرز b در حالت دو بعدي محيط يک دايره، و در حالت سه بعدي سطح يک کره است. شکل (۴) نمونه‌اي از يک 1-simplex را در فضاي دو بعدي در حالت α-exposed نشان مي‌دهد.

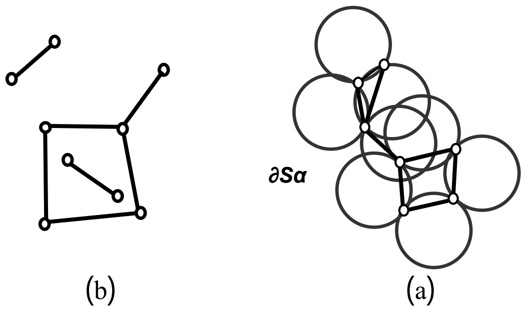


شکل ۴ : نمايش يک 1-simplex در حالت α-exposed.

مرز[13] : براي مجموعه نقاط S از فضاي R^d، مرز α-shape شامل همه k-simplexهاي S به ازاي $0\le k<d$ است که اين k-simplexها، α-exposed هستند. مرز S را با ∂Sα نشان مي‌دهند، که تعريف رياضي آن چنين است[۳].

$$\partial S\alpha = \{\Delta T \mid T \in S, |T| \le d \text{ and } \Delta T\ \alpha\text{–exposed}\} \quad (1)$$

∂Sα محدب نيست و مي‌تواند داراي سوراخ و چاله باشد. شکل ۵(a) يک مجموعه simplex که مي‌توانند يک مرز باشند را نشان مي‌دهد و شکل ۵(b) يک مجموعه simplex را نشان مي‌دهد، که مرز نيست.

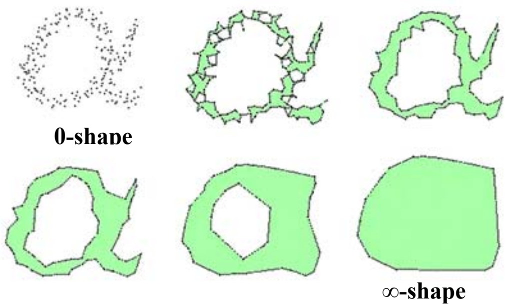


شکل ۵ : مرز يک مجموعه simplex.

α–shape و پوسته محدب

در مثال گفته شده در ابتداي مقاله، مشخص است که مقدار α تاثير مهمي در شکل بوجود آمده دارد؛ بطوريکه اگر α خيلي کوچک باشد، قاشق مي‌تواند در لابلاي نقاط نفوذ کند و همة حجم بستني با آن برداشته

شود بدون اينکه نقاط S جابجا شوند، در نهايت چيزي که باقي مي‌ماند خود نقاط S است. برعکس اگر α خيلي بزرگ باشد، بدون اينکه نقاط S جابجا شوند، قاشق نمي‌تواند در لابلاي نقاط نفوذ کند و در نهايت چيزي که باقي مي‌ماند يک پوسته محدب از S است(شکل ۶).



شکل۶ : α-shapeها به ازاي مقادير مختلف α.

براي اينکه بتوانيم يک سطح را بدرستي بازسازي کنيم بايد بهترين مقدار را براي α تعيين کنيم.

رابطه α–shape و مثلث بندي دلوني

در اين قسمت نشان داده مي‌شود که مرز α-shape ها به ازاي هرمقدار α، زير مجموعه‌اي از مثلث‌بندي دلوني است.

مثلث‌بندي دلوني را ابتدا به صورت زير تعريف مي‌کنيم :

اگر S مجموعه‌اي از نقاط در فضاي R^d باشد (d=2,3) آنگاه مثلث‌بندي دلوني مربوط به S، شامل مجموعه k-simplexها(0≤k≤d) مي‌باشد که در دو شرط زير صدق کنند:

- به ازاي همه d-simplexهاي ΔT که T زير مجموعه S است، دايره محيطي (d=2) و يا کره محيطي (d=3) مربوط به آن، شامل هيچ نقطه ديگري از S نباشد.
- همه k-simplexهايي که وجهي از يک simplex ديگر هستند خودشان عضو مثلث‌بندي دلوني باشند.

با توجه به تعريف بالا قضيه۱ تعريف مي‌شود[۳].

