روش ابتکاری ساخت و بهبود تور مسئله فروشنده دوره‌گرد نامتقارن

محمد سعید صباغ

استادیار دانشکده مهندسی صنایع و مرکز برنامه‌ریزی سیستم‌ها - دانشگاه صنعتی اصفهان

علیرضا امیری

مربی دانشکده مهندسی صنایع - دانشگاه شهید باهنر کرمان

(تاریخ دریافت ۸۱/۶/۱۵، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۴/۱۰/۳، تاریخ تصویب ۸۵/۷/۸)

چکیده

در این مقاله، یک روش ابتکاری برای یافتن یک تور خوب مسئله فروشنده دوره‌گرد نامتقارن ارائه‌شده است. در این روش، ابتدا با استفاده از ماتریس نرمال‌سازی شده، سعی می‌شود توری ساخته شود که شهرهای تور به‌گونه‌ای انتخاب شوند تا درمراحل بعدی، از رفتن به شهرهای پرهزینه (مسافت یا زمان طولانی) پرهیز شود. سپس اندازه تور مذکور به‌کمک روش ابداعی، بهبود داده‌شده است. برای انجام این پژوهش، برنامه رایانه‌ای روش نرمال‌سازی ماتریس هزینه تخصیص خطی و روش پیشنهادی به زبان C++ نوشته شده و مسائل زیادی تا ۵۰۰ شهر حل شده است. مسائل حل شده عبارتند از تعدادی مسائل تصادفی از نوع نامتقارن و تمامی مسائل محک فروشنده دوره‌گرد نامتقارن. نتایج بدست‌آمده حاکی از آن است که این روش، برای تمام مسائل آزمون‌شده، تور خیلی خوبی بدست‌می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: فروشنده دوره‌گرد نامتقارن (ATSP)، تخصیص خطی، نرمال‌سازی، ساخت تور، بهبود تور

مقدمه

فرض کنیم n شهر مفروض است، می‌خواهیم از: شهر دلخواه، شروع به حرکت نموده و به هر شهر دیگر فقط یک‌بار وارد و فقط یک‌بار از آن خارج شویم و در انتها، به شهر مبدء بازگردیم؛ با این شرط که مسافت طی شده، کم‌ترین مسافت باشد. این مسئله را مسئله فروشنده دوره‌گرد می‌نامند و به مسیری که به‌این‌صورت به‌وجودمی‌آید، "تور" گفته می‌شود. درصورتی‌که مسافت شهر m تا شهر k با مسافت شهر k تا شهر m برای تمام مقادیر k,m برابر باشند، مسئله فروشنده دوره‌گرد را "متقارن" و در غیر این‌صورت آن را "نامتقارن" می‌نامند [۱،۲].

مسئله فروشنده دوره‌گرد در زمره‌ی مسائل بهینه‌سازی ترکیبی قرار دارد. بنابراین زمان حل آن تابعی نمایی از تعداد شهرها است [۳]. این مسئله کاربردهای زیادی دارد از جمله: ساخت صفحه مدارهای الکترونیکی [۱]، زمانبندی کارها [۲]، ترتیب‌یابی کارها [۳]، جمع‌آوری سکه‌های تلفن‌های عمومی، فعالیت مسیریابی ابزار، قالب‌ها، قوس‌های برقی، مشعل‌ها، پرتوافکن‌ها و بخاردهندگان برای تولید یک ویژگی خاص برروی یک قطعه از نمونه‌های دو بعدی و سه بعدی، مسئله‌ی فروشنده دوره‌گرد است [۴]. اخیرا در علوم ژنتیک، عکسبرداری ماهواره‌ای از اجرام سماوی، مطالعات DNA و غیره نیز از این مسئله استفاده‌شده است [۵]. یکی دیگر از کاربردهای مرتبط با آن در مسئله‌ی مسیریابی وسیله‌ی نقلیه‌ی شرکت‌های توزیع کالا است. برای مثال یک شرکت پخش فرآورده‌های لبنی را در نظر بگیرید که باید روزانه حمل و نقل کالای خود را به m مکان مختلف یک شهر انجام دهد. می‌توان به‌کمک مسئله فروشنده دوره‌گرد، مسافت طی‌شده بین کارخانه و این m مکان را به حداقل ممکن رسانید، یا کار توزیع را با کم‌ترین تعداد وسیله‌ی نقلیه انجام داد. بدین‌ترتیب، با کاهش هزینه‌های حمل و نقل، بازدهی کار افزایش می‌یابد و در مصرف سوخت، آلودگی هوا و حجم ترافیک، کاهش ایجاد می‌شود. در این گونه مسائل به‌دلیل یک طرفه بودن برخی از مسیرها و یا تفاوت حجم ترافیک در دو جهت یک خیابان دو طرفه، مسئله ما یک مسئله نامتقارن است؛ لذا علاوه‌بر جنبه‌ی نظری از جنبه‌ی کاربردی هم این مسئله حائز اهمیت است.

تاریخچه

در اوایل سال (۱۹۳۲) در کتابی که در آلمان به چاپ رسید، به مسئله فروشنده دوره‌گرد اشاره شده است. شرکت رند (Rand) در سال (۱۹۴۸) مسئله فروشنده

دوره‌گرد را معرفی کرد و شهرت این شرکت در اروپا سبب شد، مسئله فروشنده دوره‌گرد، مشهور شود [۶]. پس از آن، این مسئله در طول سال‌ها، ذهن محققین علاقه‌مند را به‌خود معطوف داشته است؛ به‌طوری‌که تا به‌حال، مقاله‌های زیادی در باره‌ی حل این مسئله، به چاپ رسیده است [۱،۲].

مسئله "فروشنده دوره‌گرد متقارن" از دو جهت عمده با مسئله "فروشنده دوره‌گرد نامتقارن" متفاوت است. اولاً حافظه رایانه برای مسئله فروشنده دوره‌گرد متقارن، نصف حافظه‌ی لازم برای مسئله فروشنده دوره‌گرد نامتقارن است. تفاوت دیگر این‌که در مسائل نامتقارن، بهینه‌کردن و تقریب‌زدن، مشکل‌تر است [۱]. تمامی نمونه‌های تصادفی و نمونه‌های موجود در بانک اطلاعاتی [۸و۷] TSPLIB در مورد مسئله فروشنده دوره‌گرد متقارن با ۱۰۰۰ شهر یا کم‌تر، از طریق نرم‌افزار CONCORDE [۱۰و۹] بهینه می‌شود. اما تعداد زیادی از مسائل فروشنده دوره‌گرد نامتقارن با ۳۱۶ شهر با این نرم‌افزار، حل نمی‌شود. به‌علاوه نمونه‌های واقعی وجود دارند که هیچ یک از روش‌های ابتکاری موجود، قادر نیستند که جوابی نزدیک به جواب بهینه برای آن پیدا کنند [۱].

به نظر جانسون [۱] "مطالعات تجربی در زمینه مسئله فروشنده دوره‌گرد نامتقارن، توسعه کمی یافته است. تا کنون مطالعات گسترده‌ای که طیف وسیعی از روش‌های ابتکاری حل مسئله فروشنده دوره‌گرد نامتقارن را دربر داشته باشد، انجام‌نشده است. آنچه تا کنون انجام‌شده است، بیش‌تر بر پایه‌ی نمونه‌های مستخرج از TSPLIB و نمونه‌های تصادفی بوده که چندان "کاربردی" نبوده است. بر خلاف مسئله‌ی فروشنده دوره‌گرد متقارن که برای آن منابع زیادی وجود دارد؛ منبعی قابل اعتماد برای مسئله فروشنده دوره‌گرد نامتقارن معرفی نشده است. خوشبختانه اخیراً مطالعه جامعی در خصوص این مسئله انجام گرفته است [۱۱،۱۲]".

