بازنگری و توسعه در خواص و قضایای توابع تبدیل SPR

مجتبی حکیمی مقدم
فارغ التحصیل کارشناسی ارشد کنترل - دانشگاه فردوسی مشهد
حمید خالوزاده
استادیار گروه کنترل - دانشگاه خواجه نصیر الدین طوسی

(تاریخ دریافت ۸۴/۱/۳۱ ، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۵/۴/۱۷ ، تاریخ تصویب ۸۵/۷/۸)

چکیده

مفهوم توابع تبدیل SPR در اوایل دهه ۱۹۶۰ و در ارتباط با فراپایداری مجانبی مطرح شد و بدلیل کاربرد در مقوله پایداری خیلی سریع در زمینه های مختلف کنترل مورد استفاده قرار گرفت؛ با این حال پس از گذشت چهار دهه هنوز در مورد شرایط لازم و کافی برای تشخیص SPR بودن یک اتفاق نظر کلی وجود ندارد و در کتب و مقالات بیانهای متفاوتی برای شرایط لازم و کافی دیده می شود. در این مقاله چهار بیان غالب که به ارائه شرایط لازم و کافی در ارتباط با توابع تبدیل SPR می پردازند، مورد نقد و بررسی قرار می گیرد و نقایص احتمالی موجود در هر یک از آنها بیان می گردد. سپس یک خاصیت (شرط لازم) جدید برای توابع تبدیل SPR اثبات می شود که از رفتار دیاگرام نایکوییست در فرکانسهای به اندازه کافی بزرگ ناشی می شود. در پایان با استناد به خاصیت جدید و ابزارهای موجود در آنالیز مختلط بیان کاملتری از شرایط لازم و کافی در تشخیص توابع تبدیل SPR بازگو می شود و به کمک آن به این سؤال اساسی پاسخ داده می شود که « یک تابع تبدیل حقیقی مثبت(PR) تحت چه شرایطی اکیداً حقیقی مثبت (SPR) خواهد بود»

واژه های کلیدی: توابع تبدیل حقیقی مثبت (PR)[۱] و اکیداً حقیقی مثبت (SPR)[۲]، شرایط لازم و کافی برای SPR بودن، اصل ماکزیمم قدر مطلق

مقدمه

مفهوم توابع PR در ارتباط با تحقق پذیری امپدانس $Z(s)$ با المانهای مثبت مقاومت، سلف، خازن و تزویج ایده آل مطرح شد و شرط کفایت و بسیاری از خواص آن توسط اُتُ برون در سال ۱۹۳۰ استخراج گردید، او اثبات کرد که هر تابع تبدیل گویا با ضرایب حقیقی، امپدانس نقطه تحریک یک شبکه تک قطبی خطی، غیر فعال، فشرده، دوجانبه و نامتغیر با زمان است؛ اگر و فقط اگر حقیقی مثبت (PR) باشد[۱۳]. در سال ۱۹۶۱ پوپوف نظریه فراپایداری[۱] را مطرح کرد و نشان داد که یک سیستم خطی نامتغیر با زمان فراپایدار است اگر و فقط اگر تابع تبدیل آن حقیقی مثبت یا PR باشد و بطور مجانبی فراپایدار است، اگر و فقط اگر تابع تبدیل آن اکیداً حقیقی مثبت یا SPR باشد[۱]. بلافاصله یاکوبوویچ و کالمن کار پوپوف را در فضای حالت دنبال کردند و معادل فضای حالتی فراپایداری را بصورت یک لم استخراج نمودند که امروزه به لم KYP[۳] یا لم PR معروف است[۲]. همچنین کالمن نشان داد که حل مسأله معکوس کنترل بهینه با استفاده از نظریه فراپایداری به قانون کنترل بهینه LQR منجر می شود[۳]. نظریه فراپایداری پوپوف به سرعت در کنترل تطبیقی مدل مرجع مورد استفاده قرار گرفت و نشان داده شد که در بیشتر مواقع استفاده از این نظریه ساده تر از نظریه پایداری لیاپانوف است[۴]. امروزه از این نظریه در اغلب زیر شاخه های کنترل از جمله کنترل تطبیقی، کنترل غیر خطی، کنترل مقاوم و کنترل فازی استفاده می گردد. بدلیل کارهای با ارزشی که در دهه ۱۹۷۰ توسط ویلمز و سپس دسور و ویدیاساگار انجام گرفت، امروزه بجای اصطلاح فراپایداری از غیر فعال بودن[۴] و بجای اصطلاح فراپایداری مجانبی از تلفاتی بودن[۵] استفاده می شود [۱۴]. در سال ۱۹۷۳ نارِندرا و تیلور[۱۵]

[1]- در نظریه فراپایداری (Hyperstability) علاوه بر پایداری قطبهای تابع تبدیل شرایط دیگری نیز باید برآورده شود که از جمله آنها می توان به پایداری صفرها اشاره نمود. امروزه بجای اصطلاح فراپایداری از غیر فعال بودن و بجای فراپایداری مجانبی از تلفاتی بودن استفاده می شود.

با دیدگاه مداری مفهوم SPR بودن را به امپدانس نقطه تحریک یک شبکه تک قطبی مرتبط ساختند و شبکه تلفاتی خاصی را معرفی نمودند که هر المان آن تلفاتی بود. با توجه به اینکه استفاده مستقیم از تعاریف پایه برای تعیین SPR بودن یک تابع با زیاد شدن درجه صورت و مخرج بسیار مشکل می شود؛ خواص (شرایط لازم) و قضایای (شرایط لازم و کافی) متعددی بیان شده تا مسأله تشخیص این توابع را حتی الامکان تسهیل نمایند. قضایای بیان شده در این مقوله عموماً مبین شرایط لازم و کافی برای PR بودن یا SPR بودن هستند و فضای جستجو در صفحه مختلط $s=\sigma+j\omega$ را از نیم صفحه $\sigma\geq 0$ به نیم خط $\omega\geq 0, \sigma=0$ تقلیل می دهند و بسیاری از مشکلات استفاده از تعاریف را مرتفع می سازند. البته اگر تعداد قطبها و صفرهای تابع زیاد باشد استفاده از این قضایا نیز با دشواریهایی همراه خواهد بود. در مقابل یک خاصیت برای توابع PR یا SPR مبین شرط لازمی است که معمولاً از ظاهر تابع تبدیل (حتی برای توابع با تعداد قطبها و صفرهای متعدد) براحتی برقراری یا عدم برقراری آن قابل تشخیص است و تابع باید آنرا دارا باشد تا بتواند PR یا SPR تلقی شود. بدین ترتیب اگر یک تابع حتی یکی از خواص را دارا نباشد بلافاصله PR نبودن یا SPR نبودن آن قابل استنتاج است، درحالیکه اگر تمامی خواص را دارا باشد بناچار باید برقراری شرایط لازم و کافی مطرح شده در قضایا را بررسی نمود. بنابراین یک خاصیت، تشخیص PR نبودن یا SPR نبودن یک تابع را تسریع می نماید و در صورتیکه تابع تمامی خواص را دارا باشد باید شرایط لازم و کافی مذکور در قضایا را بررسی نمود. در این مقاله قضایای غالب موجود در زمینه توابع SPR نقد و بررسی می شود و یک شرط لازم جدید ارائه می گردد و کامل ترین قضیه در این زمینه اثبات می شود.