قضيه ۱ : اگر ΔT يک k-simpex از S و α-exposed باشد، آنگاه:

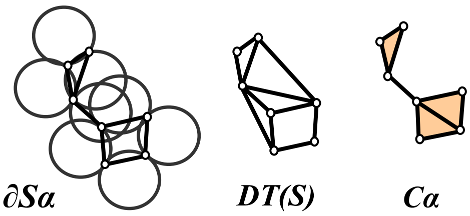
$\Delta T \in DT(S)$ (DT:Delunay Triangulation)

α-Complex : براي محاسبه و تشکيل α-shape استفاده مي‌شود که به اثبات وجود يک ساختار از نقاط S که ∂Sα مرز آن باشد، کمک مي‌کند. براي محاسبه α-shape (به طور دقيق تر، مرز يک شکل) مي‌توان براي مقدار خاصα، با توجه به اينکه $\partial S\alpha \subset DT(S)$، کافي است simplex-هايDT بررسي شود. بنابراين ، براي هر k-simplex مثل ΔT که $\Delta T \in DT(S)$،کافي است مشخص باشد که اين k-simplex عضو ∂Sα است يا نه. براي اين مسئله بايد بررسي شود به ازاي اين k-simplex خاص، دايره يا کره محيطي روي نقاط آن تهي است يا نه. اگر تهي بود، به عنوان يک k-simplex عضو ∂Sα مي‌شود. اين عمل براي وقتي که k=d باشد به راحتي بيان مي‌شود. ولي براي k-simplexهايي که k<d باشد، به اين آساني نمي‌توان آن را بيان کرد. به همين دليل قبل از اينکه مستقيم ∂Sα ساخته شود، ابتدا يک ساختار ميانه که α-Complex ناميده مي‌شود و با Cα(S) نشان داده مي‌شود، ساخته شده و با استفاده از آن، ساختار جديد ∂Sα نيز بدست مي‌آيد.

تعريف α-Complex **:** اگر σT و μT بترتيب شعاع و مرکز دايره محيطي يک k-simplex اختياري باشد، در اين صورت مجموعه‌ي همه‌ي k-simplexهاي ΔT عضو DT که در دو شرط زير صدق مي‌کنند، Cα(S) را تشکيل مي‌دهند[۳].

- σT<α و σT-ball واقع شده در μT تهي باشد.
- ΔT يک وجه از يک simplex ديگر در Cα(S) باشد.

در شکل (۷)، Cα(S)، DT(S) و ∂Sα براي يک سري نقطه اختياري، در حالت دو بعدي نشان داده شده است.



شکل۷ : نمايش Cα(S)، DT(S) و ∂Sα در حالت دو بعدي.

مطابق شکل، مرز Cα(S) و ∂Sα کاملاً شبيه يکديگرند، اين مسئله اتفاقي نيست. ثابت مي‌شود براي هر مجموعه نقطه ديگر، اين رابطه نيز صادق است.

ارتباط α-Complex و α-shape با چند قضيه به صورت زير بيان مي‌شود[۳].

قضيه ۲ :به ازاي هر ΔT اگر $\Delta T \in \partial S\alpha(S)$ آنگاه $\Delta T \in C\alpha(S)$.

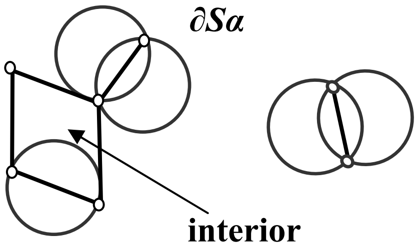
قضيه ۳ : به ازاي هر ΔT اگر $\Delta T \in \partial S\alpha(S)$ آنگاه $\Delta T \in \partial C\alpha(S)$.

قضيه ۴ :به ازاي هر ΔT اگر $\Delta T \in \partial C\alpha(S)$ آنگاه $\Delta T \in \partial S\alpha(S)$.

قضيه ۵ : چون $\partial C\alpha(S) \in \partial S\alpha(S)$.

بنابراين، مرز α-Complex، همان مرز α-shape است.

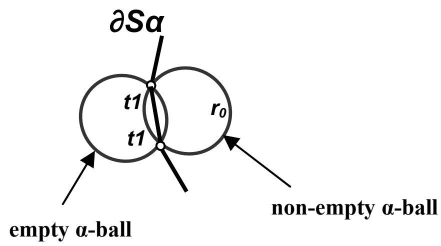
داخل α-shape : مسئلهاي كه مطرح ميشود اين است كه چطور تشخيص داده شود قسمت داخلي α-shape در كدام طرف يک k-simplex قرار دارد. مثلاً در شكل (۸)، دو خط سمت راست، هيچ كدام قسمت داخلي يک-α shape را نشان نميدهند، در حاليكه چهار خط سمت چپ همه بخشي از داخل يک α-shape را احاطه ميكنند.



شكل۸ : داخل α-shape .