روش‌های حل مسئله فروشنده دوره‌گرد

به‌طورکلی از دو دسته روش‌های دقیق و ابتکاری برای حل مسئله‌ی فروشنده دوره‌گرد استفاده می‌شود:

روش‌های دقیق حل مسئله‌ی فروشنده دوره‌گرد

این روش‌ها، این مزیت را دارند که در نهایت، جواب بهینه را به‌دست‌می‌دهند. اما یکی از معایب آن‌ها این است که برای یافتن جواب بهینه، مجبور به در نظر گرفتن تمام مجموعه‌های قابل قبول هستند. این امر در مورد مسائل بزرگ وقت‌گیر و در بسیاری از موارد، غیر عملی است [۱۳]. اما در ابعاد کوچک، جواب‌های بهینه را در اختیار قرار می‌دهند. از جمله روش‌های دقیق برای حل مسئله فروشنده دوره‌گرد می‌توان روش‌های: شمارش کامل ، شاخه و کران[۴] مثل روش‌های لیتل و ایستمن (Little and Eastman)، و برنامه‌ریزی پویا[۵] را نام برد [۱۶-۱۴]. مسائل محک[۶] (مرجع یا معیار) با استفاده از روش شاخه و کران با صرف وقت بسیار زیاد، حل شده‌اند [۱۳].

روش‌های ابتکاری حل مسئله فروشنده دوره‌گرد

در مسئله فروشنده دوره‌گرد با افزایش تعداد شهرهای مسئله، راه‌حل‌های دقیق جواب بهینه را در زمان قابل قبول ارائه‌نمی‌کنند. در این گونه موارد، از راه‌حل‌های ابتکاری مناسب، استفاده می‌شود. روش‌های ابتکاری، دو بخش دارند: بخش اول، ایجاد تور اولیه به کمک روش‌هایی مثل روش نزدیک‌ترین شهر دیدارنشده[۷]، روش حریصانه یا کوته‌بینانه[۸]، روش ابتکاری ایجاد سیکل و غیره [۲و۱] می‌باشد. بخش دوم، روش‌های بهبود تور است که شامل روش ژنتیک[۹] [۱۷]، روش سرد شدن شبیه‌سازی شده[۱۰] [۱۸] ، روش جامعه مورچگان[۱۱] [۱۹]، روش جستجوی ممنوع[۱۲] [۲۰]، روش‌های حذف k کمان موجود و ورود k کمان جدید بجای آن‌ها [۱۳] (k-opt) و روش جستجوی محلی تکراری می‌باشد [۲۳-۲۱].

مدل ریاضی مسئله‌ی فروشنده دوره‌گرد

فرض کنید تعداد کل شهرها n است و C_{ij} هزینه (فاصله یا زمان) رفتن از شهر i ام به شهر j ام باشد همچنین متغیرهای دوگانه X_{ij} به شرح ذیل تعریف شده‌باشند:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر از شهر } i \text{ به شهر } j \text{ برویم} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

مدل خطی این مسئله با این شرط که اندیس‌های i, j برابر نباشند، به‌صورت ذیل است [۱۶].

$$Minimize \;\; Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} \quad (1)$$

$$Subject\,to:$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad , \quad j = 1,\dots,n \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad , \quad i = 1,\dots,n \quad (3)$$

$$U_i - U_j + nX_{ij} \le n-1 \qquad 2 \le i \ne j \le n \quad (4)$$

$$U_j \ge 0, X_{ij} = 0,1 \qquad i,j = 1,\dots,n \qquad i \ne j \quad (5)$$

در این مدل آن دسته محدودیت‌هایی که در آن‌ها از U ها استفاده‌شده است، از ایجاد هر نوع زیرتور، جلوگیری می‌کنند. برای مثال اگر ابتدا از شهر i ام به شهر j ام برویم می‌بایست داشته باشیم:

$$U_i - U_j + n \times 1 \le n-1$$
$$\Downarrow$$
$$U_i - U_j \le -1$$

که درنتیجه خواهیم داشت $U_j - U_i \ge 1$ لذا بازگشت از j به i غیرممکن می‌شود. حال اگر از شهر j ام به شهر k ام برویم آنگاه از شهر k ام بازگشت به شهرهای i ام و j ام نیز غیرممکن است چون‌که داریم:

$$U_i - U_j \le -1, U_j - U_k \le -1$$

که با جمع این دو نامعادله، خواهیم داشت: $U_i - U_k \le -2$ و لذا داریم:

$$U_k - U_j \ge 1, U_k - U_i \ge 2$$

که این مقادیر مثبت رفتن از شهر k ام به شهر j ام و رفتن از شهر k ام به شهر i ام را غیر ممکن می‌کنند. برای دیدن برخی مدل‌های دیگر این مسئله، به مرجع [۱] مراجعه نمایید.

الگوریتم پیشنهادی برای حل مسئله‌ی فروشنده دوره‌گرد

الگوریتم پیشنهادی، سه زیر بخش عمده دارد که عبارتند از: نرمال‌سازی ماتریس هزینه، ایجاد یک تور اولیه از ماتریس نرمال‌شده و جستجو برای بهبود تور. برای درک بهتر مطالب ذیل، دیدن مثال‌های عددی پیوست‌های (۲) و (۱) را توصیه می‌نمائیم.

نرمال‌سازی ماتریس هزینه

مدل ارائه‌شده در بخش ۲ را دو باره در نظر بگیرید. با حذف U ها و محدودیت‌هایی‌که از ایجاد "زیرتور" جلوگیری می‌کنند، مدل مذکور به مدل یک مسئله تخصیص تبدیل می‌شود. لذا می‌گوییم که مدل مسئله‌ی تخصیص، یک مدل آزادسازی شده[۱۳] مسئله فروشنده دوره‌گرد است. لذا اگر Z^* را هزینه تخصیص بهینه و Z را هزینه هر تور آن فرض کنیم، داریم $Z = Z^* + \alpha, \alpha \ge 0$. پس مقدار کمینه هزینه تخصیص، همواره یک کران پایین برای تابع هدف مسئله‌ی فروشنده دوره‌گرد است. لذا ما ابتدا ماتریس C را ماتریس هزینه‌ی مسئله‌ی تخصیص، در نظر گرفته و آن را به روش مجارستانی حل می‌کنیم تا یک کران پایین خوب برای اندازه تور، به‌دست‌بیاوریم. ما ماتریس نهایی روش مجارستانی را ماتریس نرمال‌شده می‌نامیم و آنرا با $\overline{C}$ نشان می‌دهیم و در روش ابتکاری ارائه‌شده در این مقاله، از آن استفاده می‌کنیم. ممکن است $C_{ij} < C_{ik}$ باشد درصورتی‌که $\overline{C}_{ik} < \overline{C}_{ij}$ می‌باشد. یا به نظری دیگر، مسافت مطلق i به j کم‌تر از مسافت مطلق i به k باشد اما بهتر است با توجه به هزینه‌های نرمال‌شده برای ساختن تور، از شهر i بجای رفتن به شهر j به شهر k برویم.

برخی مشاهدات کلی قابل بیان در ارتباط با ماتریس هزینه‌ی نرمال‌شده عبارتند از:

- هر تور، یک جواب مسئله‌ی تخصیص است که کمینه‌ی

هزینه‌ی مسئله‌ی تخصیص همواره یک کران پایین برای آن است.

