

## به کارگیری نمای لیاپانوف برای مدل سازی سری زمانی قیمت نفت بر پایه توابع پویا

علی معینی

استادیار گروه علوم پایه مهندسی دانشکده فنی دانشگاه تهران

حمید ابریشمی

استاد دانشکده اقتصاد دانشگاه تهران

مهدی احراری

کارشناس ارشد اقتصاد

تاریخ دریافت: ۸۴/۱۱/۱۳ تاریخ تصویب: ۸۵/۶/۲۸

### چکیده

به کارگیری سیستم‌های غیرخطی پویا در تحلیل سری‌های زمانی اقتصادی، مدت‌هاست که مورد توجه اقتصاددانان قرار گرفته است. سیستم‌های غیرخطی پویا، رفتارهای مختلفی را از خود بروز می‌دهند، که می‌تواند در توجیه بسیاری از پدیده‌های اقتصادی که به نظر تصادفی می‌آیند، به کار گرفته شود. در این مقاله، راهکاری ارائه شده است، که براساس آن می‌توان تابع پویای خاصی را برای مدل‌سازی سری زمانی مفروضی به کار گرفت. ابتدا بزرگترین نمای لیاپانوف با ابعاد محاط برای سری زمانی محاسبه و با تطابق آن با نمای لیاپانوف تابع پویا، پارامتر کنترل کننده تابع، تخمین زده می‌شود. در این مقاله، از تابع لجستیک برای مدل‌سازی قیمت روزانه نفت در بازه زمانی ۱۹۹۸-۲۰۰۰، استفاده شده است. تابع لجستیک حاصل، برای پیش‌بینی قیمت در روندهای مختلف به کار گرفته شده است. نتایج به دست آمده از دقت بالایی برخوردار است. به محض آن که بتوان تابع پویا را به سری زمانی مفروضی برازش کرد، رفتارهای غیرخطی این تابع، می‌تواند در تحلیل عملکرد سری زمانی، امکان زیادی را در اختیار تحلیل‌گر اقتصادی قرار دهد.

طبقه‌بندی JEL: C5, C53.

کلید واژه: آشوب، تابع لجستیک، قیمت نفت، سیستم‌های پویا، نمای لیاپانوف،

سری زمانی.

## ۱- مقدمه

فرضیه غالب در تحلیل نوسان قیمت در بازارهای مختلف (کالا، سهام، بازارهای مالی و ...)، تصادفی بودن بازار است. می‌دانیم که یکی از علل تغییرات قیمت‌ها، اثرات خارجی از قبیل سیاست‌های اقتصادی، شرایط محیطی، مسائل سیاسی و اجتماعی‌اند. در فرضیه فوق، اثرات خارجی در قالب جزء نوفه یا نویز مدل می‌شود و فرایندها تصادفی در نظر گرفته می‌شوند. سؤال اصلی این است که نوفه در طبیعت یا ذات قیمت‌ها وجود دارد یا خیر؟ اگر یک سری زمانی را روند زدایی کنیم، اغلب باقیمانده‌ها دارای نوسانات تصادفی‌اند ولی اگر باقیمانده‌ها نسبت به شرایط اولیه حساس باشند، ممکن است سیستم، غیرخطی عمل کند و از یک مکانیسم غیرتصادفی تبعیت کند. وقتی که قیمت یک کالا افزایش پیدا می‌کند، معمولاً نیروی خود تنظیم کننده‌ای قیمت‌ها را به سمت پائین منحرف می‌کند و برعکس، وقتی که قیمت کاهش پیدا می‌کند، این نیرو سبب تنظیم قیمت‌ها به سمت بالا می‌شود. این مکانیسم بازخور، می‌تواند خطی یا غیرخطی باشد. اگر سیستم مورد نظر دارای مکانیسم بازخور خطی باشد، بازار در مقابل تغییرات به وجود آمده در قیمت‌ها، فرایند تعدیلی با یک «نسبت ثابت» را برای تصحیح قیمت‌ها به سمت تعادل ایجاد خواهد کرد. اگر سیستم، غیرخطی باشد، فرایند تعدیل قیمت‌ها، مانند حالت خطی با یک نسبت ثابت نخواهد بود. به عنوان مثال، نگرش بدبینانه مردم، تغییرات در قیمت‌ها را تشدید می‌کند و به تبع آن، وجود آثار غیرخطی به طور بارزی بروز می‌کند.

رفتارها، روابط، کنش‌ها و انگیزه‌های پیچیده افراد در سیستم غیرخطی با مکانیسم بازخور، در بعضی موارد می‌تواند بیانگر حساسیت به شرایط اولیه باشد. مکانیسم بازخور غیرخطی، علاوه بر توصیف و تحلیل بازار، می‌تواند نوسانات قیمت‌ها را بدون رجوع به اثرات تصادفی توضیح دهد و همچنین، قادر خواهد بود یک ساختار معین و غیر تصادفی را از قیمت‌ها استخراج کند. انواع گوناگون و پیچیده‌ای از سیستم‌های غیرخطی با مکانیسم بازخور با توابع متفاوت وجود دارد. از آن میان، تابع لجستیک و تابع هنون را می‌توان نام برد.

1 - Noise.

2 - Self-Regulating Force.

اکثر پدیده‌هایی که در عمل با آن‌ها مواجه‌ایم، دارای ماهیت غیرخطی‌اند و معادلهٔ حاکم بر عملکرد آن‌ها به‌سادگی قابل حصول نیست. آنچه در عمل در دست داریم، مقدار زیادی داده به‌صورت سری زمانی است. تلاش‌های زیادی شده است که بر سری‌های زمانی توابع پویای غیرخطی برازش انجام شود.

در این مقاله، سعی شده است به سری زمانی قیمت نفت، تابعی پویا برازش شود. برای این کار، نمای لیاپانوف سری زمانی با ابعاد محاط حساب شده است. براساس ماهیت بازار تابع پویائی را انتخاب کرده و نمای لیاپانوف آن‌را برحسب پارامترهای تابع محاسبه می‌کنیم. از تطابق نمای حاصل از محاسبات فوق، پارامترهای تابع را تخمین می‌زنیم.

در بخش ۲، نمای لیاپانوف شرح داده شده است. در بخش ۳، دربارهٔ تابع لجستیک بحث می‌کنیم. اساس انتخاب تابع لجستیک بر این فرض استوار بوده است، که تابع به‌خوبی می‌تواند ماهیت بازارهای مبتنی بر عرضه و تقاضا را مدل کند. در بخش ۴، نتیجهٔ محاسبات و در بخش ۵، پیش‌بینی قیمت آتی نفت با تابع لجستیک ذکر شده است. بخش ۶، که در برگیرندهٔ نتیجه‌گیری است، پایان بخش مقاله است.