در بخش دوم تعاریف پایه بیان می شود و با یک مثال دشواریهای استفاده مستقیم از آنها نشان داده می شود. در بخش سوم خواص توابع PR و SPR معرفی شده و مزایای استفاده از آنها در تشخیص سریع PR نبودن و SPR نبودن برخی توابع با ارائه چند مثال روشن می شود. در بخش چهارم قضایای موجود در مورد توابع SPR مورد نقد و بررسی قرار می گیرد و نقایص موجود در آنها با ذکر چند مثال نقض آشکار می شود. در بخش پنجم با استفاده از رفتار دیاگرام نایکوییست در فرکانسهای به اندازه کافی بزرگ یک خاصیت جدید بهمراه تعبیر هندسی آن در صفحه S ارائه می گردد. این خاصیت مبین این حقیقت است که اگر G(s) با درجه نسبی یک یا منهای یک SPR باشد، آنگاه مشتق فاز آن نمی تواند در $\omega\to\infty$ سریعتر از ω^{-2} به صفر همگرا شود. در بخش ششم دیدگاه حوزه فرکانس مطرح شده و با استفاده از ابزار آنالیز مختلط شرایط لازم و کافی کاملتری بصورت قضیه، در تشخیص توابع SPR بیان می گردد و شرط کفایت آن نیز اثبات می گردد.

توابع تبدیل حقیقی مثبت

با توجه به اینکه سیستمهای خطی مستقل از زمان دارای تابع تبدیل گویا با ضرایب حقیقی هستند، در ادامه هر جا از G(s) استفاده شده است، منظور یک تابع تبدیل گویا با ضرایب حقیقی است. تعاریف پایه ای در مورد توابع PR و SPR بصورت زیر است:

تعریف (۲-۱): تابع تبدیل G(s)، PR است، اگر برای $\mathrm{Re}[s]\geq 0$، رابطه $\mathrm{Re}[G(s)]\geq 0$ برقرار باشد [۷].

تعریف (۲-۲): تابع تبدیل G(s)، SPR است، اگر $G(s-\varepsilon)$ به ازای برخی از مقادیر حقیقی و مثبت ε، PR باشد [۷]، به بیان دیگر: $\exists\,\varepsilon>0$, if $\mathrm{Re}[s]\geq 0 \Rightarrow \mathrm{Re}[G(s-\varepsilon)]\geq 0$.

مثال (۲-۱): تابع تبدیل $G_1(s)=\dfrac{1}{s+a}$ را در نظر بگیرید. با جایگزاری $s=\sigma+j\omega$ در $G_1(s)$ روابط

$$\mathrm{Re}[G_1(\sigma+j\omega)]=\frac{(\sigma+a)}{\omega^2+(\sigma+a)^2}$$

$$\mathrm{Re}[G_1(\sigma+j\omega-\varepsilon)]=\frac{(\sigma+a-\varepsilon)}{\omega^2+(\sigma+a-\varepsilon)^2} \quad (1)$$

حاصل می شود که بنا به تعاریف بالا نتیجه می شود: $G_1(s)$، PR است اگر $a\geq 0$ و SPR است اگر $a>0$.

تشخیص این توابع با استفاده مستقیم از تعاریف فوق، با افزایش تعداد قطبها و صفرها بسیار مشکل می شود لذا خواص و قضایای زیادی معرفی شده تا این کار تسهیل شود.

خواص توابع تبدیل حقیقی مثبت

تعریف یک تابع PR را می توان بعنوان یک نگاشت تفسیر نمود. از تعریف (۲-۱) می توان نتیجه گرفت، یک

تابع تبدیل PR محور حقیقی صفحه مختلط $s=\sigma+j\omega$ را به محور حقیقی صفحه $G(s)$ و نیمه راست صفحه $s=\sigma+j\omega$ را به نیمه راست صفحه $G(s)$ می نگارد.

این ویژگی خواص زیر را نتیجه می دهد:

خاصیت (۳-۱): اگر $G(s)$، PR (SPR) باشد، آنگاه هیچ قطبی در نیمه راست باز (بسته) از صفحه S ندارد.

خاصیت (۳-۲): دیاگرام نایکوییست یک تابع تبدیل PR (SPR) در نیمه راست بسته (باز) از صفحه S قرار می گیرد.

یک نتیجه دیگر از تفسیر فوق این است که تابع تبدیل PR از یک تابع تبدیل PR، خود یک تابع تبدیل PR است؛ بعبارت دیگر اگر توابع $G_1(s)$ و $G_2(s)$، PR باشند، آنگاه $G_1(G_2(s))$ و $G_2(G_1(s))$ نیز PR خواهند بود و اگر تابع تبدیل $G_1(s)$، PR و $G_2(s)$، SPR باشد، آنگاه $G_1(G_2(s))$، SPR خواهد بود. از مثال (۲-۱) نتیجه می شود که تابع $\frac{1}{s}$، PR است بنابراین خاصیت مهم زیر نتیجه گیری می شود.

خاصیت (۳-۳): اگر $G(s)$، PR (SPR) باشد، آنگاه $\frac{1}{G(s)}$ نیز PR (SPR) خواهد بود.

از تلفیق خواص (۳-۱) و (۳-۳) می توان نتیجه گرفت که تابع PR (SPR) نمی تواند قطب یا صفری در نیمه راست باز (بسته) از صفحه S داشته باشد، بنابراین چند جمله ای صورت و مخرج یک تابع تبدیل PR (SPR)، هرویتس (اکیداً هرویتس) است، بعبارت دیگر هر تابع تبدیل PR پایدار و بطور ضعیف می نیمم فاز (صفرهای آن سمت چپ یا روی محور موهومی هستند) است و هر تابع تبدیل SPR اکیداً پایدار و می نیمم فاز است. همچنین از خاصیت (۳-۲) می توان نتیجه گرفت اختلاف تعداد صفرها و قطبها در یک تابع PR نمی تواند بیش از یک باشد. بنابراین دو خاصیت مهم زیر نتیجه می شود.

خاصیت (۳-۴): اگر G(s)، PR (SPR) باشد، ضرایب چند جمله ای صورت و مخرج آن نامنفی (مثبت) خواهد بود.

خاصیت (۳-۵): اگر G(s)، PR (SPR) باشد، آنگاه نمی تواند دارای قطب یا صفر تکراری روی محور موهومی حتی در بی- نهایت باشد.

خاصیت اخیر درجه نسبی تابع تبدیل را محدود می کند زیرا اگر درجه نسبی بیش از یک باشد یک صفر تکراری در بی نهایت داریم و اگر درجه نسبی از منفی یک کمتر باشد یک قطب تکراری در بی نهایت خواهیم داشت بنابراین درجه نسبی تابع تبدیل PR (SPR) به صفر یا یک یا منهای یک محدود می شود.

همچنین نشان داده شده است که اگر G(s)، PR باشد، آنگاه قطبهای موهومی خالص، در صورت وجود، غیر تکراری بوده و مانده آنها حقیقی و مثبت است [۱۳]. این ویژگی بهمراه خاصیت (۳-۳) به خاصیت مهم زیر منجر می شود.

خاصیت (۳-۶): اگر G(s)، PR باشد، آنگاه قطبها و صفرهای موهومی خالص آن غیر تکراری هستند، همچنین مانده این قطبها، حقیقی و مثبت است.