- ماتریس هزینه‌ی نرمال‌شده، ممکن است یگانه نباشد اما یگانه نبودن آن، اثری بر مشاهدات ما ندارد. برای مثال در روش مجارستانی، ممکن است ابتدا تفریق ستونی را انجام دهیم و سپس تفریق سطری را اجرا کنیم یا برعکس؛ که در نهایت ممکن است ماتریس نرمال‌شده، متفاوت باشد.
- درایه‌های صفر در $\overline{C}$ هزینه‌های نرمال‌شده صفر را نشان می‌دهند .دلیل آن این است که اگر ما از آن صفرها در ایجاد تور، استفاده کنیم، هزینه‌ای فراتر از کمینه هزینه مسئله تخصیص را نخواهیم داشت.
- اگر به‌طور تصادفی، حل مسئله تخصیص، یک تور را نتیجه دهد و یا فقط با بکاربردن درایه‌های صفر در $\overline{C}$ بتوان یک تور ایجاد کرد دراین‌صورت آن تور، یک تور بهینه برای مسئله فروشنده دوره‌گرد است. چون‌که دراین‌صورت $\alpha = 0$ است.
- اگر ساختن یک تور که فقط درایه‌های صفر $\overline{C}$ را بکاربرد غیرممکن باشد، دراین‌صورت به‌طور قطع هزینه یک تور بهینه، بزرگ‌تر از مقدار کمینه هزینه مسئله تخصیص خواهد بود. در این حالت یک تور بهینه، توری است که مجموع هزینه‌های نرمال‌شده درایه‌های غیر صفر در آن، در میان تمام تورهای ممکن حداقل باشد. به‌بیان دیگر، توری بهینه است‌که مقدار α آن حداقل باشد.

ساخت یک تور اولیه

همان‌طور که بیان شد مدل مسئله تخصیص، یک مدل آزادسازی شده مسئله فروشنده دوره‌گرد است. اما مدل مسئله تخصیص، خود یک مدل مسئله حمل و نقل نیز هست که در آن، مقدار عرضه و تقاضا، همه‌جا ۱ واحد است. در مسئله حمل و نقل، برای بدست آوردن یک جواب پایه شدنی خوب، می‌توان از روش "وگل" یا "فوگل" (Vogel)، استفاده کرد [۱۶]. ما برای ایجاد یک تور خوب، از روش "وگل"، الهام گرفته‌ایم.

گام‌های این زیربخش، عبارتند از:

۱) ماتریس تخصیص C را نرمال‌سازی نموده تا ماتریس $\overline{C}$ بدست‌آید. اگر از سطر یا ستونی که کم‌ترین تعداد صفر را داراست، شروع کرده و با استفاده از صفرهای $\overline{C}$ بتوانیم یک تور بسازیم، این تور بهینه است. لذا الگوریتم، همین‌جا پایان می‌پذیرد. ما برای مسائل ۳۲۳، ۳۵۸، ۴۰۳و ۴۴۳ شهری از مجموعه مسائل نامتقارن، موفق به ایجاد تور بهینه شدیم که تور به‌دست‌آمده، برای بزرگ-ترین آن‌ها در پیوست (۳) آمده است.

۲) مجموعه‌ی جواب (تور) را تهی در نظر می‌گیریم.

۳) در هر سطر و ستون ماتریس باقیمانده، از بین درایه‌های حذف نشده، اختلاف دو کوچک‌ترین درایه را محاسبه می‌کنیم.

۴) سطر و ستون‌هایی که این اختلاف در آن‌ها بیش‌ترین مقدار است، به‌عنوان مجموعه‌ی "انتخاب" در نظر می‌گیریم.

۵) از بین عضوهای مجموعه‌ی انتخاب، یکی را به‌طور تصادفی یا دلخواه برمی‌گزینیم.

۶) در سطر یا ستون انتخاب شده، کوچک‌ترین درایه حذف نشده را $\overline{C}_{ij}$ می‌نامیم. کمان (i, j) یکی از کمان‌های تور ما خواهد بود، دلیل این‌کار این است که اگر هم‌اکنون، این تخصیص را انجام ندهیم و در ادامه $\overline{C}_{ij}$ غیر قابل انتخاب شود. ما باید شهر دیگری را در این سطر انتخاب کنیم که ممکن است مجبور شویم هزینه‌ی بالایی بپردازیم. حال سطر i ام و ستون j را از مجموعه گزینه‌ها خارج می‌کنیم.

۷) برای جلوگیری از ایجاد زیرتور می‌بایست از باز گشت به هر شهر دیدارشده بجز در موردی که اینکار سبب کامل‌شدن تور می‌شود، جلوگیری شود (باز گشت مسدود شود) لذا باید یکی از موارد ذیل اجرا شود:

الف) هیچیک از شهرهای i و j در مجموعه‌ی جواب (شهرهای انتخاب شده) نیستند در این حالت $j \rightarrow i$ را مسدود می‌کنیم.

ب) شهر i در مجموعه‌ی جواب است ولی شهر j در مجموعه‌ی جواب نیست؛ یعنی k ای وجود دارد که: $i \rightarrow k \rightarrow \ldots \rightarrow s$ درحالی که m ای که $j \rightarrow m$ موجود نیست. در این حالت باید $j \rightarrow s$ را مسدود نماییم. برای مثال: $j \rightarrow i \rightarrow 2 \rightarrow 5$ در این حالت $j \rightarrow 5$ را مسدود می‌کنیم.

ج) شهر j در مجموعه‌ی جواب است ولی شهر i در مجموعه‌ی جواب نیست یعنی k ای وجود دارد که

$j \to k \to \ldots \to t$ و m ای که $m \to i$ وجود ندارد. در این حالت باید $t \to i$ را مسدود نماییم. برای مثال: $i \to j \to 2 \to 3$ در این حالت $3 \to i$ را مسدود می‌کنیم.

د) هر دو شهر i و j در مجموعه‌ی جواب هستند یعنی k و m که $j \to k \to \ldots \to u$ و $i \to m \to \ldots \to v$ وجود دارند. در این حالت باید $u \to v$ را مسدود نماییم. برای مثال: $4 \to i, j \to 3 \to 7$ در این حالت $7 \to 4$ را مسدود می‌کنیم.

۸) درصورتی‌که تعداد کمان‌های مجموعه‌ی جواب کم‌تر از $n-1$ (که n تعداد شهرها است) باشد به گام ۳ می‌رویم و در غیر این‌صورت، پس از انتخاب تنها گزینه باقیمانده، یک تور کامل‌می‌شود. فرض کنید اندازه این تور $\overline{Z}$ است. این تور را ذخیره و بخش بعدی را اجرا کنید.

جستجو برای بهبود تور

روش ابتکاریی‌که در این‌بخش معرفی می‌شود، یک روش "بهبود تور" است. تغییر مکان یک یا چند شهر ممکن است سبب بهبود تور شود. ما در این‌بخش تغییر مکان ۱ تا ۳ شهر را مورد بررسی قرارمی‌دهیم. برای درک بهتر این بخش، دیدن مثال‌های عددی پیوست "۲" را توصیه می‌نمائیم.