## ۲- نمای لیاپانوف

اگرچه یکی از ویژگی‌های مهم سیستم‌های پویا، حساسیت آن‌ها به شرایط اولیه است، تعیین کمی میزان این حساسیت کار ساده‌ای نیست. نمای لیاپانوف، یکی از ابزارهایی است که برای این منظور به کار می‌رود. نمای لیاپانوف به همان سبک و سیاق محاسبهٔ مقادیر ویژهٔ سیستم‌های پویا محاسبه می‌شود و تا حدودی از نظر مفهوم با آن نزدیک است. مقادیر ویژه، معمولاً در یک نقطه در فضای حالت، نظیر نقطهٔ تعادل، محاسبه می‌شوند، حال آن‌که نمای لیاپانوف، متوسط گیری هندسی در مسیر پایدار سیستم است. برخلاف مقادیر ویژه که می‌تواند مختلط نیز باشد، نمای لیاپانوف همواره عددی حقیقی است. نظیر مقادیر ویژه تعداد نمای لیاپانوف، با بُعد سیستم برابر است. در حالی که اگر بُعد از دو بیشتر باشد یا تعداد نمای لیاپانوف از دو بیشتر باشد، مسیرهای

متناظر این نماها در سیستم، دو به دو بر هم عمودند. این موضوع، به طور حتم برای مقادیر ویژه برقرار نیست. جدول شماره ۱، خلاصه مطالب بالا را در بردارد. (Sportt, C., 2003).

جدول شماره ۱- مقایسه مقادیر ویژه و نمای لیاپانوف

مقادیر ویژه	نمای لیاپانوف
مقدار عملی	مقدار جهانی
مقدار ثابت	مقدار متوسط
عدد مختلط	عدد حقیقی
نه ضرورتاً متعامد	ضرورتاً متعامد

علامت مثبت نمای لیاپانوف در یک سیستم پویای کراندار، وقوع آشوب و مقدار آن چگونگی وقوع آن را پیش‌بینی می‌کند مقدار نمای لیاپانوف، بیان می‌کند که به طور متوسط با چه سرعتی قابلیت پیش‌بینی در سیستم از دست می‌رود.

## ۲-۱- محاسبه نمای لیاپانوف برای سری زمانی

برای محاسبه نمای لیاپانوف برای سیستم‌هایی که معادله آن‌ها مشخص نیست و تنها سری‌های زمانی آن‌ها در دسترس است، الگوریتم‌های متعددی پیشنهاد شده است: Nychka (1992) Gencay (1992) و Wolf (1985). الگوریتم ولف، سری زمانی را برای نقاط نزدیک در فضای حالت مورد جستجو قرار می‌دهد. این نقاط، یا فضای حالت را چندین بار دور زده‌اند و یا به سرعت واگرا شده‌اند. نقاط نزدیکی که در یک جهت باشند، انتخاب می‌شوند. مشتق در راستای جهتی که حداکثر گسترش وجود دارد، گرفته می‌شود و حد متوسط لگاریتم آن‌ها روی مسیر فضای حالت، بزرگترین نمای لیاپانوف را به دست می‌دهد.

برای محاسبه نمای لیاپانوف بر اساس الگوریتم ولف، ابتدا ماتریس  $m^*(N-m+1)$  بعدی از  $N$  داده اسکالر سری زمانی را ایجاد می‌کنیم. از میان این ماتریس، تمام جفت بردارهایی  $x_i$  و  $x_j$  را که در رابطه زیر صدق می‌کنند، مشخص می‌کنیم:

$$r_o(m; i, j) = |x_i - x_j| < \varepsilon$$

که در آن  $\varepsilon$ ، مقدار کوچک مثبت است. با رشد طول زمانی  $n$ ،  $r_n(m; i, j)$  را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$r_n(m; i, j) = |x_{i+n} - x_{j+n}|$$

سپس میزان واگرایی  $d_n(m; i, j)$  نقاط نزدیک به هم را در فضای  $m$  بعدی به صورت زیر:

$$d_n(m; i, j) = \frac{r_n}{r_0} = \frac{|x_{i+n} - x_{j+n}|}{|x_i - x_j|} \quad ( )$$

به دست می آوریم. آن گاه بزرگ ترین نمای لیاپانوف  $\lambda$  را از رابطه زیر محاسبه می کنیم:

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-n} \sum_{n=0}^{N-1} \log d_n(m; i, j) \quad ( )$$

$$N \rightarrow \infty$$

در این جا، براساس این الگوریتم و با استفاده از نرم افزار MATLAB، برنامه ای برای محاسبه  $\lambda$  نوشته ایم.

## ۲-۲- محاسبه نمای لیاپانوف برای سیستم پویا

نمای لیاپانوف برای سیستم پویا که تابع آن مشخص است، به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln |F'(P_t)| \quad ( )$$

$$N \rightarrow \infty$$

که در آن  $F$ ، تابع پویایی است که روی  $P_t$  عمل می کند و  $P_{t+1}$  را می دهد.

$\lambda$ ، می تواند مقادیر مثبت، منفی و صفر را به شرح ذیل اختیار کند:

۱- اگر  $\lambda < 0$ ، آن گاه یک نقطه ثابت یا یک چرخه متناوب پایدار خواهیم داشت. به عبارت دیگر، تمام نقاط اولیه انتخابی، به سمت یک نقطه ثابت یا چرخه متناوب،

هم‌گرا خواهند شد. به این سیستم‌ها، پایدارمجانب اطلاق می‌شود. با افزایش منفی  $(\lambda \rightarrow -\infty)$ ، پایداری سیستم افزایش می‌یابد، به طوری که برای  $\lambda = -\infty$ ، یک نقطه ثابت یا یک چرخه متناوب فوق پایدار وجود دارد.

۲- اگر  $\lambda = 0$  باشد، سیستم فقط حول یک نقطه ثابت نوسان می‌کند. در این حالت، هر نقطه اولیه انتخابی، حول یک چرخه حدی پایدار نوسان می‌کند. این نوع سیستم موسوم به پایدار لیاپانوف است.

۳- اگر  $\lambda > 0$ ، هیچ نقطه ثابت و یا چرخه متناوب پایداری وجود ندارد. در حقیقت، نقاط ناپایدار ولی سیستم کران‌دار و آشوبناک است. در این حالت، به دلیل حساسیت بالا به شرایط اولیه، مسیرهای نزدیک به هم به سرعت واگرا می‌شوند.