بالاخره در مورد اتصالهای موازی و پسخوری دو یا چند تابع PR (SPR) خواص زیر قابل ذکر است:

خاصیت (۳-۷): هر ترکیب خطی با ضرایب مثبت از توابع PR (SPR)، یک تابع PR (SPR) را نتیجه می دهد [۱۸].

خاصیت (۳-۸): اتصال پسخوری با پسخور منفی دو تابع تبدیل PR (SPR)، یک تابع PR (SPR) را نتیجه می دهد [۱۸].

مثال (۳-۱): استفاده از خواص

از آنجا که هر تابع PR (SPR) باید تمامی خواص فوق الذکر را دارا باشد، با بهره گیری از آنها بسیاری از توابع غیر PR (SPR) را بلافاصله می توان شناسایی کرد، برای نمونه تابع تبدیل

$$G_2(s)=\frac{s^3+s^2-4s+6}{s^3+5s^2+3s+3} \qquad (۲)$$

خاصیت (۳-۴) و تابع تبدیل

$$G_3(s)=\frac{s+1}{s^3+2s^2+5s+2} \qquad (۳)$$

خاصیت (۳-۵) را دارا نیست، بنابراین هیچکدام PR نیستند. از طرفی توابع تبدیل

$$G_4(s)=\frac{(s+4)(s+6)}{(s+2)(s+3)(s+5)} \qquad (۳)$$

$$G_5(s)=\frac{(s+4)(s+6)(s+8)}{(s+1)(s+3)(s+5)(s+7)} \qquad (۴)$$

$$G_6(s)=\frac{(s^2+6s+11)(s^2+5s+3)}{(s^2+3s+7)(3s^3+18s^2+4s+9)}$$

(۵)

تمامی خواص بالا را دارا هستند و نمی توان در مورد PR (SPR) بودن یا نبودن آنها اظهار نظر نمود.

نقد قضایای موجود در مورد توابع SPR

در بخشهای قبل به این مهم اشاره شد که استفاده مستقیم از تعریف برای معین کردن SPR بودن یک تابع با دشواریهایی همراه است. همچنین اشاره شد که استفاده از خواص این توابع اغلب در تشخیص سریع توابع غیر SPR در بسیاری از مواقع راهگشا هستند. برای نتیجه گیری قطعی در مورد SPR بودن یا نبودن یک تابع نیاز به شرایط لازم و کافی است، لذا قضایای متعددی در مقالات و کتب مختلف ارائه شده که معرف شرایط لازم و کافی برای SPR بودن هستند، از جمله می توان به مراجع [۷] تا [۱۲] و [۱۷] تا [۲۱] اشاره نمود. در این بین آنچه بیشتر مورد توجه واقع شده است شرایطی است که با اعمال محدودیتهایی بر روی بخش حقیقی تابع تبدیل بیان می شود و در مورد آن یک اتفاق نظر کلی بین محققین وجود ندارد. در این بخش ابتدا شرایط لازم و کافی برای توابع PR در قضیه (۴-۱) بیان می شود که در مورد آن اتفاق نظر کلی وجود دارد، سپس چهار بیان غالب از شرایط لازم و کافی برای توابع SPR مورد نقد و بررسی قرار می گیرد و نقایص موجود در آنها با ذکر مثالهایی آشکار می گردد.

قضیه[۱۶] **(۴-۱):** تابع تبدیل G(s)، PR است اگر و فقط اگر:

الف) هیچ قطبی با بخش حقیقی مثبت نداشته باشد.

ب) قطبهای روی محور موهومی (Ω_p)، در صورت وجود، ساده بوده و مانده آنها حقیقی و مثبت باشد.

ج) بخش حقیقی تابع روی محور موهومی بجز در Ω_p، نامنفی باشد، یعنی $\mathrm{Re}[G(j\omega)]\geq 0\ \ \forall\omega\in R-\Omega_p$.

تبصره (۴-۱): چون SPR بودن G(s) مستلزم PR بودن G(s-ε) است، بنابراین با فرض PR بودن G(s)، ε نمی تواند بطور دلخواه بزرگ اختیار شود و یک حد بالا برای آن عبارت است

$$\varepsilon\leq\min\left\{\left|\mathrm{Re}\,z_i\right|,\left|\mathrm{Re}\,p_j\right|\right\}$$

(۶)

که در آن z_i ها و p_j ها به ترتیب صفرها و قطبهای G(s) هستند.

برهان: فرض کنید G(s) PR باشد، بنابراین تمامی قطبها و صفرهای آن دارای بخش حقیقی نامثبت هستند. از G(s-ε) دارای همان قطبها و صفرهای G(s) است که به اندازه ε به سمت راست منتقل شده اند. حال بدیهی است که اگر G(s)، PR نباشد آنگاه به طریق اولی G(s-ε) نیز PR نخواهد بود و علاوه بر این با فرض PR بودن G(s)، ε نمی تواند بزرگتر از فاصله نزدیکترین قطب یا صفر G(s) تا محور موهومی اختیار گردد زیرا در غیر این صورت G(s-ε) دست کم یک قطب یا صفر سمت راست خواهد داشت.

در ادامه و در نقد چهار بیان غالب موجود در مورد شرایط لازم و کافی برای SPR بودن یک تابع تبدیل، معیار سنجش صحت این قضایا تعریف (۲-۲) و قضیه (۴-۱) و رابطه (۶) می باشد.

بیان (۱): با استناد به کتاب کنترل تطبیقی Astrom [۱۷]

قضیه (۴-۲): تابع تبدیل G(s)، SPR است اگر و فقط اگر:

الف) هیچ قطبی با بخش حقیقی مثبت نداشته باشد.

ب) هیچ قطب یا صفری روی محور موهومی نداشته باشد.

ج) $\mathrm{Re}[G(j\omega)]\geq 0\ \ ;\ \forall\omega\geq 0$.

این قضیه مدعی است هر تابع PR که هیچ قطب یا صفری روی محور موهومی نداشته باشد SPR است، ولی این گفته صحیح نیست و مثالهای متعددی وجود دارند که با استناد به این قضیه SPR هستند در حالیکه بنا به تعریف (۲-۲)، SPR نیستند. از جمله اگر شرایط قضیه فوق برقرار بوده و $\mathrm{Re}[G(j\omega)]$ دارای ریشه حقیقی از مرتبه زوج باشد آنگاه بیان (۱) در تعیین SPR بودن تابع تبدیل به نتیجه نادرست منجر خواهد شد.