تغییر مکان یک شهر در تور

با یک نگاه به ماتریس هزینه نرمال‌سازی شده مسئله فروشنده دوره‌گرد و درایه تخصیص یافته به تور در هر سطر می‌توان دریافت که در چه سطر یا سطرهایی، درایه تخصیص یافته، حداقل آن سطر (صفر) نیست. با انتخاب یکی از آن سطرها و تخصیص درایه کم‌تر از درایه تخصیص یافته فعلی در آن سطر ممکن است طول تور بهبود یابد. لذا در سطر انتخابی تمام درایه‌های کم‌تر از درایه تخصیص یافته، بررسی می‌شوند، تا مشخص شود که با تخصیص آن‌ها طول تور بهبود می‌یابد یا خیر؟

روش انجام کار بدین‌صورت است که در سطر انتخابی درایه تخصیص یافته فعلی از تخصیص خارج شده و یک درایه با هزینه کم‌تر تخصیص داده شود. با انجام این کار، سه یال از تور حذف شده و سه یال جدید به تور افزوده می‌شود، در اینجا بررسی می‌شود که آیا مجموع برآیند این شش تغییر، مقرون به صرفه است یا خیر؟ اگر مجموع برآیند این تغییرات به کاهش طول تور منجر شود، این تغییرات انجام می‌گیرد و در غیر این‌صورت از انجام آن‌ها صرف نظر می‌شود. مثلا اگر در سطر iام درایه kام تخصیص یافته باشد و این درایه در آن سطر، حداقل آن سطر نباشد و درایه‌ای مانند درایه jام وجود داشته باشد که: $\overline{C}_{ij} < \overline{C}_{ik}$ است، در اینجا ممکن است با تخصیص درایه jام در سطر iام طول تور کاهش یابد. بنابراین درایه kام را از تور حذف کرده و درایه jام را به آن می‌افزاییم. یا به عبارت ساده‌تر از شهر iام به شهر jام می‌رویم.

اگر مسیرهای $h \to i \to k$ و $s \to j \to r$ دو تکه از تور فعلی باشند، برای رفتن از شهر i به شهر j باید دو حالت را در نظر بگیریم. در حالت اول کمان $j \to i$ کمانی از تور فعلی است. یعنی این‌که داریم $s \to j \to i \to k$ که دراین‌صورت برای جلوگیری از ایجاد زیرتور باید i را از مکانش در تور فعلی حذف کرده و قبل از j درج کنیم. در حالت دوم کمان $j \to i$ کمانی از تور فعلی نیست. در این حالت به دو صورت می‌توان اقدام نمود: یکی اینکه j را از مکان فعلی‌اش در تور جاری برداشته و بعد از i درج کنیم که مسیرهای فوق به صورت $h \to i \to j \to k$ و $s \to r$ درمی‌آید و دیگری اینکه i را از مکانش در تور فعلی حذف کرده و قبل از j درج کنیم که با این تغییر داریم: $s \to i \to j \to r$ و $h \to k$.

در مورد اول یالهای $s \to r$، $j \to k$ و $i \to j$ به تور اضافه شده و یالهای $s \to j$، $j \to r$ و $i \to k$ از تور حذف شده‌اند. در مورد دوم یال‌های اضافه شده عبارتند از $s \to i$، $h \to k$ و $i \to j$ و یال‌های $s \to j$، $j \to r$ و $i \to k$ یالهای حذف شده هستند.

تغییر مکان دو شهر در تور

تغییر مکان یک شهر در تور با مسائل محک نامتقارن آزمون شد، هرچند که کاهش صورت گرفته نسبت به طول تور اولیه خوب بودند اما نسبت به طول تور بهینه رضایت بخش نبودند، لذا تصمیم گرفته‌شد تا دامنه

تغییرات را با همین ایده به بررسی تغییرات دوتایی گسترش دهیم.

این روش بدین شرح انجام می‌شود که از بین سطرهائی- که درایه تخصیص یافته‌اش حداقل آن سطر نباشد یک سطر را انتخاب و یک درایه کوچک‌تر از درایه تخصیص یافته‌اش را در آن سطر برمی‌گزینیم و درایه تخصیص یافته در ستون متعلق به این درایه کوچک‌تر را پیدا می‌کنیم، حال این درایه‌های تخصیص یافته، در سطر انتخابی و ستون درایه کوچک‌تر، دو رأس متقابل تخصیص یافته از یک چهارگوش هستند. باتعیین دو رأس متقابل دیگر این چهارگوش چنانچه هیچ یک برروی قطر اصلی نباشد (چنانچه باشد درایه دیگری را برمی‌گزینیم) بررسی می‌کنیم که اگر جای این تخصیص‌ها را عوض کنیم ـ یعنی دو درایه تخصیص یافته را از حالت تخصیص خارج و دو درایه تخصیص نیافته را به تخصیص اضافه کنیم ـ هزینه تور بهبود می‌یابد یا خیر؟ اگر این تغییرات به بهبود طول تور کمک کند، آن‌ها را اعمال می‌کنیم، در غیر این‌صورت از اعمال آن‌ها چشم می‌پوشیم.

اگر ترتیب مسافرت در تور جاری به‌صورت $h \to i \to k \to t$ باشد و مقدار $\bar{C}_{ij}$ کم‌تر از مقدار $\bar{C}_{ik}$ که هزینه تخصیص در سطر i است، باشد و تخصیص در ستون j به‌صورت $s \to j \to r$ باشد دراین‌صورت اگر از شهر i به شهر j و از شهر s به شهر k برویم، احتمال دارد هزینه کل تور کم‌تر شود، دراین‌صورت تور جدید از تغییر مکان دو شهر k و j در تور فعلی بدست می‌آید. برای انجام این کار ابتدا قرار دهید: $h \to i \to j \to t$ و پس از اجرای آن قرار دهید $s \to k \to r$.

مشاهده می‌کنیم که چهار یال از تور فعلی خارج می‌شود و به جای این چهار یال، چهار یال جدید وارد می‌شود، پس تور جدید با اعمال این هشت تغییر بوجود می‌آید. حال باید مجموع برآیند این هشت تغییر را محاسبه نماییم، اگر این کار به کاهش هزینه‌های تور فعلی منجر شود، تغییرات را در تور درج می‌کنیم و در غیر این‌صورت بدون تغییر تور به سراغ درایه دیگری می‌رویم.

تغییر مکان سه شهر در تور

در ادامه بررسی‌ها این نکته جلب نظر می‌کرد که اگر تعداد سطرهای بررسی افزایش داده شود ممکن است روند بهبودها ادامه یابد. در تغییر مکان یک شهر در یک ترتیب فقط یک سطر بررسی شد و در حرکات دوتایی، دو سطر مورد بررسی قرار گرفت. در اینجا بررسی‌ها به سه سطر افزایش داده می‌شود.

ما همزمان می‌توانیم دو سطری را که تخصیص آن‌ها حداقل هزینه را ندارند انتخاب و در هر یک از آن‌ها شهری با هزینه کوچک‌تر از هزینه تخصیص آنرا برای ورود به تور انتخاب کنیم.

توجه کنید که با مشخص شدن هر درایه ورودی به تور دو تخصیص واقع در سطر و ستون آن درایه باید حذف شوند. حال اگر به ازای دو درایه ورودی به تور دو درایه خروجی داشته باشیم آن‌گاه ما یک تغییر دو سطری را که در بخش قبل بحث شد باید اجرا کنیم و در غیر این‌صورت تغییرات می‌توانند سه سطری و یا چهار سطری باشد. ما در این تحقیق مواردی را که تغییرات سه سطری بوده‌اند را نیز اجرا کرده‌ایم. بدین‌صورت که در سطر اول بررسی درایه کوچک‌تر را به تخصیص وارد کرده و درایه‌های تخصیص یافته در سطر و ستون درایه ورودی را از تخصیص خارج می‌نمائیم. در سطر دوم بررسی نیز درایه‌ای کم‌تر را به تخصیص وارد کرده و درایه‌های تخصیص یافته در سطر و ستون آنرا از تخصیص خارج می‌نمائیم. حال اگر یک درایه دیگر باید به تخصیص اضافه شود که در تقاطع سطر و ستونی است که خروجی داشته ولی ورودی ندارد. این درایه به خودی خود به تخصیص اضافه می‌شود و انتخاب آن در اختیار ما نیست.