### ۳- تابع لجستیک

شکل کلی تابع لجستیک به صورت زیر است :

$$P_{t+1} = AP_t[1-P_t] = AP_t - AP_t^2 = F[P_t] \quad (4)$$

که در آن  $P_t$  تابعی از زمان و  $A$  پارامتر کنترل کننده است، که مقادیر ثابت و مثبت اختیار می‌کند.

قسمت اول این تابع، مبین رشد و قسمت دوم آن بیان‌گر کنترل رشد است. به‌عنوان مثال، اگر  $P_t$  را جمعیت حشره مفروضی فرض کنیم و حداکثر ظرفیت قابل تحمل آن‌ها را با در نظر گرفتن نرمال‌سازی، ۱ فرض کنیم برای  $P_t \ll 1$ ، تابع لجستیک به‌صورت  $X_{n+1} = AX_n$  درخواهد آمد و جمعیت حشرات رشد خواهد کرد. با افزایش جمعیت، پارامتر کنترل کننده مندرج در جمله دوم مقدار خواهد گرفت و جمعیت را کنترل خواهد کرد. این پدیده در فرایند قیمت که مبتنی بر عرضه و تقاضا است نیز حاکم است و بر این اساس، استوتزر (۱۹۸۰)، از تابع لجستیک برای مدل‌سازی در اقتصاد کلان بهره برده است. در این جا ما نیز به همین دلیل که قیمت نفت در بازه زمانی مورد نظر از

1- Asymptotic Stability.

2- Super Stable.

3- Lyapunov Stability.

4- Unstable.

5- Controller Parameter.

6- Stutzer.

یک مکانیزم عرضه و تقاضا پیروی کرده است، از تابع لجستیک استفاده کرده ایم. بدیهی است از توابع دیگر نیز بسته به نوع بازار می توان بهره جست.

مقدار  $A$ ، با عنوان کنترل کننده عملکرد تابع لجستیک، نقش اساسی دارد، به طوری که به ازای بعضی مقادیر خاص  $A$ ، پدیده آشوب اتفاق می افتد. برخی ویژگی های پدیده آشوب عبارتند از:

الف) یک سری نمونه ای آشوبناک، باید در تمام حوزه سری واقع در محدوده مقادیر اولیه قرار بگیرد. به عنوان مثال در معادله (۴)، به ازای  $0 < P_0 < 1$ ، تمامی مقادیر دنباله  $P_t$  در همین فاصله قرار دارند.

ب) با وقوع آشوب، پیش بینی بلند مدت عملی نیست. انحراف کوچکی در مقادیر اولیه، خطای بزرگی در مسیر سری قیمت ایجاد شده از آن را به وجود خواهد آورد. به عبارت دیگر، سیستم آشوبناک، نسبت به شرایط اولیه حساسیت بالایی دارد و خطاهای خروج از مسیر اصلی به سرعت جمع شده و در عمل پیش بینی در بلند مدت را غیر ممکن می کند. در این حالت، فقط می توان نسبت به پیش بینی معین در کوتاه مدت امیدوار بود.

ج) در یک سیستم آشوبناک، می توان  $P_0$  هایی را پیدا کرد، که  $P_t$  های متناوب چرخه ای ایجاد کنند. به این مقادیر اولیه، «نقاط متناوب» گفته می شود. وجود تعداد زیادی از نقاط متناوب در معادله (۱)، آغاز ورود به یک سیستم آشوبناک است.

در نهایت، به دلیل کثرت اطلاعات و بروز رفتارهای متنوع در بازارهای مالی، هرچه پیچیدگی معادله (۴) بیشتر باشد، تحلیل و به دنبال آن پیش بینی دقیق تر می شود.

اگر بتوان فرایند خود تنظیم کنندگی قیمت را به صورت پایدار از این تابع غیرخطی به دست آورد، آن گاه این معادله به عنوان یک مدل مناسب برای پیش بینی، مؤثر و کارا خواهد بود. اگر  $P_t$ ، قیمت در زمان  $t$  و  $\bar{P}$  میانگین نوسانات قیمت و  $g(t)$  انحراف از این میانگین باشد، می توان نوشت:

$$P_t = \bar{P} + g(t)$$

1- Periodic Points.

2- Complexity.

بنابراین، می‌توان یک مدل برای نوسانات قیمت، با توجه به مقادیر  $\bar{P}$ ، شامل یک مکانیسم بازخور غیرخطی ساده و سری متغیرهای انحراف از میانگین  $g(t)$ ، برای  $P_t$  تعدیل شده ساخت.

بحث بعدی این است که یک مسئله غیرخطی با ساختار و فرایند متغیر را، با یک مسئله معین و مشخص از رفتار قیمت‌ها مقایسه و تطبیق کنیم. در واقع، انتخاب یک مدل کاملاً متناسب با ساختار قیمت‌ها کار بسیار مشکل و حتی محال است. کاربرد معادله لجستیک، که یک معادله تفاضلی غیرخطی است، می‌تواند به عنوان یک تابع پایه‌ای از جهت تعیین ساختار غیرخطی سری قیمت‌ها، بهبود پیش‌بینی و بالاخره، یافتن یک الگوی عمومی مورد استفاده قرار بگیرد.

متغیرهای کیفی خارجی، در مدل‌های اقتصادی، رفتارهای متفاوت و متنوعی را از نظر تأثیرگذاری بر متغیرهای اصلی از خود بروز می‌دهند و به‌عنوان اثرات خارجی، سیستم اقتصادی را به شکل بنیانی و کلان متأثر می‌کنند.

فرض می‌کنیم تغییر بزرگی در بازار یا سیستم اقتصادی ایجاد شود، می‌توان تصور کرد که این تغییر به احتمال فراوان ناشی از اثرات متغیرهای کیفی خارجی باشد. اما ضرورتاً این چنین نیست. مدل‌های غیرخطی پویا می‌توانند این مسأله را به گونه‌ای دیگر تشریح کنند. تغییر کوچکی در یک پارامتر مفروض، بدون هیچگونه تغییری در سایر شرایط خارجی، با فرض ثبات سایر شرایط، می‌تواند موجب تغییرات کیفی در سری قیمت‌ها شود. به‌عنوان مثال، رکود عظیمی که در قیمت‌های سهام در دوشنبه سیاه ۱۹۷۸ در بازار بورس نیویورک پدید آمد، به طور آشکاری وجود تغییرات عمده در شاخص‌ها و یا سیاست‌های اقتصادی را در ایجاد این بحران منتفی دانست Homenes (1991) و Savit (1984)، Savit (1988). بی‌شک این رکود در نگرش‌های کلان اقتصادی، می‌بایست با تغییرات اساسی و بزرگ در متغیرهای کیفی خارجی مرتبط می‌شد، حال آن‌که ممکن است بتوانیم با یک مدل پویای غیرخطی، ساختار این سیستم را تشریح و پیش‌بینی کنیم.