در اين حالت، يک طرف هر كدام از اين چهار خط را فضاي داخلي و طرف ديگر فضاي خارجي ناميده ميشود. اينكه آيا يکk-simplex بخش داخلي α-shape را احاطه ميكند در قضيه ۶ آمده است.

قضيه ۶ :اگر $\Delta T \in \partial C\alpha(S)$ و ΔT يک قسمت از مرز α-shape باشد، آنگاه ΔT داخل يک α-shape را احاطه ميكند، اگر تنها يكي از دو α-ball اطراف ΔT تهي باشند (شكل ۹).



شكل۹: تشخيص روي مرز قرار داشتن يک simplex .

در مورد ارتباط مقدار α و α-Complex قضيه ۷ به صورت زير بيان شده است.

قضيه ۷ : اگر $\alpha_1 \le \alpha_2$ آنگاه

$S\alpha_1(S) \subset S\alpha_2(S)$ و $C\alpha_1(S) \subset C\alpha_2(S)$.

سوالي كه اينجا مطرح مي شود اين است كه با استفاده از *Cα(S)* چگونه *α-shape* ساخته شود؟ در پاسخ به اين سوال ادلزبرانر[۳] الگوريتم زير را پيشنهاد داده است.

الگوريتم ادلزبرانر جهت ساخت α-shape

اين الگوريتم شامل ۳ مرحله است :

- محاسبه مثلثبندي دلوني: مشخص است كه مرز -α shapeها زير مجموعه مثلثبندي دلوني است.
- *تعيين* Cα : همه simplex هاي ΔT متعلق به DT بررسي ميشود. اگر σT-ball واقع شده درμT تهي باشد و σT<α باشد، آنگاه ΔT همراه با همه وجههاي آن متعلق به Cα است(اين بررسي α-test ناميده ميشود.).
- *ساخت* α-shape *بوسيله* Cα : مشخص است همه -d simplexهاي Cα داخل Sα را ميسازند و نيز مرز Cα، مرز Sα را تشكيل ميدهد.

پس در كل مراحل اين الگوريتم ، سه كار لازم است انجام شود. ۱)محاسبه مثلثبندي دلوني، الگوريتمهاي زيادي وجود دارند كه اين كار را انجام ميدهند، لذا مشكلي در اين مرحله وجود ندارد. ۲) مسئله α-test، اينكه آيا -σT ball تهي است يا نه. اين كار هم با بررسي همه نقاط P متعلق به S غير از نقاط T ميتواند صورت گيرد. ۳) اينكه راهي براي بررسي روي مرز بودن يا نبودن يک simplex در Cα مثل ΔT، پيدا شود اگر فرض شود كه مثلثبندي دلوني علاوه بر مثلثبندي مشخص كند كه هر simplex روي مرز پوسته محدب S قرار دارد يا نه. اين مشكل با قضيه زير رفع ميشود :

قضيه ۸ : فرض كنيدΔT يک simplex درCα(S) باشد. اگر $\Delta T \in \partial Conv(S)$ آنگاه مطمئناً روي مرز Cα(S) قرار دارد. در غير اين صورت داخل Cα(S) است، اگر همه simplexهاي DT(S) نيز كه به طور كامل شامل ΔT هستند، در Cα(S) باشند.

در عمل اين الگوريتم به اين صورت كار ميكند، كه براي هر k-simplex مثل ΔT سه بازه تعريف ميشود، بسته به اينكه α در كدام بازه قرار داشته باشد معلوم ميشود اين simplex، روي مرز Cα(S)، داخل Cα(S) قرار دارد و يا اينكه اصلاً در Cα(S) قرار ندارد.

اين فواصل به صورت زير است :

$$\Delta T \ \text{is} \ \begin{cases} \text{not in } C\alpha & (\text{for } \alpha < a) \\ \text{in } \partial C\alpha & (\text{for } \alpha \in (a,b)) \\ \text{interior to } C\alpha & (\text{for } \alpha \in (b,\infty)) \end{cases}$$

اين الگوريتم دو فايده مهم دارد. اول اينكه به يک α خاص محدود نمي‌شود ؛ چون با فاصله‌ها كار مي‌كند. يعني $\Delta T \in S\alpha$ اگر $\alpha \in I = [a, \infty]$ باشد و دوم اينكه براي simplexهاي داخلي و روي مرز، جداگانه عمل نمي‌كند. بجاي اينكه جداگانه عمل كند براي هر simplex سه بازه به صورت بالا تعريف مي‌كند. پس كافي است براي هر simplex مقدار a وb پيدا شود. براي محاسبه a وb مربوط به d-simplex ها، مسئله ساده است، اگر σT<α باشد و يک d-simplex روي α-Complex قرار دارد (همان α-test). چون هميشه d-simplexها در قسمت داخل Cα هستند پس a=b=σT، يعني براي تعيين فواصل مربوط به d-simplexها مشكلي وجود ندارد. براي محاسبه a و b براي k-simplexهايي كه در آن‌ها k<d است، با استفاده از a و b محاسبه‌شده، براي (k+1)-simplexها استفاده مي‌شود. مشخص است كه براي هر k-simplex مثل ΔT، دو(k+1)-simplex مثل ΔU وΔV وجود دارد كه ΔT يک قسمت از آنها مي‌باشد. ΔU وΔV، super simplexهاي ΔT ناميده مي‌شوند. حال براي مشخص كردن وضعيت ΔT از دو قضيه زير استفاده مي‌شود:

قضيه ۹ : فرض كنيد ΔT يک k-simplex در DT(S) به ازاي k<d باشد و همه بازه‌هاي Bu مربوط به (k+1)-simplexهايΔU عضو DT(S) را كه به ازاي آن $\Delta U \in C\alpha$ است محاسبه شده باشد. اگر

a = min {au | Bu = (au, bu), ΔU (k+1)-Simplex، $T \subset U$}

آنگاه $\Delta T \in C\alpha$ است اگر و تنها اگر $\alpha \in (a, \infty)$.

قضيه ۱۰ : فرض كنيد ΔT يک k-simplex درCα به ازاي k<d باشد و همه بازه‌هاي Bu مربوط به (k+1)-simplexهايΔU، عضو DT(S) را كه به ازاي آن $\Delta U \in C\alpha$ است، محاسبه شده باشد. اگر

b = max {au | Bu = (au, bu), ΔU (k+1)-Simplex ,$T \subset U$ }

آنگاه $\Delta T \in \partial C\alpha$ است اگر و تنها اگر $\alpha \in (b, \infty)$.

محدوديت‌هاي α-shape كلاسيک و روشهاي بهبود آن

محدوديت ها:

مهمترين مشكلاتي كه هنگام بازسازي سطح با استفاده از α-shapeها وجود دارد عبارتند از: انتخاب بهترين α و توزيع مناسب نقاط. با توجه به اينكه به ازاي αهاي مختلف سطح تغيير مي‌كند (شكل ۱۲ سطوح مختلف بدست آمده از يک مجموعه نقاط به ازاي αهاي مختلف را نشان مي دهد) بنابراين تعيين مقدار α مناسب براي بازسازي سطح يک مسئله است. مسئله ديگر اين كه α-shape خيلي به چگالي و وضعيت نقاط وابسته است. در صورتيكه توزيع نقاط يكنواخت ولي چگالي خوبي از نقاط در سطح وجود نداشته باشد α-shape جواب خوبي نمي‌دهد. وقتي نقاط در سطح داراي چگالي كم باشند، بايد α ي بزرگتري جهت پذيرفته‌شدن مثلث‌ها گرفته شود؛ كه با مشكلات: بسته شدن سوراخ‌ها، اتصال اشياء همسايه به همديگر، و خوب مشخص نشدن شكستگي‌هاي شديد مواجه خواهد شد.

روشهاي بهبود α-shape

سه روش براي بهبود α-shape پيشنهاد شده است :

الف) α-shape هاي وزن‌دار

در اينجا به هر نقطه از S يک وزن داده مي‌شود، بطوريكه نقطة داراي وزن بيشتر، تمايل بيشتري براي اتصال با نقاط همسايه خود دارد. مي‌توان گفت α-shape كلاسيک حالت خاصي از α-shape وزن‌دار است كه در آن وزن همه نقاط برابر و مساوي يک است [۳].

ب)α-shape هاي مقياس چگالي

اين ضريب مقياس توسط تيچمن[۱۴] و كاپز[۱۵] در سال ۱۹۹۸ مطرح شد[۴]. دراينجا براي هر مثلث يک ضريب چگالي مشخص مي‌شود كه مقدار α براي هر مثلث با توجه به اين ضريب تغيير مي‌كند. براي محاسبه چگالي هر مثلث راه‌هاي زيادي وجود دارد. يكي از راه‌ها ميانگين‌گيري از ضريب چگالي نقاط تشكيل‌دهنده هر مثلث است. با اين روش در مناطق چگالتر، از سطح جرئيات بيشتري بدست مي آيد.