مثال نقض (۴-۱): تابع تبدیل

$$G_7(s)=\frac{s^2+4s+1}{s^2+s+9}$$

(۷)

را در نظر بگیرید. بنا به بیان (۱) این تابع SPR است درحالیکه $\mathrm{Re}[G_7(j\omega)]$ دارای ریشه مضاعف در $\omega=\sqrt{3}$ می باشد. تابع تبدیل فوق دارای دو قطب مزدوج مختلط با بخش حقیقی -0.5 است و دو صفر حقیقی در $-(2\pm\sqrt{3})$ است، لذا با توجه به تعریف (۲-۲) و تبصره

(۴-۱) نامساوی $\mathrm{Re}[G_7(j\omega-\varepsilon)]\geq 0$ باید برای برخی از مقادیر $0<\varepsilon<(2-\sqrt{3})$ برقرار باشد (گرچه در قضیه فوق برای ε محدوده ای مشخص نشده است، اما تبصره (۴-۱) نشان می دهد که مقادیر بزرگتر از $(2-\sqrt{3})$ منجر به یک صفر سمت راست در $G_7(s-\varepsilon)$ می شود بنابراین فقط محدوده $0<\varepsilon<(2-\sqrt{3})$ برای بررسی PR بودن $G_7(s-\varepsilon)$ کافی است)، بنابراین علامت

$$\mathrm{Re}[G_7(j\sqrt{3}-\varepsilon)]=\frac{\varepsilon(\varepsilon^3-5\varepsilon^2+20\varepsilon-52)}{(\varepsilon^2-\varepsilon+6)^2+6(1-2\varepsilon)^2}$$

باید نامنفی باشد که به معنی نامنفی بودن

$$(\varepsilon^3-5\varepsilon^2+20\varepsilon-52) \tag{۸}$$

است و براحتی می توان بررسی کرد که به ازای جمیع مقادیر $0<\varepsilon<(2-\sqrt{3})$ علامت عبارت (۴-۳) منفی است. بنابراین $G_7(s)$، بنا به تعریف (۲-۲) SPR نیست و این مغایر با نتیجه حاصل از بیان (۱) است.

بیان (۲): با استناد به کتاب کنترل غیر خطی Slotine [۱۸]

قضیه (۴-۳): تابع تبدیل $G(s)$، SPR است اگر و فقط اگر:

الف) قطبهای آن دارای بخش حقیقی منفی باشند.

ب) $\mathrm{Re}[G(j\omega)]>0\ ;\ \forall\omega\geq 0$

این قضیه مدعی است هر سیستم خطی اکیداً پایدار که دیاگرام نایکوییست آن بطور کامل در سمت راست محور موهومی واقع باشد SPR است و در مجموع از بیان (۱) کاملتر است زیرا برای تابع تبدیل $G_7(s)$، چون $\mathrm{Re}[G_7(j\sqrt{3})]=0$ بنابراین $G_7(s)$ با استناد به بیان (۲) SPR نیست. با این حال مثالهای نقض فراوان دیگری از جمله مثال زیر برای بیان (۲) وجود دارد.

مثال نقض (۴-۲): تابع تبدیل

$$G_8(s)=\frac{s+1}{s^2+s+1} \tag{۹}$$

را در نظر بگیرید. طبق بیان (۲) این تابع SPR است. اما بنا به تعریف (۲-۲) و تبصره (۴-۱) رابطه $\mathrm{Re}\{G_8(j\omega-\varepsilon)\}\geq 0$ باید برای برخی از مقادیر $0<\varepsilon<0.5$ برقرار باشد، اما

$$\lim_{\omega\to\infty}\mathrm{Re}[G_8(j\omega-\varepsilon)]\approx-\frac{\varepsilon}{\omega^2}<0 \tag{۱۰}$$

بنابراین $G_8(s)$، بنا به تعریف (۲-۲) SPR نیست و این مغایر با نتیجه حاصل از بیان (۲) است.

بیان (۳): با استناد به مقاله و کتب Ioannou, Tao [۷]

قضیه (۴-۴): تابع تبدیل $G(s)$، SPR است اگر و فقط اگر:

الف) قطبهای آن دارای بخش حقیقی منفی باشند.

ب) $\mathrm{Re}[G(j\omega)]>0\ ;\ \forall\omega\geq 0$

ج) برای درجه نسبی یک

$$\lim_{\omega\to\infty}\omega^2\,\mathrm{Re}[G(j\omega)]>0$$

و برای درجه نسبی منهای یک

$$\begin{cases}(i)\ \lim_{\omega\to\infty}\mathrm{Re}[G(j\omega)]>0\\(ii)\ \lim_{\omega\to\infty}\left(\dfrac{G(j\omega)}{j\omega}\right)>0\end{cases}$$

این قضیه از قضایای متناظر با بیان (۱) و (۲) کاملتر است بطوریکه در مورد مثالهای نقض (۴-۱) و (۴-۲) به نتیجه موافق با تعریف (۲-۲) منجر می شود زیرا شرط (ج) برای $G_8(s)$ برقرار نیست. در عین نویسندگان مرجع [۷] دارای تألیفات دیگری هستند[۱۹و۲۰] که در آنها شرط (i) از بند (ج) برای توابع تبدیل با درجه نسبی منهای یک، حذف شده است. در زیر لزوم این شرط را با ارائه مثالی نشان می دهیم.

مثال (۴-۱): تابع تبدیل

$$G_9(s)=s+\frac{1}{s+1} \tag{۱۱}$$

را در نظر بگیرید. همانطور که دیده می شود $G_9(s)$ دارای درجه نسبی منهای یک است. این تابع تمامی شرایط مذکور در بیان (۳) بجز شرط (i) از بند (ج) برای توابع تبدیل با درجه نسبی منهای یک را دارا است زیرا آشکارا دیده می شود که $\lim_{\omega\to\infty}\mathrm{Re}[G_9(j\omega)]=0$. بنابراین بنا به بیان (۳) این تابع SPR نیست در حالیکه با استناد به مراجع [۱۹و۲۰] این تابع SPR است. لذا برای نتیجه گیری قطعی باید از تعاریف پایه استفاده نماییم. بنا به تعریف (۲-۲) و تبصره (۴-۱) رابطه $\mathrm{Re}\{G_9(j\omega-\varepsilon)\}\geq 0$ باید برای برخی از مقادیر $0<\varepsilon<0.5$ برقرار باشد، اما رابطه

$$\lim_{\omega\to\infty} \mathrm{Re}\{G_9(j\omega-\varepsilon)\} = \mathrm{Re}\{j\omega-\varepsilon\} = -\varepsilon < 0$$
(۱۲)

نشان می دهد که علامت $\mathrm{Re}\{G_9(j\omega-\varepsilon)\}$ برای هر $\varepsilon > 0$ در فرکانسهای به اندازه کافی بزرگ منفی است، بنابراین $G_9(s)$، بنا به تعریف (۲-۲) SPR نیست و این مغایر با نتیجه حاصل از مراجع [۱۹و۲۰] است و صحت بیان (۳) را تصدیق می نماید.

بیان (۴): با استناد به کتاب سیستمهای غیر خطی Khalil [۲۱]

لم (۴-۱): تابع تبدیل سره[۶] و یا اکیدا سره G(s)، SPR است اگر و فقط اگر:

الف) قطبهای آن دارای بخش حقیقی منفی باشند.

ب) $\mathrm{Re}[G(j\omega)] > 0 \ ; \ \forall\omega \geq 0$

ج) یکی از موارد زیر برقرار باشد.

1) $G(\infty) > 0$

2) $G(\infty) = 0$, $\lim_{\omega\to\infty} \omega^2 \mathrm{Re}[G(j\omega)] > 0$

در این بیان بدلیل اینکه بیشتر تحت تأثیر دیدگاه های فضای حالتی بوده است، در مورد توابع با درجه نسبی منهای یک صحبتی نشده است، علاوه بر این بند (ج) آن قابل ساده سازی است.

در واقع دو بیان اخیر دارای مثال نقض نیستند و به کمک ابزارهای موجود در آنالیز مختلط یعنی با دیدگاه های حوزه فرکانسی می توان بیان جامع و در عین حال ساده تری برای شرایط لازم و کافی ارائه نمود که در بخشهای بعدی به آن خواهیم پرداخت.