به بیان دیگر، در یک سیستم غیرخطی، تغییرات کیفی در رفتار قیمت‌ها، ضرورتاً وابسته به تغییرات در متغیرهای کیفی خارجی نیست. این نتیجه، به ما کمک می‌کند



که ساختارها و الگوها و مدل های بهتری را برای تحلیل این گونه وقایع پیشنهاد کنیم و توانایی خود را در قابلیت پیش بینی منطقی بهبود دهیم.

در بخش بعدی، نمای لیاپانوف تابع لجستیک را بر حسب  $A$  محاسبه می کنیم و با محاسبه نمای لیاپانوف سری زمانی، به کمک الگوریتم ولف و تطبیق این مقدار با نمای لیاپانوف تابع لجستیک، مقدار  $A$  را تخمین می زنیم. به این ترتیب، می توان تابعی پویا برای سری زمانی به دست آورد، که تحلیل آن امکان بیشتری در اختیار ما قرار می دهد که برخی عملکردهای سری زمانی را دریابیم.

#### ۴- نتایج محاسبات

##### ۴-۱- محاسبه نمای لیاپانوف برای تابع لجستیک

برای تابع لجستیک، نمای لیاپانوف بر اساس معادله ۳ برابر خواهد شد با:

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \log |A(1 - 2X_n)|$$

به طوری که:

$$X_{t+i} = AX_t(1 - X_t)$$

نتایج محاسبه  $\lambda$  در جدول ۲، به ازاء  $N=1000$  و  $N=4000$  و  $X_0 = 0.5$ ، نشان داده شده است. ملاحظه می شود که به ازاء  $0 < A < 1$ ، سیستم به سمت نقاط پایدار میل می کند. به ازاء  $1 < A < 3$ ، موقعیت سیستم هم چنان نقاط ثابت غیر صفر پایدار است. به ازاء  $3 < A < 3.449$ ، چرخه های حدی ۲ و ۴ را داریم و به ازاء  $3.449 < A < 3.5699$ ، چرخه های بی نهایت و به ازاء  $3.5699 < A < 4$ ، سیستم وارد آشوب می شود.

جدول ۲- مقادیر  $\lambda$  برای تابع لجستیک، به ازای  $X_0 = 0.5$  و  $N = 1000$  و  $N = 4000$

$\lambda_A$	$N = 1000$	$N = 4000$	تحلیل موقعیت
0.75	-0.4169	-1.662	نقطه ثابت صفر پایدار
1	-0.0165	-0.0205	نقاط ثابت غیر صفر پایدار
1.99	-6.6439	-26.5754	نقاط ثابت غیر صفر پایدار
2	-Inf	-Inf	نقطه ثابت فوق پایدار
2.25	-1.999	-7.999	نقاط ثابت غیر صفر پایدار

$\lambda$ A	N = 1000	N = 4000	تحلیل موقعیت
3	-0.0111	-0.0141	نقاط ثابت غیر صفر پایدار
3.15	-0.7032	-2.8113	چرخه حدی - ۲
3.449	-0.0093	-0.0147	چرخه حدی - ۴
3.569 9	-0.0023	-0.0105	چرخه حدی بی‌نهایت
3.57	+0.021	+0.0693	شروع آشوب
3.68	+0.5223	+2.0525	منطقه آشوب
3.82	+0.6422	+2.4812	مرز اولیه چرخه حدی - ۳
3.89	+0.6905	+2.8142	مرز پایانی چرخه حدی - ۳ و برگشت به محدوده آشوب
4	2	8	آشوب کامل

#### ۴-۲ - محاسبه نمای لیاپانف براساس الگوریتم ولف برای سری زمانی

سری زمانی مورد نظر، قیمت‌های روزانه نفت در بازه زمانی سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۰ است. از این مجموعه، ۱۰۲۷ نمونه انتخاب شده است. براساس رابطه ۲، برای سری زمانی با ابعاد محاط، به ازاء  $m=1$  و  $N=1027$ ، مقدار نمای لیاپانوف چنین است:  $\lambda=1.25$  با مقایسه این مقدار و  $\lambda$  مندرج در جدول ۲، ملاحظه می‌شود که  $\lambda$  به ازای  $N=1000$  و  $4000$ ، همواره با  $3/82 < A < 3/68$  که دامنه آشوب است، حاصل می‌شود.

با توجه به حجم نمونه انتخابی از قیمت نفت ( $N=1027$ )، مقدار حدی محاسبه شده پارامتر کنترل‌کننده معادله لجستیک، که همان ضریب مدل تحلیل و پیش‌بینی آشوب است، با مقدار  $A \approx 3/7852$  تخمین زده می‌شود.

#### ۵- پیش‌بینی قیمت آتی با تابع لجستیک

برای پیش‌بینی یک سری زمانی بر پایه تابع لجستیک، می‌توان چهار روند کلی زیر را تحت فرایند خود تنظیم‌کنندگی قیمت و مکانیسم بازخور غیرخطی، تحلیل کرد:

۱- روند لجستیک<sup>۱</sup>: تغییرات قیمت تحت معادله لجستیک، شامل مکانیسم بازخور غیرخطی برای تعدیل قیمت‌ها بر روی میانگین آن‌ها در این حالت، طول بازه زمانی پیش‌بینی بادقت بالا و خطای کم، بیشتر شده و پایداری مکانیسم خود

1- Logistic Trend.

تنظیم کنندگی افزایش می یابد. مقادیر میانگین و انحراف معیار مقادیر واقعی و پیش بینی در این روند، به طور بارز و معنی داری به هم نزدیک اند که امری مشخص بوده و هم چنین ضامن پایداری روند مذکور است.

۲- روند بی ثباتی توأم با تغییر<sup>۱</sup> یا تناوب ادواری<sup>۲</sup>: تغییرات قیمت براساس نوسان بین مرزهای آشوب و چرخه های حدی متناوب است که یک عدم پایداری در مکانیسم خود تنظیم کنندگی را به دنبال خواهد داشت. در این حالت، بازه زمانی پیش بینی با دقت بالا و خطای کم، کوتاه و پایداری مکانیسم خود تنظیم کنندگی به سرعت از بین می رود. با وجود نزدیکی میانگین مقادیر واقعی و پیش بینی در این روند، انحراف معیار آن ها به طور معنی داری متفاوت است به طوری که سرعت واگرایی مقادیر پیش بینی از واقعی، عدم پایداری روند پیش بینی را در بازه زمانی کوتاه مدت؛ تأیید می کند.