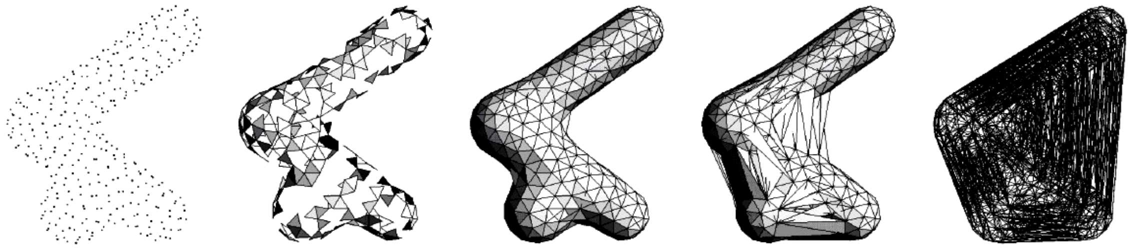
ج)α-shape هاي غير آيزوتروپيک

تيچمن و كاپز همزمان با "مقياس چگالي" يک مقياس ديگر ، مقياس غيرآيزوتروپيک، مطرح كردند. اين مقياس باعث مي‌شود كه مثلث‌هاي قرار گرفته در روزنه‌ها در α-test رد شوند. به اين ترتيب مشكل α-shape با روزنه‌ها و اتصالات نقاط همسايه حل مي‌شود [۴]. شكل (۱۳) نتايج بدست آمده از دو روش اخير را نشان مي‌دهد[۴]. شكل (۱۳ – الف)سطح حاصل از α-shape

كلاسيك را نشان مي‌دهد، شكل (١٣ – ب) سطح حاصل از مقياس‌چگالي و شكل (١٣ – ج) سطح بازسازي شده با استفاده از تركيب مقياس چگالي و مقياس غير آيزوتروپيكي را نشان مي‌دهند.

كار عملي و قابليت α-shape ها در مقايسه با مثلث‌بندي دلوني

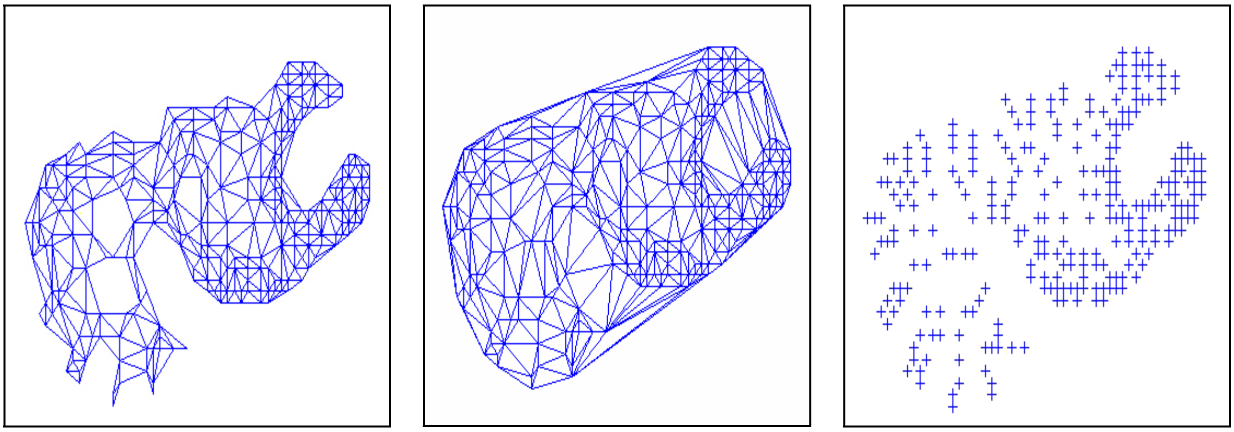
همانطور كه قبلا گفته شد يكي از روش‌هاي مثلث‌بندي جهت بازسازي سطوح، الگوريتم دلوني است. الگوريتم دلوني بر اين مبنا كه هيچ نقطه چهارمي داخل دايره گذرنده از سه نقطه ديگر نباشد، عمليات مثلث‌بندي را انجام مي‌دهد. نتيجه‌اي كه از دلوني بدست مي‌آيد هميشه يک پوسته محدب از نقاط است و اين مشكلي است كه در بازسازي سطوح مختلف مانند يک DTM با استفاده از الگوريتم مثلث‌بندي دلوني بوجود مي‌آيد. علاوه بر آن ضعف مثلث بندي دلوني در تعيين گپ‌هاي يک سطح، يكي ديگر از مشكلاتي است كه در مثلث‌بندي با اين روش وجود دارد. منظور از گپ مناطقي است كه نبايد در بازسازي سطح از آن استفاده شود. دليل بوجود آمدن آنها ممكن نبودن برداشت نقاط در آن مناطق (مثل دره‌ها و قله هاي مرتفع)، يا وجود يک عارضه ساخته دست بشر (مثل ساختمان) است. هنگامي كه مثلث بندي انجام مي‌شود، در روش دلوني با توجه به اينكه هدف صرفا تعيين مثلث‌ها است، اين روش قابليت در نظر نگرفتن گپ‌ها را ندارد و در هنگام بازسازي سطح، آنها مانند ساير مناطق سطح استفاده مي‌شوند؛ در حالي كه در آن مناطق هيچ نقطه‌اي برداشت نشده‌است. به همين دليل در هنگام انترپوله كردن ممكن است خطاي فاحشي بوجود مي‌آيد. سوالي كه مطرح مي‌شود اين است كه در برخورد با اين گپ‌ها چه بايد كرد. در عمل وقتي كه از مثلث‌بندي دلوني استفاده مي‌شود، چاره‌اي جز حذف آنها به صورت دستي وجود ندارد. اين مسئله هنگامي كه تعداد گپ‌ها زياد باشد، مشكل مي‌شود. در اين جاست كه α-shapeها قابليت خود را نشان مي‌دهند. همانطور كه قبلا گفتيم α-shapeها با گرفتن يک α-ball و حركت دادن آن بر روي مثلث‌هاي بدست‌آمده از مثلث‌بندي دلوني مي‌تواند مثلث‌هاي اشتباه (مانند مثلث‌هايي كه گپ‌ها را در بر مي‌گيرند.) را چه روي مرز و چه داخل منطقه حذف كند؛ يعني تشخيص گپ ها اتوماتيک انجام مي‌گيرد. علاوه بر تعيين اتوماتيك گپ‌ها، توانايي α-shapeها در تعيين مـرز