بطور کلی در دو بیان اخیر برای وضعیت $\omega \to \infty$ شرایط مجزایی ارائه شده است. در ادامه از این موضوع استفاده نموده و با بررسی رفتار دیاگرام نایکوئیست توابع تبدیل برای فرکانس های به اندازه کافی بزرگ یک شرط لازم جدید استخراج می شود.

ارائه و اثبات یک شرط لازم جدید

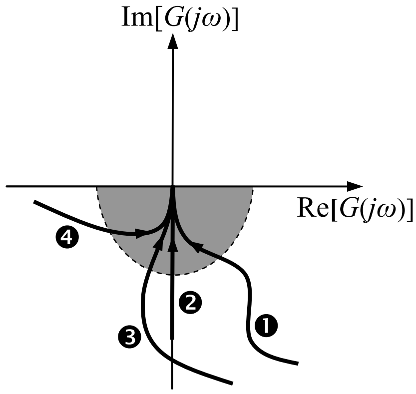
در این قسمت با توجه به رفتار دیاگرام نایکوییست در فرکانسهای به اندازه کافی بزرگ یک شرط لازم برای توابع تبدیل PR و SPR با درجه نسبی یک و منهای یک اثبات می گردد.

تابع تبدیل G(s) را بصورت

$$G(s) = k\,\frac{b(s)}{a(s)} = k\,\frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}, k > 0$$
(۱۳)

در نظر بگیرید، بدیهی است که فرض مثبت بودن k در رابطه (۱۳) محدود کننده نیست، زیرا بنا به تعریف (۲-۱)، اگر G(s)، PR باشد آنگاه نامساوی $G(1) \geq 0$ برقرار است. این نامساوی بهمراه خاصیت (۳-۴) لزوم برقراری شرط $k > 0$ را برای توابع PR آشکار می سازد. برای G(s) با درجه نسبی یک دیاگرام نایکوییست در فرکانسهای به اندازه کافی بزرگ بصورت ناحیه مشخص شده در شکل (۱) خواهد بود زیرا:

$$\left(G(s)_{n-m=1,|s|\to\infty} \approx k/(s+\alpha), \alpha = a_1 - b_1\right)$$
(۱۴)



شکل۱: دیاگرام نایکوییست $G(j\omega)$ با درجه نسبی یک در فرکانس های به اندازه کافی بزرگ.

بدیهی است مشتق فاز برای منحنی ❶ منفی $(0 < \alpha)$ است زیرا با افزایش فرکانس فاز نزولی و در حال میل کردن به ۹۰- درجه است. همچنین مشتق فاز برای منحنی ❷ صفر $(\alpha = 0)$ و برای منحنیهای ❸ و ❹ مثبت $(\alpha < 0)$ است. بطورکلی برای G(s) با درجه نسبی یک، فاز در فرکانسهای به اندازه کافی بزرگ با افزایش فرکانس بتدریج به مقدار ۹۰- درجه میل می کند، البته بجز توابع فرد زیرا فاز آنها همواره ۹۰- درجه است.

تساوی $\arg\{1/G(s)\} = -\arg G(s)$ نتیجه می دهد که برای G(s) با درجه نسبی منهای یک و در فرکانسهای به اندازه کافی بزرگ، فاز با افزایش فرکانس بتدریج به مقدار ۹۰+ درجه میل می کند، البته بجز توابع فرد زیرا فاز آنها همواره ۹۰+ درجه است. همچنین می دانیم که اگر G(s)، PR باشد آنگاه دیاگرام نایکوییست آن در نیمه راست بسته قرار می گیرد، بنابراین خاصیت زیر را داریم:

خاصیت (۵-۱): اگر G(s)، PR بوده و دارای درجه نسبی یک (منهای یک) باشد، آنگاه مشتق فاز آن در فرکانسهای به اندازه کافی بزرگ، نامثبت (نا منفی) خواهد بود؛ بعبارت دیگر:

$$(n-m)\left(\frac{d}{d\omega}\underset{\omega\to\infty}{\arg[G(j\omega)]}\right) \le 0 \quad ; \ |n-m| = 1$$

(۱۵)

لم (۵-۱): تابع تبدیل

$$G(s) = k\,\frac{b(s)}{a(s)} = k\,\frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}\,, k > 0$$

را در نظر بگیرید. اگر G(s)، SPR بوده و $|n-m| = 1$ باشد، آنگاه نامساوی

$$(n-m)(a_1 - b_1) > 0$$

(۱۶)

برقرار است (یک شرط لازم جدید برای توابع تبدیل SPR).

برهان: با توجه به ضابطه G(s) می توان نتیجه گرفت:

$$G(j\omega-\varepsilon) = k\,\frac{(j\omega-\varepsilon)^m + b_1(j\omega-\varepsilon)^{m-1} + \ldots + b_m}{(j\omega-\varepsilon)^n + a_1(j\omega-\varepsilon)^{n-1} + \ldots + a_n} = k\,\frac{\prod_{i=1}^{m}\left(j\omega-\varepsilon-z_i\right)}{\prod_{l=1}^{n}\left(j\omega-\varepsilon-p_l\right)}$$

(۱۷)

بنابراین برای فاز این تابع عبارت زیر حاصل می گردد:

$$\arg[G(j\omega-\varepsilon)] = \sum_{i=1}^{m}\tan^{-1}\left(\frac{\omega-\operatorname{Im} z_i}{-\varepsilon-\operatorname{Re} z_i}\right) - \sum_{l=1}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{\omega-\operatorname{Im} p_l}{-\varepsilon-\operatorname{Re} p_l}\right)$$

(۱۸)

مشتق رابطه اخیر بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{d\omega}\arg[G(j\omega-\varepsilon)] = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{-\varepsilon-\operatorname{Re} z_i}{(\varepsilon+\operatorname{Re} z_i)^2+(\omega-\operatorname{Im} z_i)^2}\right) - \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{-\varepsilon-\operatorname{Re} p_l}{(\varepsilon+\operatorname{Re} p_l)^2+(\omega-\operatorname{Im} p_l)^2}\right)$$

(۱۹)

بنابراین برای فرکانسهای به اندازه کافی بزرگ نتیجه می شود:

$$\frac{d}{d\omega}\underset{\omega\to\infty}{\arg[G(j\omega-\varepsilon)]} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{-\varepsilon-\operatorname{Re} z_i}{\omega^2}\right) - \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{-\varepsilon-\operatorname{Re} p_l}{\omega^2}\right) = \frac{b_1 - a_1 + (n-m)\varepsilon}{\omega^2}$$

(۲۰)

بدیهی است که اگر G(s)، SPR باشد، آنگاه $G(s\text{-}\varepsilon)$، PR است و لذا بنا به خاصیت (۵-۱) نامساوی

$$(n-m)\left(\frac{d}{d\omega}\underset{\omega\to\infty}{\arg[G(j\omega-\varepsilon)]}\right) \le 0 \quad ; \ |n-m| = 1$$

(۲۱)

باید برقرار باشد، بنابراین با جایگزاری (۵-۸) در (۵-۹) نتیجه می شود:

$$(n-m)(a_1 - b_1) > \varepsilon > 0$$

(۲۲)

که برهان لم را تکمیل می کند. □

تبصره (۵-۱): نارندرا و تیلور نشان دادند که اگر G(s) با درجه نسبی یک SPR باشد، آنگاه $\operatorname{Re}[G(j\omega)]$ نمی تواند در $\omega \to \infty$ سریعتر از ω^{-2} به صفر همگرا شود [۱۵]. روابط (۲۰) تا (۲۲) در بالا نشان می دهد اگر G(s) با درجه نسبی یک یا منهای یک SPR باشد، آنگاه مشتق فاز $G(j\omega)$ نمی تواند در $\omega \to \infty$ سریعتر از ω^{-2} به صفر همگرا شود که تعمیم نتیجه نارندرا و تیلور است. این محدودیت برای توابع PR وجود ندارد به این معنی که اگر G(s) با درجه نسبی یک یا منهای یک PR باشد آنگاه مشتق فاز $G(j\omega)$ در $\omega \to \infty$ می تواند متناسب با ω^{-2} یا ω^{-4} یا سریعتر به صفر همگرا شود. بنابراین اگر G(s)، PR و $|n-m| = 1$ باشد، آنگاه نامساوی

$$(n-m)(a_1 - b_1) \ge 0$$

(۲۳)

برقرار است (یک شرط لازم جدید برای توابع تبدیل PR).