۳- روند اکیداً صعودی<sup>۳</sup>: تغییرات قیمت دارای یک روند اکیداً افزایشی و بدون نوسان غیرخطی خواهد بود. در این حالت، به دلیل عدم تبعیت از مکانیسم بازخور غیرخطی، مقادیر پیش بینی به سرعت از مقادیر واقعی واگرا شده و پیش بینی فقط در زمان بسیار کوتاه و با وقفه زمانی یک روزه امکان پذیر است و پایداری مکانیسم خود تنظیم کنندگی به سمت صفر میل می کند. به دلیل وجود یک روند اکیداً افزایشی و بدون نوسان غیرخطی؛ بدیهی است که میانگین و انحراف معیار مقادیر واقعی و پیش بینی؛ به طور آشکاری تفاوت دارند. بنابراین، سرعت واگرایی مقادیر پیش بینی از واقعی و عدم پایداری روند پیش بینی، نسبت به دو حالت قبل به مراتب بیشتر است.

۴- روند اکیداً نزولی<sup>۴</sup>: تغییرات قیمت دارای یک روند اکیداً کاهشی و بدون نوسان غیرخطی خواهد بود. در این حالت، به دلیل عدم تبعیت از مکانیسم بازخور غیرخطی، مقادیر پیش بینی به سرعت از مقادیر واقعی واگرا شده و پیش بینی فقط در زمان بسیار کوتاه و با وقفه زمانی یک روزه امکان پذیر است و پایداری مکانیسم

1- Fluctuate Trend.

2- Intermittency.

3- Increasing Absolute Trend.

4- Decreasing Absolute Trend.

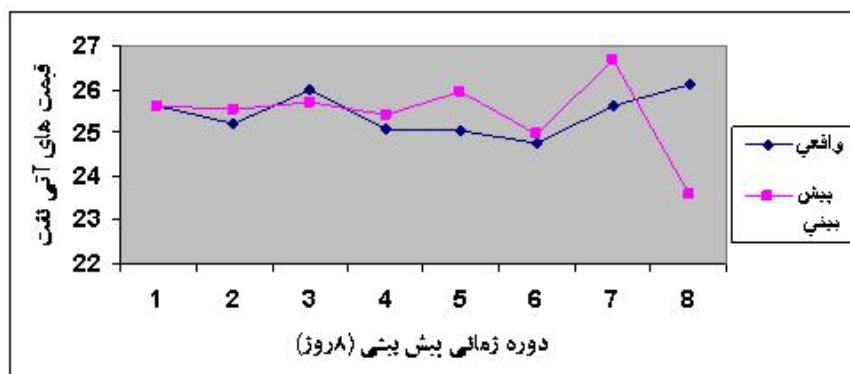
خود تنظیم کنندگی به سمت صفر میل می‌کند. به دلیل وجود یک روند اکیداً کاهشی و بدون نوسان غیرخطی؛ بدیهی است که میانگین و انحراف معیار مقادیر واقعی و پیش‌بینی؛ تفاوت معنی داری دارند. بنابراین سرعت واگرایی مقادیر پیش‌بینی از واقعی و عدم پایداری روند پیش‌بینی؛ مشابه روند اکیداً صعودی است. روندهای ذکر شده، قابلیت تعمیم به میانگین‌های متحرک<sup>۱</sup> را دارند. جدول‌های ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷، نشان‌دهنده مقادیر واقعی، پیش‌بینی، تفاوت مقادیر واقعی و پیش‌بینی، انحراف معیار و میانگین مقادیر واقعی و پیش‌بینی، انحراف از میانگین واقعی و پیش‌بینی قیمت‌های آتی نفت برای روندهای چهارگانه فوق ذکر شده، محاسبه شده تحت معادله لجستیک به ازای  $A = 3/78852$  است.

جدول ۳- روند لجستیک قوی

دوره زمانی سری زمانی	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5	t+6	t+7	انحراف معیار	میانگین
مقادیر واقعی	۲۵/۶۳	۲۵/۲۱	۲۵/۹۷	۲۵/۰۷	۲۵/۰۶	۲۴/۷۶	۲۵/۶۲	۰/۴۲۰۴۲۱	۲۵/۳۳
مقادیر پیش‌بینی	۲۵/۶۳	۲۵/۵۴	۲۵/۷۱	۲۵/۴۱	۲۵/۹۴	۲۴/۹۸	۲۶/۶۷	۰/۵۲۰۷۸۳	۲۵/۶۹
تفاوت	-	-۰/۳۳	۰/۲۶	-۰/۳۴	-۰/۸۸	-۰/۲۲	-۱/۰۵		
انحراف از میانگین واقعی	-۰/۳	۰/۱۲	-۰/۶۴	۰/۲۶	۰/۲۷	۰/۵۷	-۰/۲۹		
انحراف از میانگین پیش‌بینی	-۰/۰۶	-۰/۱۵	۰/۰۲	-۰/۲۸	۰/۲۵	-۰/۷۱	۰/۹۸		

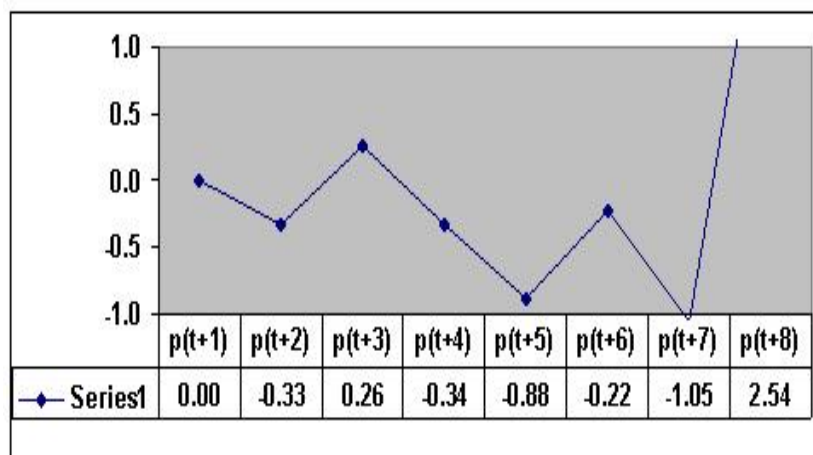
جدول ۳ و نمودار ۱، نشان می‌دهد که پیش‌بینی در ۶ روز آینده برای روند لجستیک قوی؛ از دقت و هم‌گرایی بالایی برخوردار است و از  $t + 6$  به بعد به سرعت واگرا شده و جهت تغییرات مقادیر پیش‌بینی شده و مقادیر اصلی نیز متقارن یا معکوس می‌شود. این به دلیل کامل نبودن تابع لجستیک برای تحلیل و پیش‌بینی روند قیمت‌ها برای بیش از ۶ روز است.