شكل ١٢: سطوح بدست آمده با استفاده از αهاي مختلف.

الف ب ج

شكل ١٣ : مقايسه روشهاي بهبود α-shape ها. (الف)نتيجه حاصل از α-shape كلاسيک. (ب) نتيجه حاصل از روش چگالي مقياس. (ج) نتيجه حاصل از تركيب مقياس چگالي و غير آيزوتروپيكي.


الف ب ج

شكل ۱۴: مجموعه داده اول (الف)- نقاط.(ب)-مثلث‌بندي دلوني.(ج)- مثلث‌بندي حاصل از α-shape به ازاي ۰/۰۲۴۵= α.

منطقه هم قابل توجه است. همانطور كه گفتيم مثلث‌بندي دلوني هميشه يک پوسته محدب از نقاط را به ما مي‌دهد در حالي كه هدف از برداشت ما هميشه پوسته محدب نيست. α-shapeها بدليل قابليت انعطاف‌پذيري بالا مي‌توانند مرز دقيق شكل‌ها را تعيين كنند. اين قابليت α-shapeها بيشتر در بازسازي سطوح سه‌بعدي كه مرز سطح نقش مهمي در بازسازي دقيق سطح دارد، استفاده مي-شود. در اين حالت α-shapeها با در نظر گرفتن يک α-ball كروي، چهاروجهي‌هاي اشتباه روي مرزها را حذف مي‌كنند و مرز دقيق را مشخص مي‌كنند.

در اين تحقيق، براي مقايسه سطح حاصل از روش دلوني و α-shape برنامه‌اي در نرم افزار MATLAB نوشته شد كه قابليت ترسيم مثلث‌بندي دلوني و α-shapeها به ازاي αهاي مختلف را دارد. برنامه فوق روي دو مجموعه داده جهت نشان‌دادن توانمندي‌هاي α-shapeها در مقايسه با روش مثلث‌بندي دلوني تست گرديد.

مجموعه اول شامل نقاطي مطابق شكل (۱۴ – الف) بود. با انجام مثلث‌بندي دلوني روي نقاط فوق، سطح مثلث-بندي شده مطابق شكل (۱۴ – ب) بدست آمد. با استفاده از α-shapeها و انجام مثلث‌بندي روي همين نقاط، پس از تست αهاي مختلف به ازاي ۰/۰۲۴۵= α به سطحي مطابق شكل (۱۴ – ج) رسيديم. از مقايسه شكل (۱۴ – ب) و (۱۴ – ج)، مشاهده مي‌شود قسمت‌هايي كه در آنها داده موجود نبوده در شكل (۱۴ – ج) استخراج شده است. به عبارتي در شكل (۱۴ – ج) مرز عارضه كاملاً استخراج شده است، در حاليكه در شكل (۱۴ – ب) پوسته محدب نقاط به عنوان مرز استخراج شده است.