با انجام این تغییرات سه سطری چهار یال از تور خارج شده و چهار یال جدید به آن اضافه می‌شود که مجموعا هشت تغییر در تور اعمال می‌شود. حال طبق روال سابق برآیند این هشت تغییر را محاسبه می‌کنیم. اگر برآیند آن‌ها به کاهش طول تور منجر شود آن‌ها را اعمال می‌کنیم و در غیر این‌صورت از اعمال آن‌ها صرفنظر می‌کنیم.

سه دسته تغییراتی که بر تور یک مسئله فروشنده دوره‌گرد نامتقارن اعمال شده است به‌طور کامل تشریح شد؛ روش پیشنهادی مرکب از اعمال این سه دسته تغییرات است، یعنی یک تور اولیه به کمک روش ابتکاری ایجاد نموده و سپس با اعمال این سه دسته تغییرات بهبود داده شده است.

میزان بهبود به ترتیب و تعداد تکرار این سه دسته تغییرات بستگی دارد، یعنی اینکه اگر ابتدا تغییر مکان یک شهر در یک ترتیب بررسی شود و سپس حرکات دوتایی و بعد از آن حرکات سه‌تایی اعمال شود، میزان بهبود تور با وقتی که این ترتیب تغییرکند، می‌تواند متفاوت باشد.

آزمایشات عددی و نتایج محاسباتی

روش پیشنهادی، بر روی دو دسته از مسائل تصادفی و محک آزمایش شده است. در این بخش کیفیت تورهای تولیدی و زمان حل مسائل مورد بررسی قرار می‌گیرد. در جداول ذیل، زمان حل گزارش‌شده، مربوط به رایانه‌ای شخصی با مشخصات ریر است.

Pentium4 (Intel® Celeron® CPU 2.00GHz، 224 MB of RAM)

الف - کیفیت تورهای تولیدی مسائل تصادفی نامتقارن ۵۰۰ شهری

جدول (۱) نتایج بدست‌آمده از اجرای روش پیشنهادی را بر روی تعدادی از مسائل تصادفی نامتقارن ۵۰۰ شهری نشان می‌دهد. از این جدول نتیجه می‌شود که: حد اکثر خطا در ۴۰ درصد از مسائل، ۰۰۱/. درصد، حد اکثر خطا در ۵۰ درصد از مسائل، ۰۰۴/. درصد، حد اکثر خطا در ۹۰ درصد از مسائل، ۴/. درصد و حد اکثر خطا در ۱۰۰ درصد از مسائل، ۹۵۷/. درصد است، همان-طور که ملاحظه می‌شود میانگین حداکثر خطا ۱۸۷/. درصد است.

جدول (۲)، .مقایسه میانگین درصد خطای روش پیشنهادی و ۶ روش ابتکاری دیگر را برای مسائل تصادفی ممکن می‌سازد [۲۳]. در این جدول با مقایسه میانگین درصد خطای این روش با میانگین درصد خطای ۶ روش دیگر، کیفیت بسیار خوب تورهای تولیدی این روش برای مسائل تصادفی آشکار می‌شود.

ب - کیفیت تورهای تولیدی مسائل محک نامتقارن

جدول (۳) مقایسه میانگین درصد خطای روش پیشنهادی و ۷ روش ابتکاری دیگر را برای مسائل محک نامتقارن ممکن می‌سازد.

جدول ۱: نتایج بدست‌آمده از اجرای روش پیشنهادی برای تعدادی مسائل تصادفی نامتقارن ۵۰۰ شهری.

شماره مسئله	دامنه اعداد تصادفی ماتریس هزینه	زمان حل (ثانیه)	اندازه بهترین تور بدست آمده	اندازه تخصیص بهینه	حد اکثر خطا (درصد)
1	[1,100]	13	503	503	0.000
2	[1,500]	41	1058	1054	0.380
3	[1,1000]	31	1840	1837	0.163
4	[1,10000]	55	13497	13369	0.957
5	[1,100000]	45	56674	56609	0.115
6	[101,500]	27	51000	50875	0.246
7	[501,2500]	38	253310	253300	0.004
8	[2501,10000]	31	1260342	1260332	0.001
9	[10001,500000]	45	5056674	5056609	0.001
10	[500001,1000000]	45	250056674	250056609	0.000
میانگین درصد حد اکثر خطا					0.187

جدول ۲: مقایسه میانگین درصد خطای ۶ روش ابتکاری و روش پیشنهادی برای مسائل تصادفی.

روش	روش پیشنهادی	GR (%)	RI (%)	KSP (%)	GKS (%)	RPC (%)	COP (%)
میانگین درصد خطا	0.187	320.13	1467.38	3.11	3.09	106.65	1.88

جدول ۳: میزان خطای برخی از روشهای ابتکاری مساله فروشنده دوره‌گرد نامتقرن و روش پیشنهادی برروی مسائل محک.

نام مسئله محک	تعداد شهرها	روش پیشنهادی		GR (%)	RI (%)	KSP (%)	GKS (%)	RPC (%)	COP (%)	SG (%)
		زمان حل (ثانیه)	خطا (درصد)							
Br17	17	0.04	0.00	102.56	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Ft53	53	0.46	0.00	80.84	24.82	12.99	12.31	18.64	15.68	2.71
Ft70	70	0.83	0.13	14.84	9.32	1.88	2.84	5.89	1.90	0.68
Ftv33	34	0.12	0.00	31.34	11.82	13.14	8.09	21.62	9.49	0.00
Ftv35	36	0.12	1.14	24.37	9.37	1.56	1.09	21.18	1.56	1.34
Ftv38	39	0.13	9.20	14.48	10.20	1.56	1.05	25.69	3.59	1.10
Ftv44	45	0.23	4.27	18.78	14.07	7.69	5.33	22.26	10.66	0.00
Ftv47	48	0.13	0.89	11.88	12.16	3.04	1.69	28.72	8.73	0.34
Ftv55	56	0.46	5.36	25.93	15.30	3.05	3.05	33.27	4.79	2.55
Ftv64	65	0.59	0.81	25.77	18.49	3.81	2.61	29.09	1.96	0.92
Ftv70	71	0.96	4.46	31.85	16.15	3.33	2.87	22.27	1.85	3.51
Ftv100	101	3.56	0.11	43.40	24.22	3.52	5.31	29.75	7.72	3.51
Ftv110	111	3.52	0.20	38.61	12.46	5.41	5.67	21.35	6.89	3.78
Ftv120	121	4.33	1.28	44.60	25.62	7.62	5.12	19.25	6.51	3.86
Ftv130	131	4.94	0.94	49.15	27.13	5.46	4.90	17.34	5.59	3.79
Ftv140	141	5.44	1.35	45.91	24.17	4.46	4.67	23.84	5.99	3.62
Ftv150	151	6.13	1.25	47.53	22.75	4.75	4.33	22.56	6.70	3.01
Ftv160	161	7.36	3.52	36.64	28.62	1.71	1.49	22.77	2.87	3.07
Ftv170	171	9.13	3.43	32.05	28.97	2.40	1.38	25.66	3.59	0.83
Kro124p	100	2.80	2.45	21.01	12.17	16.95	8.69	23.06	8.79	5.37
P43	43	0.28	0.23	3.59	0.30	0.11	0.32	0.66	0.68	0.18
Rbg323	323	20.45	0.00	8.52	29.34	0.00	0.00	0.53	0.00	1.56
Rbg358	358	22.25	0.00	7.74	42.48	0.00	0.00	2.32	0.26	0.60
Rbg403	403	25.14	0.00	0.85	9.17	0.00	0.00	0.69	0.20	0.04
Rbg443	443	26.30	0.00	0.92	10.48	0.00	0.00	0.00	0.00	0.55
Ry48p	48	3.34	3.34	32.55	11.66	7.23	4.52	29.50	7.97	3.32
میانگین درصد خطا			1.71	30.62	17.36	4.29	3.36	18.02	4.77	1.93