1- Moving Average.



نمودار ۱-۱- پیش بینی قیمت نفت روند لجستیک قوی

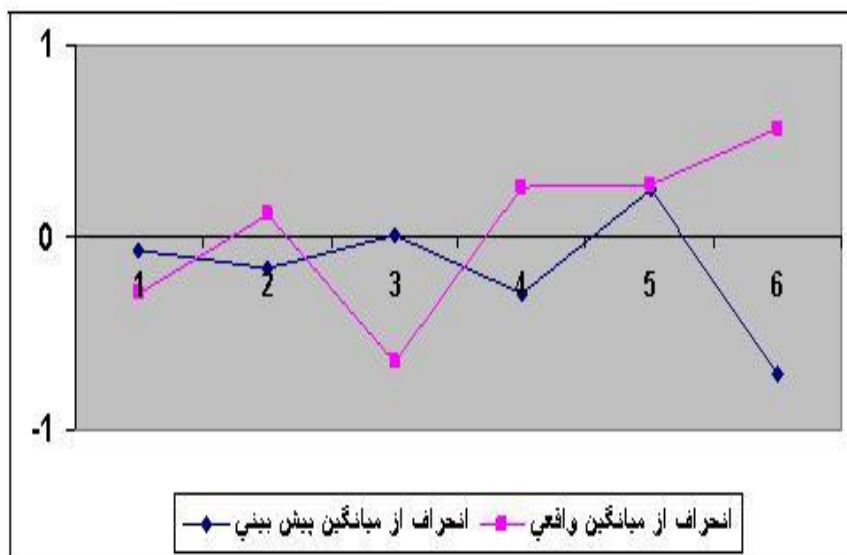
نمودار ۱-۱، که تفاوت مقادیر پیش بینی شده از مقادیر واقعی برای روند لجستیک قوی است، واگرایی سریع مقادیر پیش بینی از  $t+6$  به بعد را نشان می دهد. به عبارت دیگر، این پدیده معرف حساسیت بالا نسبت به شرایط اولیه در مدل های آشوب است.



نمودار ۱-۱- تفاوت مقادیر پیش بینی و واقعی روند لجستیک قوی

نمودار ۱-۲، انحراف از میانگین مقادیر واقعی و پیش بینی را برای روند لجستیک قوی در مکانیسم بازخورد غیرخطی نشان می دهد. تغییرات انحراف از میانگین مقادیر

واقعی و پیش‌بینی، یک روند غیرخطی در جهت تعدیل قیمت‌ها بر روی میانگین آن‌ها است.



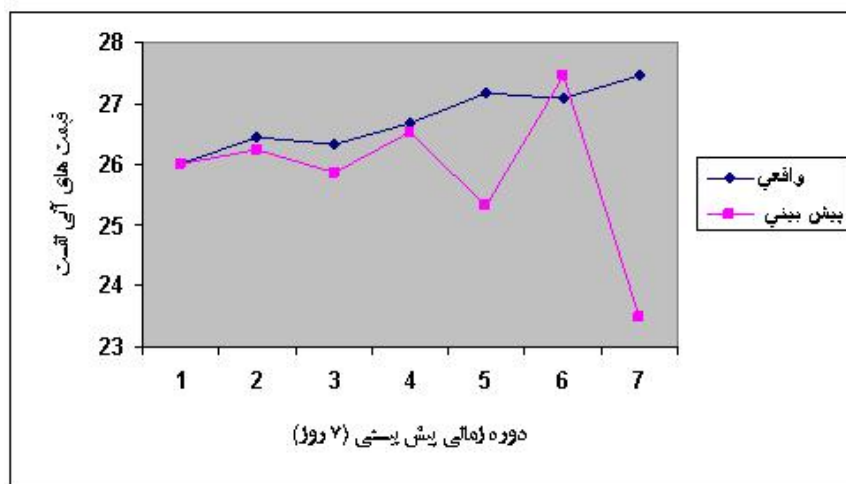
نمودار ۲-۱- انحراف از میانگین مقادیر پیش‌بینی و واقعی روند لجستیک قوی

جدول ۴- روند لجستیک ضعیف

میانگین	انحراف معیار	t+7	t+6	t+5	t+4	t+3	t+2	t+1	دوره زمانی سری زمانی
۲۶,۷۳	۰,۵۱۴۹۹۱	۲۷,۴۴	۲۷,۰۸	۲۷,۱۷	۲۶,۶۷	۲۶,۳۱	۲۶,۴۴	۲۶,۰۲	مقادیر واقعی
۲۵,۸۴	۱,۲۲۳۸۱۵	۲۳,۵	۲۷,۴۴	۲۵,۳۱	۲۶,۵۳	۲۵,۸۵	۲۶,۲۳	۲۶,۰۲	مقادیر پیش‌بینی
		۳,۹۴	-۰,۳۶	۱,۸۶	۰,۱۴	۰,۴۶	۰,۲	-	تفاوت
		-۰,۷۱	-۰,۳۵	-۰,۴۴	۰,۰۶	۰,۴۲	۰,۳	۰,۷۱	انحراف از میانگین واقعی
		-۲,۳۴	۱,۶	-۰,۵۳	۰,۶۹	۰,۰۱	۰,۳۹	۰,۱۸	انحراف از میانگین پیش‌بینی

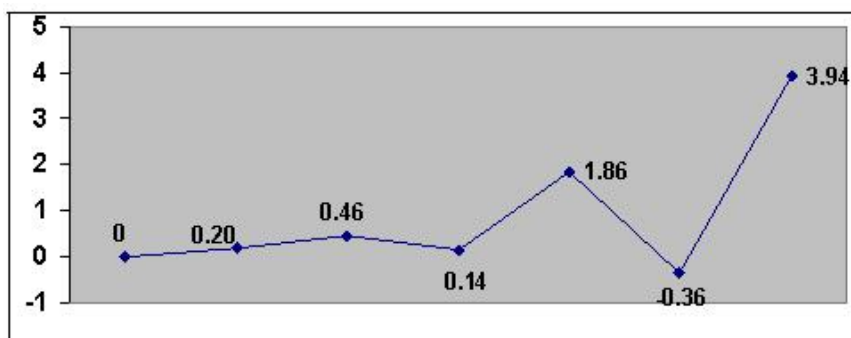
جدول ۴ و نمودار ۲ نشان می‌دهند که پیش‌بینی در ۴ روز آینده برای روند لجستیک ضعیف؛ از دقت و هم‌گرایی بالایی برخوردار است و بعد از یک روز که مجدداً

روند قیمت لجستیک می شود ( $t + 6$ )، پیش بینی ازدقت بالایی برخوردار است، ولی بعد از آن به سرعت واگرا شده و جهت تغییرات مقادیر پیش بینی شده و مقادیر اصلی نیز متقارن یا معکوس می شود.