تعبیرهندسی در صفحه S : شرط لازم بیان شده در لم فوق در صفحه S دارای تعبیر جالبی است به این معنی که اگر تنها مکان قطبها و صفرهای G(s) در صفحه مشخص

باشد می توان در مورد SPR بودن یا نبودن آن نتایجی بدست آورد زیرا داریم:

$$a_1 - b_1 = \left(\sum_{l=1}^{n} \mathrm{Re}[-p_l] \right) - \left(\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Re}[-z_i] \right) \quad (۲۴)$$

مثال (۴-۲): بهره گیری از شرط لازم استخراج شده

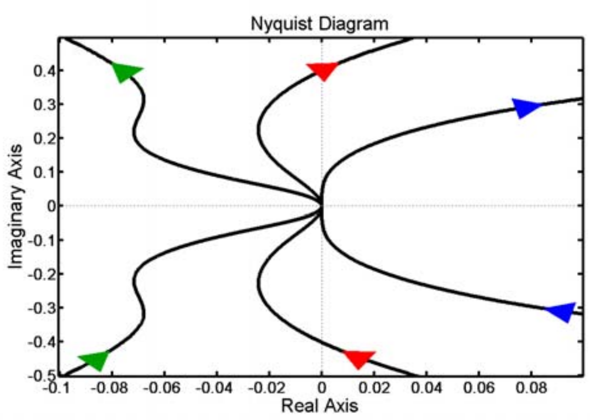
با توجه به (۵-۱) برای توابع $G_4(s)$، $G_5(s)$، $G_6(s)$ روابط

$$G_4(s):\ \ a_1 - b_1 = (2+3+5) - (4+6) = 0 \quad (۲۵)$$

$$G_5(s):\ \ a_1 - b_1 = (1+3+5+7) - (4+6+8) = -2 \quad (۲۶)$$

$$G_6(s):\ \ a_1 - b_1 = \left(3 + \frac{18}{3}\right) - (6+5) = -2 \quad (۲۷)$$

حاصل می شود. بنابراین با استفاده از (۳-۹) و (۳-۱۶) می توان نتیجه گرفت که: $G_4(s)$، SPR نیست ولی می تواند PR باشد، درحالیکه توابع $G_5(s)$ و $G_6(s)$، PR (SPR) نیستند. دیاگرام ناکوییست این توابع در شکل (۲) ترسیم



شکل۲ : دیاگرام نایکوییست توابع تبدیل $G_4(s)$، $G_5(s)$، $G_6(s)$.

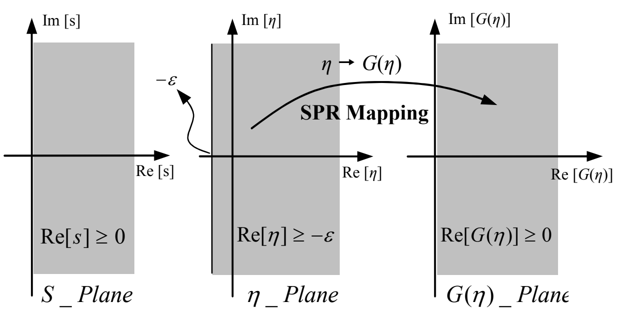
همانطور که دیده می شود دیاگرام نایکوییست $G_5(s)$ و $G_6(s)$ در فرکانسهای به اندازه کافی بزرگ (ناحیه داخل دایره خط چین شده)، سمت چپ محور موهومی قرار دارد در حالیکه دیاگرام نایکوییست $G_4(s)$ سمت راست محور موهومی قرار دارد.

دیدگاه حوزه فرکانس

از آنجا که عموماً اثباط شرایــط لازم و کـافی با استفاده از ابراز موجود در فضای حالت انجام می گرفته است و در این فضا این محدودیت مهم وجود دارد که تنها کلاسی از توابع تبدیل را در بر دارد که دارای درجه نسبی نامنفی باشند، در این بخش دیدگاه حوزه فرکانس و ابزار آنالیز مختلط معرفی می گردد و سعی می شود بدون اعمال هیچ محدودیتی روی درجه نسبی شرایط لازم و کافی برای SPR بودن اثبات شود. ابتدا اکیداً حقیقی مثبت بودن بعنوان یک نگاشت تفسیر می شود، این تفسیر یک ابهام مستتر در تعریف پایه توابع تبدیل اکیداً حقیقی مثبت را مرتفع می سازد و منجر به یک تعریف معادل بسیار دقیق از این توابع در حوزه فرکانس می شود. دو ابزار قدرتمند آنالیز مختلط اصل ماکزیمم قدر مطلق و سری تیلورهستند. با استفاده از این ابزارها شرایط لازم و کافی مستقیماً از تعریف پایه حوزه فرکانسی توابع اکیداً حقیقی مثبت اثبات می گردد. لازم به ذکر است که قضیه شرایط لازم و کافی که در اینجا اثبات می شود بسیار کلی و جامع است و در آن روی درجه نسبی تابع تبدیل هیچ محدودیتی اعمال نشده است.

تفسیر SPR بودن بعنوان یک نگاشت

با استفاده از تغییر متغیر $\eta = s - \varepsilon$، SPR بودن را می توان بصورت یک نگاشت تفسیر نمود به این ترتیب که SPR بودن یک نگاشت از صفحه η به صفحه $G(\eta)$ می باشد بگونه ای که ناحیه $\mathrm{Re}[\eta] \geq -\varepsilon$ از صفحه η به ناحیه $\mathrm{Re}[G(\eta)] \geq 0$ از صفحه $G(\eta)$ نگاشته شود. این موضوع در شکل (۳) نشان داده شده است. این تفسیر نشان می دهد که اگر یک ε حقیقی و مثبت به اندازه کافی کوچک وجود نداشته باشد بطوریکه نامساوی $\mathrm{Re}[G(s-\varepsilon)] \geq 0$ در ناحیه $\mathrm{Re}[s] \geq 0$ برقرار باشد، آنگاه هیچ $\varepsilon > 0$ وجود نخواهد داشت که نامساوی $\mathrm{Re}[G(s-\varepsilon)] \geq 0$ را در ناحیه $\mathrm{Re}[s] \geq 0$ ارضاء کند.



شکل ۳: تفسیر SPR بودن بعنوان یک نگاشت.

بنابراین تعریف زیر برای توابع SPR استنتاج می گردد.