از جدول (۳) نتیجه می‌شود که: در۲۶/۹ درصد از مسائل تور بهینه بدست آمده است، در ۵۳/۸ درصد از مسائل خطا کم‌تر از ۱ درصد، در ۷۳ درصد از مسائل خطا کم‌تر از ۲ درصد، در ۷۶/۹ درصد از مسائل خطا کم‌تر از ۳ درصد، در ۸۴/۶ درصد از مسائل خطا کم‌تر از ۴ درصد و در ۹۲/۳ درصد از مسائل خطا کم‌تر از ۵ درصد است. همان‌طورکه ملاحظه می‌شود، میانگین خطا ۱/۱۷۱ درصد است. همچنین با مقایسه میانگین درصد خطای این روش با میانگین درصد خطای ۷ روش دیگر [۲۳]، کیفیت خوب تورهای تولیدی این روش برای مسائل محک نامتقارن آشکارمی‌شود. در مرجع مذکور، بهترین میانگین خطا با استفاده از روش GKS بدست‌آمده که برابر با ۳/۳۶ درصد است. این میانگین در روشهای COP و KSP به ترتیب برابر با ۴/۷۷ درصد و ۴/۲۷ درصد است. با توجه به این خطاها و نتایج بدست‌آمده در روش پیشنهادی، ملاحظه می‌شود که روش پیشنهادی از قدرت رقابتی خوبی برخوردار است.

ج – زمان تورهای تولیدی

زمان حل روش پیشنهادی، برای مسائل تصادفی در دامنه‌ی ۱۳ ثانیه تا ۵۵ ثانیه با میانگین ۳۷ ثانیه و برای مسائل محک نامتقارن در دامنه‌ی ۰/۰۴ ثانیه تا ۲۶/۳ ثانیه با میانگین ۵/۷ ثانیه است. در مرجع [۲۳] زمان حل روشهای دیگر به‌صورت نمودار داده‌شده است که میانگین این زمان برای مسائل مذکور کم‌تر از ۲ ثانیه است و از میانگین زمان حل روش پیشنهادی خیلی کم‌تر است. اما چون کیفیت جوابهای روش پیشنهادی بهتر است این زمان اضافه قابل توجیه است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش ابتکاری ساخت و بهبود تور مسئله فروشنده دوره‌گرد نامتقارن ارائه گردیده است. در روش ساخت تور از ماتریس نرمال‌شده استفاده شده است. این روش برای برخی مسائل توری که یک تخصیص بهینه است را تولید کرده است. در صورت بهینه نبودن تور، با اعمال تغییرات یک شهری، دو شهری و سه شهری، آن تور بهبود داده شده است. اجرای این روش بر روی مسائل تصادفی تورها بسیار عالی و بر روی مسائل محک تورهای خوبی را ایجاد کرده است. زمان لازم برای بدست آوردن تور نهائی این روش از روش‌های دیگر بیشتر بوده است. این افزایش زمان، با توجه به بهتر بودن تورهای ایجاد شده، قابل توجیه است.

تشکر و قدردانی

در اینجا از پیشنهادات بسیار سازنده و باارزش داوران محترم ناشناس که موجب بهبود مقاله گردیده است، قدردانی می‌نماییم.

پیشنهادها

با توجه به اینکه با افزایش تعداد سطرهای بررسی روند بهبودها ادامه یافت، پیشنهاد می‌شود که تغییرات چهار سطری و بالاتر بررسی شود، زیرا به احتمال زیاد این تغییرات ما را به تور بهینه نزدیک‌تر می‌کند.

مراجع

1 - Cirasella, J., Johnson, D. S., McGeoch, L. A. and Zhang, W. (2001). “The asymmetric traveling salesman problem: Algorithms, instance generators and tests.” in A. L. Buchsbaum and J. Snoeyink, eds., *Algorithm Engineering and Experimentation,* Third International Workshop, ALENEX 2001, Springer-Verlag, Berlin, PP. 32-59.

2 - Johnson, D. S., Gutin, G., McGeoch, L. A., Yeo, A., Zhang, W. and Zverovitch, A. (2002). “Experimental analysis of heuristics for the ATSP.” in G. Gutin and A. Punnen, eds., *The Traveling Salesman Problem and Its Variations,* Kluwer Academic Publishers, Boston, PP. 445-487.

3 - Cook, W. J., Cunningham, W. H., Pulleyblank, W. R. and Schrijver, A. (1998). *Combinatorial optimization.* New York: Wiley.

4 - Laporte, G., Asef-Vaziri, A. and Sriskandarajah, C. (1996). “Some applications of the generalized traveling salesman problem.” *Journal of the Operational Research Society,* Vol. 47, No. 12, PP. 1461–1467.

http://www.tsp.gatech.edu/apps/index.html .

5 - Schrijver, A. (1996). *On the history of combinatorial optimization (till 1960)*. Technical report, Department of Mathematics, University of Amsterdam, The Netherlands.

6 - Reinelt, G. (1991). *TSPLIB - A Traveling Salesman Problem Library,* European Journal of Operational Research. http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/.

7 - Applegate, D., Bixby, R., Chvátal, V. and Cook, W. (1991). *Concorde: A code for solving Traveling Salesman Problems*. http://www.math.princeton.edu/tsp/concorde.html.

8 - Cirasella, J., Johnson, D.S., McGeoch, L.A. and Zhang W. (2001). “The asymmetric traveling salesman problem: Algorithms, instance generators, and tests.” In A.L. Buchsbaum and J. Snoeyink, eds., *Algorithm Engineering and Experimentation,* Third International Workshop, ALENEX.

9 - Cirasella, J., Johnson, D.S., McGeoch, L.A. and Zhang W. (2002). “The asymmetric traveling salesman problem: algorithms, instance generators, and tests.” *ALENEX 2001 Proceedings, Springer Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 2153, PP. 32–59. Berlin: Springer.

10 - Helsgaun, K. (2000). “An effective implementation of the Lin-Kernighan traveling Salesman Problems.” *European Journal of Operational Research,* Vol. 126, PP. 106-130.

11 - Fischetti, M., Gonz´alez, J. J. S. and Toth. P. (1997). “A branch-and-cut algorithm for the symmetric generalized traveling salesman problem.” *Operations Research,* Vol. 45, No. 3, PP. 378–394.

12 - Chentsov, A. G. and Korotayeva, L. N. (1997). “The dynamic programming method in the generalized traveling salesman problem.” *Mathematical and Computer Modeling,* Vol. 25, No. 1, PP. 93–105.

13 - Winston, W.L. (2003). *Operations Research, Applications and Algorithms,* Duxbury Press.

14 - Sang-Ho, K., Hun-Tae, K. and Maing-Kyu, K. (2003). “A genetic algorithm with a mixed region search for the asymmetric traveling salesman problem.” *Computers & Operations Research,* Vol. 30, PP. 773–786.

15 - Pepper, J., Golden, B. and Wasil, E. (2002). “Solving the traveling salesman problem with annealing-based heuristics: a computational study.” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics,* Part A, Vol. 32, PP. 72 - 77.

16 - Dorigo, M. and St¨utzle, T. (2002). “The ant colony optimization metaheuristic: Algorithms, applications and advances.” In F. Glover and G. Kochenberger, editors, *Handbook of Metaheuristics.* Kluwer Academic Publishers.