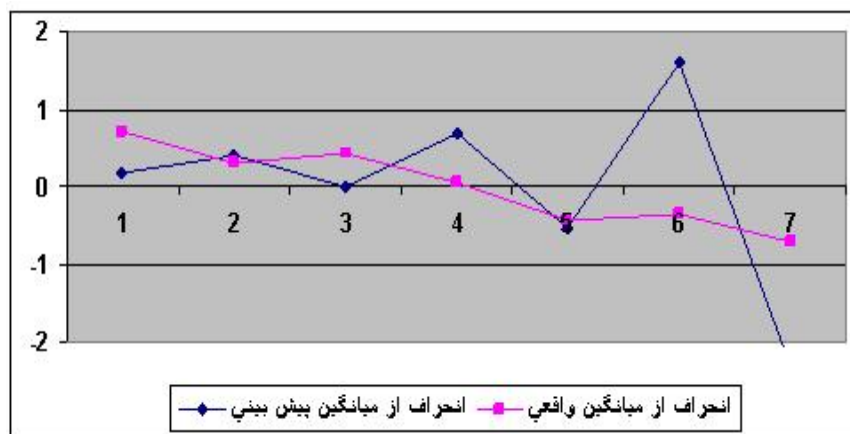
نمودار ۲- پیش بینی قیمت نفت؛ روند لجستیک ضعیف

نمودار ۱-۲، که تفاوت مقادیر پیش بینی شده از مقادیر واقعی برای روند لجستیک ضعیف است، واگرایی سریع مقادیر پیش بینی از  $t+4$  به بعد را نشان می دهد؛ گرچه روز بعد به سرعت تعدیل می شود ولی بلافاصله و به صورت پایداری از  $t+6$  به بعد واگرا می شود.



نمودار ۱-۲- تفاوت مقادیر پیش بینی و واقعی روند لجستیک ضعیف

نمودار ۲-۲ انحراف از میانگین مقادیر واقعی و پیش‌بینی را برای روند لجستیک ضعیف در مکانیسم بازخورد غیرخطی نشان می‌دهد. تغییرات انحراف از میانگین مقادیر پیش‌بینی، یک روند غیرخطی در جهت تعدیل قیمت‌ها بر روی میانگین آن‌هاست، در حالی که تغییرات انحراف از میانگین مقادیر واقعی، در یک جریان نزولی، دارای یک روند غیرخطی در جهت تعدیل قیمت‌ها بر روی میانگین آن‌هاست.



نمودار ۲-۲- انحراف از میانگین مقادیر پیش‌بینی و واقعی روند لجستیک ضعیف

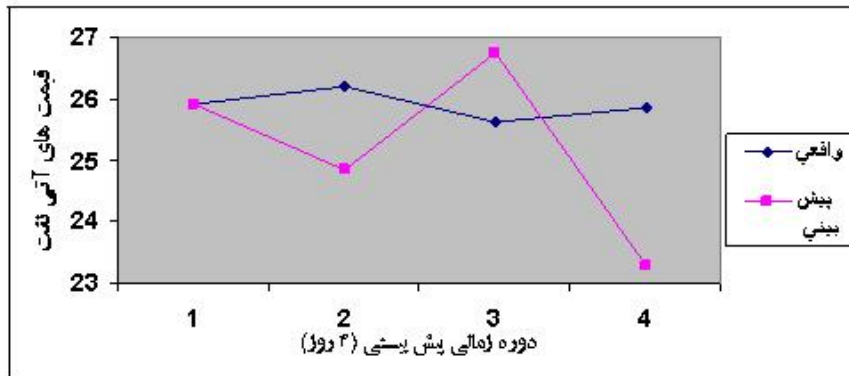
جدول ۵- روند بی‌ثباتی توأم با تغییر

میانگین	انحراف معیار	t+4	t+3	t+2	t+1	دوره زمانی سری زمانی
۲۵,۹	۰,۲۳۸۳۲۸	۲۵,۸۶	۲۵,۶۲	۲۶,۲	۲۵,۹۲	مقادیر واقعی
۲۵,۲	۱,۴۹۱۰۵۵	۲۳,۲۸	۲۶,۷۳	۲۴,۸۵	۲۵,۹۲	مقادیر پیش‌بینی
		۲,۵۸	-۱,۱۱	۱,۲۵	-	تفاوت
		۰,۰۴	۰,۲۸	-۰,۳	-۰,۰۲	انحراف از میانگین واقعی
		-۱,۹۲	۱,۵۳	-۰,۳۵	۰,۷۲	انحراف از میانگین پیش‌بینی

جدول ۵ و نمودار ۳، نشان می‌دهند که پیش‌بینی در ۲ روز آینده برای روند بی‌ثباتی توأم با تغییر؛ از دقت و هم‌گرایی نسبی بالایی برخوردار است و از  $t + 3$  به بعد

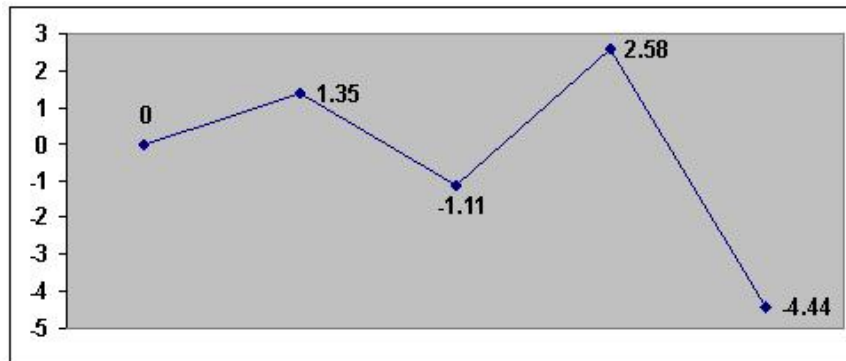


سریعاً واگرا شده و جهت تغییرات مقادیر پیش بینی شده و مقادیر اصلی نیز متقارن یا معکوس می شود، این به دلیل عدم تطابق روند نوسانی فوق (مرز منطقه آشوب و چرخه های حدی) با مکانیسم خود تنظیم کنندگی روند لجستیک است.