مجدداً همين كار، براي مجموعه داده ۲ مطابق شكل (۱۵ – الف) تست گرديد. در اين مجموعه داده بدليل قابل دسترس نبودن قسمتي از منطقه، امكان برداشت نقاط وجود نداشته است. لذا پس از انجام مثلث‌بندي دلوني روي نقاط فوق شكل (۱۵ – ب) حاصل گرديد، با استفاده از α-shapeها، پس از تعيين αي مناسب ۴۰، سطح مثلث‌بندي شده، مطابق شكل (۱۵ – ج) حاصل گشت.

همانطور كه شكل (۱۵ – ب) نشان مي‌دهد، در مثلث-بندي دلوني منطقه‌اي كه در آن هيچ نقطه‌اي برداشت نشده بود جزو ناحيه مثلث‌بندي در نظر گرفته شده است درحالي‌كه در مثلث‌بندي توسط α-shapeها، مشاهده مي‌شود اين قسمت به طور كامل شناسايي و از مثلث‌بندي حذف شده‌اند.

به منظور ارزيابي دقت روش فوق در بازسازي مدل رقومي زمين، روي سطوح ايجاد شده توسط دو مجموعه داده، دو سري نقاط يكسان در دو سطح انتخاب گرديد. سري اول نقاط طوري انتخاب گرديد كه تعدادي از آنها (چهار نقطه) روي مثلث‌هايي كه ناخواسته در روش دلوني ايجاد شده بودند قرار گرفتند. سري دوم نقاط، نقاطي بودند كه روي مثلث‌هاي حاصل از روش α-shape قرار گرفتند (جدول ۱). پس از محاسبه خطاي RMS در هرروش (ستونهاي ۲و ۴ از جدول ۱) روي مجموعه دادة ۱و ۲، در انتها خطاي RMS كلي (ستون آخر جدول ۱) براي هر روش محاسبه گرديد. همانطور كه در جدول (۱) ملاحظه مي‌شود مقدار خطاي روش α-shape نسبت به

روش دلوني تقريبا ۲۵ درصد كمتر است. در حين اينكه كلية مثلث‌هاي اضافي در روش فوق حذف گرديده است.

جدول ۱: ارزيابي دقت بازسازي مدل رقومي زمين.

	مجموعه داده ۱		مجموعه داده ۲		RMS(m)
	RMS(m)	تعداد نقاط	RMS(m)	تعداد نقاط	
روش دلوني	۱/۱۲۲	۱۶	۱/۲۴	۱۸	۱/۷۴
روش α-shape	۰/۲۳	۱۱	۰/۳۱	۱۴	۰/۳۹

نتيجه‌گيري

در اين تحقيق، نشان داده شد كه α-shape به عنوان يک الگوريتم مؤثر در مدل‌سازي رقومي زمين مي‌تواند استفاده شود. α-shape ها در مقايسه با الگوريتم دلوني كه هميشه پوسته محدب شي را نتيجه مي‌دهد، مرز يک شئ هرچند پيچيده را مي‌دهند.

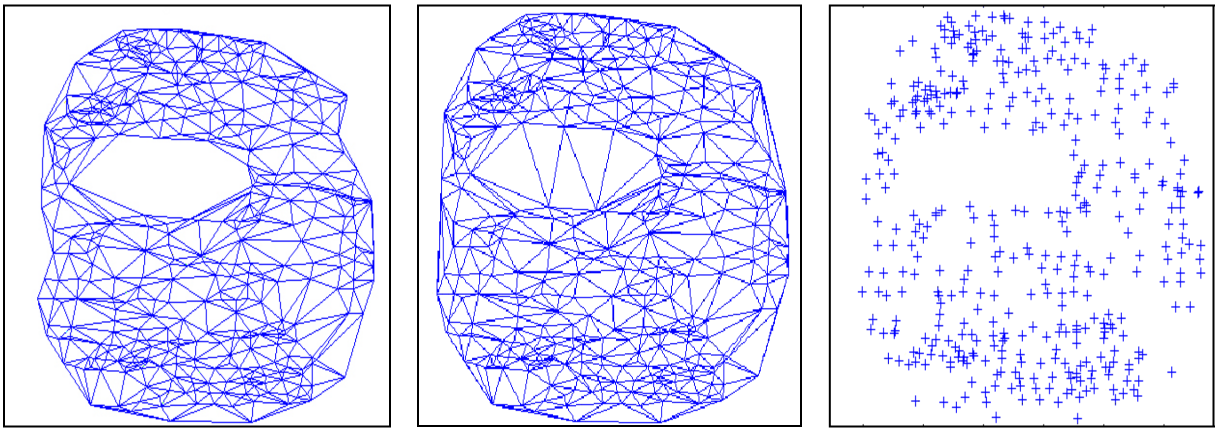
همچنين، نشان داده شد در صورت استفاده از α-shapeها در DTM، دقت تقريبا ۲۵ درصد افزايش مي‌يابد.