تعریف ۶-۱ تابع تبدیل گویا با ضرایب حقیقی G(s)، SPR است، اگر یک ε حقیقی و مثبت به اندازه کافی کوچک وجود داشته باشد بطوریکه نامساوی $\mathrm{Re}[G(s-\varepsilon)]\ge 0$ در ناحیه $\mathrm{Re}[s]\ge 0$ برقرار باشد.

قضیه (اصل ماکزیمم قدر مطلق): فرض کنید $f(s)$ تابعی غیر ثابت از متغیر مختلط $s=\sigma+j\omega$ باشد و در داخل ناحیه Γ از صفحه مختلط تحلیلی باشد، آنگاه $|f(s)|$ هیچ مقدار ماکزیممی در داخل Γ ندارد.

یکی از مهم ترین نتایج اصل ماکزیمم قدر مطلق بصورت لم زیر قابل بیان است:

لم (۶-۱) اگر تابع تبدیل $G(s)$ در ناحیه Γ تحلیلی و غیر ثابت باشد، آنگاه می نیمم $\mathrm{Re}[G(s)]$ بر روی مرز این ناحیه اتفاق خواهد افتاد.

قضیه ۶-۱ تابع تبدیل با ضرایب حقیقی

$$G(s)=k\frac{b(s)}{a(s)}=k\frac{s^m+b_1s^{m-1}+...+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+...+a_n}\ ,\ k\ne 0$$

SPR اگر و فقط اگر:

الف. قطبهای آن دارای بخش حقیقی منفی باشند.

ب. $k>0$ و $|n-m|\le 1$

ج. $\mathrm{Re}[G(j\omega)]>0,\ \forall\omega\in R$

د. اگر $|n-m|=1$ آنگاه $a_1\ne b_1$.

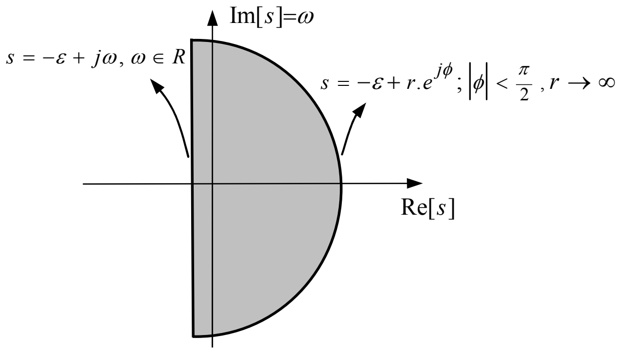
اثبات کفایت شرایط: با توجه به خواص و قضایای پیش گفته لزوم شرایط آشکار است، لذا در اینجا کفایت شرایط را اثبات می کنیم. فرض کنید شرایط مذکور در قضیه فوق برقرار باشد. چون تمامی قطبهای $G(s)$ دارای بخش حقیقی منفی هستند پس می توان ε را آنقدر کوچک اختیار نمود که $G(s)$ در ناحیه $\mathrm{Re}[s]\ge -\varepsilon$ تحلیلی باشد, لذا بنا بر لم (۶-۱) مقدار می نیمم $\mathrm{Re}[G(s)]$ بر روی مرز این ناحیه اتفاق می افتد، به عبارت دیگر برای اثبات کفایت شرایط باید نشان داد که روی مرز این ناحیه که در شکل (۴) نشان داده شده است، نامساوی $\mathrm{Re}[G(s)]\ge 0$ برقرار است. بر روی قسمت دایروی از مرز شکل (۴) رابطه $\mathrm{Re}[G(s)]\approx kr^{m-n}Cos((m-n)\phi)$ برقرار است، پس اگر $k>0$ و $|n-m|\le 1$ آنگاه $\mathrm{Re}[G(s)]\ge 0$.

بر قرار بودن $\mathrm{Re}[G(j\omega-\varepsilon)]\ge 0,\ \forall\omega\in R$ نامنفی بودن $\mathrm{Re}[G(s)]$ را روی بخشی از مرز شکل (۴) که به موازات محور موهومی واقع است تضمین می نماید. از طرفی با توجه به اینکه ε یک مقدار به اندازه دلخواه کوچک است عبارت $\mathrm{Re}[G(j\omega-\varepsilon)]$ را می توان با دو جمله اول سری تیلور تعویض نمود یعنی:

$$\mathrm{Re}[G(j\omega-\varepsilon)]\approx \mathrm{Re}[G(j\omega)]-\varepsilon\,\mathrm{Re}[G'(j\omega)]$$

حال بدیهی است که برای فرکانسهای کراندار نامساوی $\mathrm{Re}[G(j\omega)]>0$ نامساوی $\mathrm{Re}[G(j\omega-\varepsilon)]>0$ را نتیجه می دهد و برای فرکانس های بالا و برای $|n-m|=1$ شرط اضافی $a_1\ne b_1$ لازم است تا بتوان از نامساوی $\mathrm{Re}[G(j\omega)]>0$ نامساوی $\mathrm{Re}[G(j\omega-\varepsilon)]>0$ را نتیجه گرفت (این موضوع در بخش قبل بررسی شد) و لذا اثبات کفایت تکمیل است.

□



شکل۴: مرز ناحیه تحلیلی.

قضیه اخیر شرایط لازم و کافی برای SPR بودن یک تابع تبدیل گویا با ضرایب حقیقی را بیان می کند و هیچکدام از نقایص و محدودیتهای قضایای قبلی را ندارد. این قضیه بصورت نهایی زیر قابل بیان است.

قضیه ۶-۲ تابع تبدیل گویا با ضرایب حقیقی

$$G(s)=k\frac{b(s)}{a(s)}=k\frac{s^m+b_1s^{m-1}+...+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+...+a_n}\ ,\ k\ne 0$$

SPR است اگر و فقط اگر:

الف. $k>0$ و $|n-m|\le 1$ و اگر $|n-m|=1$ آنگاه $a_1\ne b_1$.

ب. تمامی قطبهای G(s) دارای بخش حقیقی منفی باشد.

ج. $\mathrm{Re}[G(j\omega)]>0,\ \forall\omega\ge 0$

تبصره(۶-۱): لازم به ذکر است که نارندرا و تیلور نشان دادند که اگر G(s) با درجه نسبی یک SPR باشد، آنگاه $\mathrm{Re}[G(j\omega)]$ نمی تواند در $\omega\to\infty$ سریعتر از ω^{-2} به صفر همگرا شود[۱۴]. در واقع شرط

$\lim_{\omega\to\infty}\omega^2\,\mathrm{Re}[G(j\omega)]>0$ در بیانهای (۳) و (۴) مؤید گفته نارندرا و تیلور است. اما این شرط قابل ساده سازی است زیرا شرط $\mathrm{Re}[G(j\omega)]>0$ در بند (ب) دو بیان مذکور نامساوی $\lim_{\omega\to\infty}\omega^2\,\mathrm{Re}[G(j\omega)]\geq 0$ را تضمین می نماید، پس شرط $\lim_{\omega\to\infty}\omega^2\,\mathrm{Re}[G(j\omega)]>0$ را می توان بصورت $\lim_{\omega\to\infty}\omega^2\,\mathrm{Re}[G(j\omega)]\neq 0$ ساده کرد. از طرفی با توجه به اینکه

$$\mathrm{Re}[G(j\omega)]=k\frac{\mathrm{Re}[b(j\omega)a(-j\omega)]}{a(j\omega)a(-j\omega)}=k\frac{(a_1-b_1)\,\omega^{2(n-1)}+\ldots}{\omega^{2n}+\ldots}$$

(۲۸)

می توان نتیجه گرفت که نامساوی $\lim_{\omega\to\infty}\omega^2\,\mathrm{Re}[G(j\omega)]\neq 0$ معادل نامساوی $a_1\neq b_1$ است.