17 - Glover, F. and Laguna, M. (1999). *Tabu Search,* Kluwer Academic Publishers.

18 - Louren¸co, H. R., Martin, O. and St¨utzle, T. (2002). “Iterated local search.” In F. Glover and G. Kochenberger, editors, *Handbook of Metaheuristics,* Vol. 57 of International Series in Operations Research & Management Science, PP. 321–353. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

19 - Sang-Ho, K., Hun-Tae, K. and Maing-Kyu, K. (2005). “Determination of the candidate arc set for the asymmetric traveling salesman problem.” *Computers & Operations Research*, Vol. 32, PP. 1045–1057.

20 - Glover, F., Gutin. G., Yeo, A. and Zverovitch A. (2001). “Construction heuristics for the asymmetric TSP.” *European Journal of Operational Research,* Vol. 129, PP. 555–68.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1 - Circuit Board Printing
2 - Job Scheduling
3 - Job Sequencing
4 - Branch and Bound
5 - Dynamic Programming
6 - Benchmark Problems
7 - Nearest Neighbor
8 - Greedy
9 - Genetic Algorithm
10 - Simulated Annealing
11 - Ant Colony
12 - Tabu Search
13 - Relaxed Problem

پیوست‌ها

پیوست ۱. ماتریس نرمال‌سازی شده و مثال کامل ساخت تور

فرض کنید C، ماتریس هزینه تخصیص است. این ماتریس، دو ماتریس نرمال‌سازی شده دارد؛ آن‌ها را $\overline{C}_2$ و $\overline{C}_1$ می‌نامیم. مقدار کمینه هزینه تخصیص ۱۲ است و درایه‌های 0^+، متغیرهای $X_{ij}=1$ را نشان می‌دهند. d_i، اختلاف دو کوچک‌ترین درایه در سطر i و d_j، اختلاف دو کوچک‌ترین درایه در ستون j است. با اجرای

روش پیشنهادی بر روی $\overline{C}_1$، که جزئیات کامل آن در زیر آمده است، تور $1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$ با هزینه ۱۳ تولید می‌شود. این یک تور بهینه این مسئله است. با اجرای روش پیشنهادی بر روی $\overline{C}_2$ نیز همان تور بهینه تولید می‌شود.

$$C = \begin{bmatrix} M & 1 & 4 & 3 \\ 3 & M & 4 & 6 \\ 4 & 7 & M & 8 \\ 6 & 4 & 2 & M \end{bmatrix} \to \overline{C}_1 = \begin{bmatrix} M & 0^+ & 4 & 2 \\ 0^+ & M & 0 & 1 \\ 0 & 1 & M & 0^+ \\ 5 & 1 & 0^+ & M \end{bmatrix}, \overline{C}_2 = \begin{bmatrix} M & 0^+ & 5 & 0 \\ 0^+ & M & 2 & 0 \\ 1 & 3 & M & 0^+ \\ 3 & 0 & 0^+ & M \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \frac{d_j}{d_i} & 0 & 1 & 0 & 1 & & \frac{d_j}{d_i} & 5 & - & 0 & 1 & & \frac{d_j}{d_i}(M) & - & - & 1 \end{array}$$

$$\tilde{C}_1 = \begin{matrix} (2) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} M & 0^1 & 4 & 2 \\ 0 & M & 0 & 1 \\ 0 & 1 & M & 0 \\ 5 & 1 & 0 & M \end{bmatrix}, \tilde{C}_1 = \begin{matrix} - \\ 1 \\ 0 \\ (5) \end{matrix} \begin{bmatrix} M & 0^1 & 4 & 2 \\ M & M & 0 & 1 \\ 0 & 1 & M & 0 \\ 5 & 1 & 0^2 & M \end{bmatrix}, \tilde{C}_1 = \begin{matrix} - \\ 1 \\ 1 \\ - \end{matrix} \begin{bmatrix} M & 0^1 & 4 & 2 \\ M & M & 0 & 1 \\ 0 & 1 & M & M \\ 5 & 1 & 0^2 & M \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \frac{d_j}{d_i} & - & - & - & 1 \end{array}$$

$$\tilde{C}_1 = \begin{matrix} - \\ 1 \\ - \\ - \end{matrix} \begin{bmatrix} M & 0^1 & 4 & 2 \\ M & M & 0 & 1 \\ 0^3 & 1 & M & M \\ 5 & 1 & 0^2 & M \end{bmatrix}, \tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} M & 0^1 & 4 & 2 \\ M & M & 0 & 1^4 \\ 0^3 & 1 & M & M \\ 5 & 1 & 0^2 & M \end{bmatrix}$$

پیوست ۲. مثال‌های بهبود تور

مثال ۱. تغییر مکان یک شهر در تور

یک مسئله ۵ شهری با ماتریس هزینه ذیل موجود است. فرض‌شود تور ۱-۳-۴-۵-۲-۱ با هزینه ۳۵، تور فعلی است، این تور با علامت "*" در ماتریس مذکور مشخص شده‌است. ملاحظه می‌شود که در سطر اول، هزینه ۴ کم-ترین هزینه است. ولی در سطر دوم بیش‌ترین هزینه تخصیص را داریم، پس هر کدام از شهرهای ۱ و ۳ و ۴ کاندیدای ورود به تور می‌باشند. اگر به دلخواه شهر ۳ را برای ورود به تور انتخاب کنیم، همان‌طورکه گفته شد، می‌توانیم این تغییر را به دو صورت در تور درج کنیم: الف. می‌توان این کار را با درج شهر ۳ بعد از شهر ۲ انجام داد که دراین‌صورت تور به شکل ۱-۴-۵-۳-۲-۱ با هزینه ۲۵، در می‌آید که یک تور بهینه است. ب. درصورت درج شهر ۲ قبل از شهر ۳ نیز این خواسته تحقق می‌یابد که دراین‌صورت تور به شکل ۱-۳-۲-۴-۵-۱ با هزینه ۳۸ در می‌آید. با توجه به طول تور در هر دو مورد، تور اول برگزیده می‌شود یعنی تغییرات به شکل الف در تور درج می‌شود. اندیس "-"، کمان خروجی از تور و اندیس "+"، کمان ورودی به تور است.

$$C = \begin{bmatrix} M & 4^* & 8 & 6 & 8 \\ 5 & M & 7 & 11 & 13^* \\ 11^* & 6 & M & 8 & 4 \\ 5 & 7 & 2^* & M & 2 \\ 10 & 9 & 7 & 5^* & M \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} M & 4^* & 8 & 6 & 8 \\ 5 & M & 7^+ & 11 & 13^- \\ 11^- & 6 & M & 8 & 4^+ \\ 5^+ & 7 & 2^- & M & 2 \\ 10 & 9 & 7 & 5^* & M \end{bmatrix}$$

ماتریس مربوط به مثال ۱

مثال ۲. تغییر مکان دو شهر در تور

ماتریس ارائه‌شده در مثال ۱ را دو باره در نظر بگیرید. فرض‌کنید تور ۱-۳-۴-۵-۲-۱ با هزینه ۳۵، تور فعلی است، مشاهده می‌شود که در سطر دوم، هزینه درایه تخصیص داده شده حداقل نمی‌باشد. پس یک درایه کوچک‌تر از درایه تخصیص داده شده را به عنوان کاندیدای ورود به تور در نظر می‌گیریم. اگر در بین درایه‌های این سطر، درایه ستون ۳ را به برای ورود به تور انتخاب کنیم انگاه C_{25} و C_{43} "دو گوشه تخصیص یافته" فعلی، در سطر ۲ و ستون ۳، از یک چهارگوش می‌باشند. دو گوشه متقابل دیگر چهارگوش مربوطه عبارتند از C_{23} و C_{45}. حال در این چهارگوش جای تخصیص ها را تعویض می‌کنیم. اگر با اعمال این تغییرات، جواب یک تور باقی بماند و هزینه تور نیز کاهش یابد، آن‌ها را اعمال می‌کنیم، در غیر این‌صورت از اعمال آن‌ها صرف نظر می‌کنیم.