α-shape ها بدليل داشتن معيار كنترلي α مي‌توانند براي تعيين گپ‌ها و تصحيح مثلث‌هاي بدست آمده از مثلث‌بندي دلوني استفاده شوند.

با توجه به قابليت α-shapeها در تعيين مرز، و با توجه به اينكه وقتي يک سطح سه‌بعدي بازسازي مي‌شود، مهمترين و اصلي‌ترين مرحله بازسازي تعيين مرز است، مي‌توان از α-shape ها براي بازسازي سطوح سه‌بعدي در داده‌هايي مانند داده‌هاي ليزر اسكنر استفاده كرد.

براي بهبود الگوريتم α-shape مي‌توان از تكنيک‌هايي مانند α-shapeهاي وزن‌دار، استفاده از چگالي مقياس و استفاده از α-shapeهاي غيرآيزوتروپيكي استفاده كرد. اين روشها قادرند قابليت انعطاف α-shape ها را در تعيين جزييات بيشتر نشان دهند.

بنابراين، با توجه به توانايي‌هاي α-shapeها در بازسازي سطوح وانجام تحقيقاتي در اين مورد، مخصوصا در مسئله تعيين مرز، استفاده از α-shapeها در داده‌هاي ليزر اسكن پيشنهاد مي‌شود كه تحقيقات جديدي در فتوگرامتري را ايجاد خواهند نمود (اين كار توسط مولفين در حال انجام مي‌باشد).



ج   ب   الف

شكل ۱۵: مجموعه داده دوم (الف)- نقاط.(ب)-مثلث‌بندي دلوني.(ج)- مثلث‌بندي حاصل از α-shape به ازاي α =۴۰.

مراجع

1 - Bernardini, F. and Bajaj, C. (1997). "Sampling and reconstructing manifolds using alpha-shapes." *Tech. Rep. CSD-TR-97-013*, Department of Computer Sciences, Purdue University.

2 - Edelsbrunner, (1994). "Three Dimentional alpha-shapes." *ACM Trans.Graph,* Vol.13, No. 1.

3 - Kasper Fisher, (2000). *Introduction to Alpha Shapes.*

4 - Teichmann, M. and Capps, M. (1998). *Surface reconstruction with anisotropic density- scaled alpha-shapes.*

5 - Boissonnat, J. D. (1984). "Geometric structures for three dimensional shape representation." *ACM Trans. Graph.*, Vol. 3, No. 4, PP.266-286.

6 - Veltkamp, R. C. (1992). *Closed object boundaries from scattered points*. PhD thesis, Center for Mathematics and Computer Science, Amsterdam.

7 - Hoppe, H., DeRose, T., Duchamp, T., McDonald, J. and Stuelzle, W. (1992). "Surface reconstruction from unorganized points." *Computer Graphics*, Vol. 26, No. 2, PP. 71-78. Proceedings of SIGGRAPH 92.

8 - Edelsbrunner, H., Kirkpatrick, D. G. and Seidel, R. (1983). "On the shape of a set of points in the plane." *IEEE Trans. Inform,* Theory IT-29, PP.551-559.

9 - Edelsbrunner, H. and M¨ucke, E. P. (1994). "Three dimensional alpha shapes." *ACM Trans. Graph*. Vol. 13, No. 1, PP.43-72.

10 - Stelldinger, P., K. and othe, U. (2005). *Towards a General Sampling Theory for Shape Preservation. Image and Vision Computing*, Vol. 23, No. 2, PP.237-248.

11 - Edelsbrunner, H. (1992). *Weighted alpha shapes. Tech. Rep.UIUCDCS-R-92- 1760*, Department of Computer Science, University of Illinois, Urbana- hampagne, IL.

12 - Stelldinger, P. (2005). *Digitization of Non-regular Shapes.* In: Ronse, C., Najman, L., Decenciere, E. (eds.): Mathematical Morphology, ISMM.

13 - Stelldinger, P., Kothe, U. and Meine, H. (2006). *Topologically Correct Image Segmentation using Alpha Shapes*. University Hamburg, Computer Science Department, Technical Report FBI-HH-M-336/06.

واژه های انگلیسی بترتیب استفاده در متن

1 - DTM =Digital Terrain Model
2 - TIN = Triangles Irregular Networks
3 - ex-Hull
4 - Boissennat
5 - Veltkamp
6 - Hoppe
7 - Zero-Countour
8 - Edelsbrunner
9 - Bernardini
10 - Conexity
11 - Concave
12 - General Position
13 - Boundary
14 - Tiechmann
15 - Capps