حال مثالهای نقض را با قضیه پیشنهادی فوق محک می زنیم:

توابع تبدیل $G_8(s)=\frac{s+1}{s^2+s+1}$ و $G_9(s)=s+\frac{1}{s+1}$ هیچ کدام SPR نیستند زیرا برای هر دو $|n-m|=1$ و $a_1=b_1=1$ و تعاریف پایه این نتیجه را تأیید می کنند.

تبصره(۶-۲): تفاوتهای توابع PR و SPR را می توان اینطور خلاصه نمود که سه شرط لازم اساسی در توابع PR یعنی

$$\mathrm{Re}[p_i]\geq 0\ ,\forall i=1,\ldots,n$$

(۲۹)

$$\mathrm{Re}[G(j\omega)]\geq 0\ \ ;\ \forall\omega\geq 0$$

(۳۰)

$$If\ |n-m|=1\Rightarrow (n-m)(a_1-b_1)\geq 0$$

(۳۱)

(با فرض اینکه p_i ها قطبهای G(s) باشند) برای توابع SPR بصورت اکید باید برقرار باشد. بدین ترتیب اگر G(s)، PR باشد آنگاه SPR خواهد بود اگر نامساویهای

$$\mathrm{Re}[p_i]\neq 0\ ,\forall i=1,\ldots,n$$

(۳۲)

$$\mathrm{Re}[G(j\omega)]\neq 0\ \ ;\ \forall\omega\geq 0$$

(۳۳)

$$If\ |n-m|=1\Rightarrow a_1\neq b_1$$

(۳۴)

برقرار باشد. دقت شود که شرط (۶-۷) به این معنی است که اگر درجه نسبی غیر صفر است آنگاه مجموع قطبها باید مخالف مجموع صفرها باشد.

نتیجه گیری

در این مقاله خواص و قضایای توابع PR و SPR مورد بررسی قرار گرفت. چهار بیان غالب موجود در مورد قضایایی که عموماً برای تشخیص توابع SPR مورد استفاده قرار می گیرند، مورد نقد و بررسی قرار گرفت و نقایص موجود در آنها با ذکر مثالهای نقض آشکار گردید. علاوه بر این یک خاصیت (شرط لازم) جدید برای توابع PR و SPR اثبات گردید که نشان می دهد اگر G(s) با درجه نسبی یک یا منهای یک SPR باشد، آنگاه مشتق فاز $G(j\omega)$ نمی تواند در $\omega\to\infty$ سریعتر از ω^{-2} به صفر همگرا شود و در واقع این نکته تعمیم گفته نارندرا و تیلور است. خاصیت جدید دارای تعبیر جالبی است و حقیقی مثبت بودن را به مکان قطب ها و صفرها در صفحه S مرتبط می سازد. در پایان با استفاده از ابزارهای موجود در حوزه فرکانس کاملترین قضیه برای بیان شرایط لازم و کافی در تشخیص توابع SPR اثبات گردیده است. این قضیه هیچ محدودیتی روی درجه نسبی تابع تبدیل بصورت پیش فرض اعمال نمی کند و این مزیت استفاده از ابزار حوزه فرکانس را در مقابل فضای حالت را در این زمینه نشان می دهد.

مراجع

1 - Anderson, B. D. O. (1968). "A Simplified viewpoint of hyperstability." *IEEE, Trans. Ato. Con.*

2 - Kokotovic, P. and Arcak, M. (2001). "Constructive nonlinear control: a historical perspective." *Automatica,* Vol. 37, PP. 637-662.

3 - Kalman, R. E. (1964). "When is a linear control system optimal." *Trans. ASME,* Series D, Vol. 86, PP. 1-10.

4 - Narendra, K. S. and Valavani, L. S. (1980). "A comparison of lyapunov and hyperstability approaches to adaptive control of continuous systems." *IEEE Trans. Aut. Contr.*, Vol. 25, No. 2, PP. 243-247.

5 - Taylor. J. H. (1974). "Strictly positive-real functions and the Lefschetz-Kalman-Yakubovich (LKY) lemma." *IEEE Trans. Circuits Syst.*. PP. 310-311.

6 - Lozano, R. and Joshi, S. M. (1990). "Strictly positive real transfer functions revisited." *IEEE Trans. Auto. Control,* Vol. 35, No. 11.

7 - Ioannou, P. and Tao, G. (1987). "Frequency domain conditions for strictly positive real functions." *IEEE, Trans. Auto. Cont.*, Vol. Ac-32, No. 1.

8 - Dahleh, M., Tesi, A. and Vicino, A. (1993). "On the robust Popov criterion for interval Lur's system." *IEEE Trans. Auto. Control,* Vol. 38, No. 9.

9 – Brian, D., Anderson, O., Mansour, M. and Kraus, F. J. (1996). "A new test for strict positive realness." *IEEE Trans. Circuit and System,* Vol. 42, No.4.

10 - Bai, Z. and Freund, W. (2000). "Eignvalue based characterization and test for positive realness of scaler transfer functions." *IEEE Trans. Auto. Control,* Vol. 45, PP. 2396-240.

11 - Gao, W. and Zhou, Y. (2003). "Eigenvalue based algorithms for testing positive realness of SISO systems." *IEEE Trans. Auto. Control,* Vol. 48, PP. 2051-2054.

12 - Shorten, R. and King, C. (2004). "Spectral conditions for positive realness of single-input_single-output systems." *IEEE Trans. Auto. Control,* Vol. 49, No. 10.

13 - Wai-Kai Chen. (1986). *Passive and active filters.* John Wiley & Sons. (Translated by: M. Molavi)

14 - Landau, I. D., Lozano, R. and M'Saad, M. (1997). *Adaptive control.* Springer. Communications and Control Engineering.

15 - Narendra, K. S. and Taylor, J. H. (1973). *Frequency domain criteria for absolute stability*. New York.

16 - Anderson, B. D. O. and Vongpanitlerd, S. (1973). *Network analysis and synthesis, A modern system theory approach.* Prentice-Hall, INC. Englewood Cliffs, New Jersey.

17 - Astrom, K. J. and Wittenmark, B. (1996). *Adaptive control*, 2nd edition (Translated by: M. T. Hamidi Beheshti)

18 - Slotine, J. J. E. and Li, W. (1991). *Applied nonlinear control*. Prentice Hall.

19 - Ioannou, P. A. and Sun, J. (1995). *Robust adaptive control*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

20 - Tao, G. (2003). *Adaptive control design and analysis*. John Wiley & Sons.

21 - Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear systems*, 2nd Edition, Prentice-Hall. (Translated by: Gh. A. Montazer).

22 - Tao, G. and Ioannou, P. A. (1990). "Necessary and sufficient conditions for strictly positive real matrices." *IEE, Proceedings,* Vol. 137, No. 5.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1 - Positive Real
2 - Strictly Positive Real
3 - Kalman-Yakubovich-Popov Lemma
4 - Passivity
5 - Dissipativity
6 - Proper