حاصل این تغییرات تور۱-۵-۴-۳-۲-۱ با هزینه ۳۱ است، چون طول تور کاهش یافته است پس این تغییرات را اعمال می‌کنیم. ماتریس زیر گویای این تغییرات می‌باشد.

$$C=\begin{bmatrix} M & 4^{*} & 8 & 6 & 8 \\ 5 & M & 7 & 11 & 13^{*} \\ 11^{*} & 6 & M & 8 & 4 \\ 5 & 7 & 2^{*} & M & 2 \\ 10 & 9 & 7 & 5^{*} & M \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} M & 4^{*} & 8 & 6 & 8 \\ 5 & M & 7^{+} & 11 & 13^{-} \\ 11^{-} & 6 & M & 8^{+} & 4 \\ 5 & 7 & 2^{-} & M & 2^{+} \\ 10^{+} & 9 & 7 & 5 & M \end{bmatrix}$$

ماتریس مربوط به مثال ۲

با اعمال این بهبود در مسائل مذکور، طول تور بین ۶۹/. درصد تا ۳۴/۹۲ درصد کاهش یافت و میانگین درصد بهبودها به ۱۶/۱ افزایش یافت.

مثال ۳. تغییر مکان سه شهر در تور

اگر ماتریس هزینه داده شده در مثال ۱ را در نظر بگیریم و تور ۱-۳-۴-۵-۲-۱ با هزینه ۳۵ تور فعلی ما باشد، مشاهده می‌شود که در سطر دوم و سوم، هزینه درایه تخصیص‌یافته هر سطر، کم‌ترین درایه آن سطر نیست. پس درایه‌های کم‌تر از درایه تخصیص داده شده هر سطر را به عنوان کاندیدای ورود به تور در نظر می‌گیریم. اگر در بین درایه‌های سطر دو، درایه ستون ۱ و در بین درایه‌های سطر سه، درایه ستون ۲ آنرا برای ورود به تور انتخاب کنیم، باید تخصیص های واقع بر سطر ۱ و ستون ۲؛ سطر ۲ و ستون ۵ وهمچنین سطر ۳ و ستون ۱ از تخصیص خارج شوند. حال برای قابل قبول ماندن تور باید درایه واقع بر سطر ۱ و ستون ۵ را نیز به تور وارد کنیم. توجه شود که درایه واقع بر سطر ۱ و ستون ۵ در تقاطع سطر و ستونی است که خروجی از تور دارند ولی ورودی به آنرا ندارند. اگر با اعمال این تغییرات، جواب یک تور باقی بماند و هزینه تور نیز کاهش یابد، آن‌ها را اعمال می‌کنیم، در غیر این‌صورت از اعمال آن‌ها صرف نظر می‌کنیم. مشاهده می‌شود که با انجام این تغییرات، جواب یک تور است و هزینه تور نیز کاهش می‌یابد؛ حاصل این تغییرات تور ۱-۲-۳-۴-۵-۱ با هزینه ۲۶ است. ماتریس زیر گویای این تغییرات می باشد.

$$C=\begin{bmatrix} M & 4^{*} & 8 & 6 & 8 \\ 5 & M & 7 & 11 & 13^{*} \\ 11^{*} & 6 & M & 8 & 4 \\ 5 & 7 & 2^{*} & M & 2 \\ 10 & 9 & 7 & 5^{*} & M \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} M & 4^{-} & 8 & 6 & 8^{+} \\ 5^{+} & M & 7 & 11 & 13^{-} \\ 11^{-} & 6^{+} & M & 8 & 4 \\ 5 & 7 & 2^{*} & M & 2 \\ 10 & 9 & 7 & 5^{*} & M \end{bmatrix}$$

ماتریس مربوط به مثال ۳

پیوست ۳. یک تور بهینه برای مسئله‌ی rbg443 با ۴۴۳ شهر از مسائل معیار نامتقارن

1, 206, 33, 60, 436, 434, 429, 427, 433, 410, 411, 384, 398, 356, 364, 11, 8, 9, 84, 52, 110, 108, 332, 349, 361, 227, 277, 213, 223, 260, 122, 175, 99, 6, 7, 66, 26, 31, 34, 59, 128, 55, 234, 286, 220, 231, 41, 68, 15, 440, 442, 438, 437, 435, 415, 403, 407, 390, 382, 397, 406, 408, 409, 441, 394, 392, 402, 381, 379, 388, 186, 179, 210, 96, 156, 109, 164, 154, 153, 12 198, 141, 190, 87, 126, 53, 115, 167, 125, 123, 178, 209, 25, 143, 98, 89, 148, 78, 135, 252, 240, 293, 250, 238, 290, 330, 118, 171, 113, 111, 165, 88, 70, 131, 181, 65, 130, 142, 191, 105, 103, 161, 85, 56, 116, 35, 376, 375, 369, 359, 367, 383, 193, 192, 214, 82, 40, 67, 45, 416, 417, 418, 391, 401, 216, 224, 339, 357, 241, 296, 336, 313, 305, 341, 360, 422, 421, 112, 166, 420, 358, 259, 246, 297, 169, 203, 177, 176, 205, 218, 90, 151, 77, 30, 54, 28, 39, 373, 439, 443, 424, 431, 419, 413, 412, 423, 430, 426, 425, 432, 414, 396, 404, 366, 378, 320, 346, 247, 298, 235, 288, 255, 254, 208, 222, 236, 102, 160, 202, 217, 117, 168, 62, 17, 12, 338, 352, 83, 47, 73, 19, 18, 4, 76, 134, 58, 121, 16, 10, 150, 149, 197, 20, 13, 42, 69, 51, 50, 93, 75, 27, 37, 371, 385, 267, 264, 263, 187, 184, 211, 230, 292, 242, 229, 282, 270, 322, 124, 180, 127, 200, 81, 38, 64, 36, 405, 312, 303, 340, 266, 257, 302, 243, 232, 283, 107, 163, 95, 94, 97, 72, 133, 43, 71, 132, 185, 147, 146, 196, 183, 182, 173, 172, 204, 100, 158, 24, 23, 22, 32, 326, 324, 348, 265, 256, 301, 61, 29, 44, 80, 137, 63, 129, 140, 189, 170, 157, 201, 275, 374, 372, 387, 295, 335, 119, 174, 219, 225, 244, 354, 363, 46, 428, 393, 389, 399, 365, 370, 318, 316, 344, 245, 233, 285, 248, 299, 251, 239, 291, 261, 306, 249, 237, 289, 274, 271, 323, 74, 377, 314, 307, 342, 279, 272, 325, 207, 221, 91, 152, 86, 57, 120, 145, 195, 92, 155, 199, 215, 101, 159, 106, 104, 162, 139, 138, 79, 136, 188, 212, 49, 48, 144, 194, 380, 395, 226, 269, 258, 304, 280, 273, 327, 294, 331, 315, 309, 343, 284, 278, 328, 311, 287, 329, 276, 386, 400, 321, 347, 319, 317, 345, 114, 353, 362, 368, 355, 334, 350, 333, 351, 253, 300, 337, 228, 281, 268, 310, 262, 308, 21, 14, 3, 5, 2, 1.

.