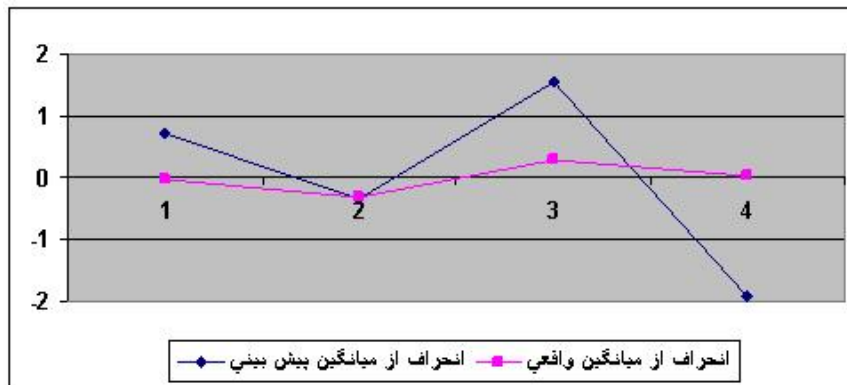
نمودار ۳- پیش بینی قیمت نفت روند بی ثباتی توأم با تغییر (Fluctuate)

نمودار ۱-۳، که تفاوت مقادیر پیش بینی شده از مقادیر واقعی برای روند بی ثباتی توأم با تغییر است، واگرایی سریع مقادیر پیش بینی از  $t+3$  به بعد را نشان می دهد.



نمودار ۱-۳- تفاوت مقادیر پیش بینی و واقعی روند بی ثباتی توأم با تغییر (Fluctuate)

نمودار ۳-۲ انحراف از میانگین مقادیر واقعی و پیش‌بینی برای روند بی‌ثباتی توأم با تغییر در مکانیسم بازخور غیرخطی را نشان می‌دهد. تغییرات انحراف از میانگین مقادیر واقعی، یک روند غیرخطی در جهت تعدیل قیمت‌ها بر روی میانگین آن‌هاست.

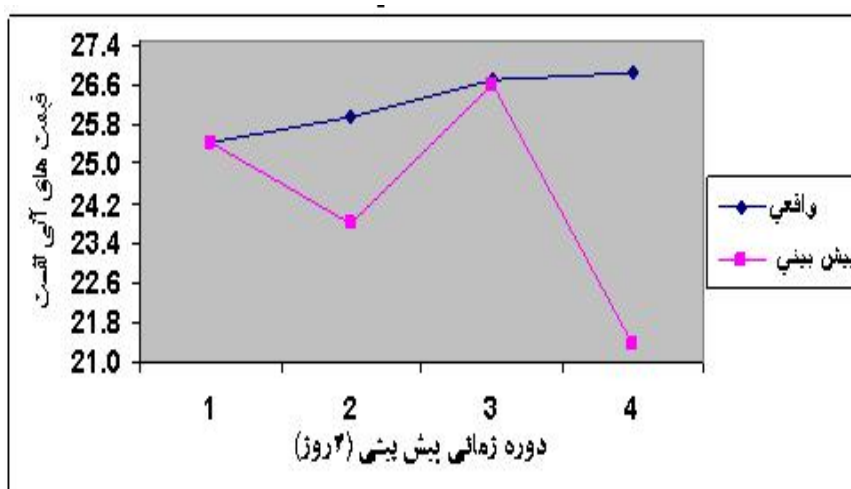


نمودار ۳-۲- انحراف از میانگین مقادیر پیش‌بینی و واقعی روند بی‌ثباتی توأم با تغییر (Fluctuate)

جدول ۶ و نمودار ۴، نشان می‌دهند که پیش‌بینی با یک روز تأخیر برای روز سوم در روند اکیداً صعودی؛ از دقت و هم‌گرایی بالایی برخوردار است و از آن به بعد به سرعت و به صورت پایدار، واگرا شده و جهت تغییرات مقادیر پیش‌بینی شده و مقادیر اصلی نیز متقارن یا معکوس می‌شود. این به دلیل تباین روند مذکور با مکانیسم بازخور غیرخطی تحت معادله لجستیک است

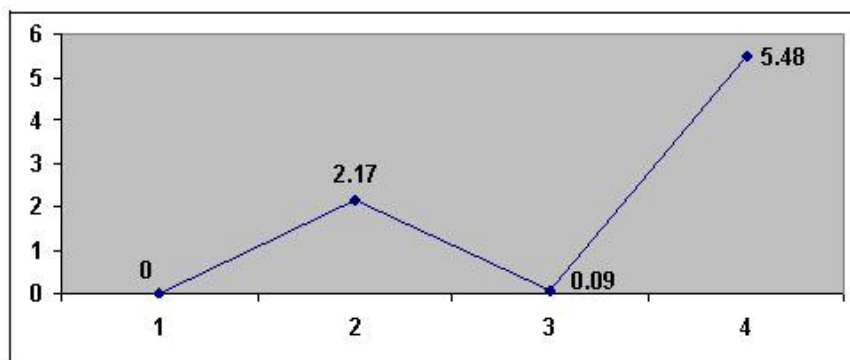
جدول ۶- روند اکیداً صعودی

میانگین	انحراف معیار	دوره زمانی				سری زمانی
		t+4	t+3	t+2	t+1	
۲۶,۲۵	۰,۶۶۰۷۷۶	۲۶,۸۵	۲۶,۷۲	۲۵,۹۸	۲۵,۴۴	مقادیر واقعی
۲۴,۳۱	۲,۲۷۴۲۰۲	۲۱,۷۳	۲۶,۶۳	۲۳,۸۱	۲۵,۴۴	مقادیر پیش‌بینی
		۵,۴۸	۰,۰۹	۲,۱۷	-	تفاوت
		-۰,۶	-۰,۴۷	۰,۲۷	۰,۸۱	انحراف از میانگین واقعی
		-۲,۹۴	۲,۳۲	-۰,۵	۱,۱۳	انحراف از میانگین پیش‌بینی



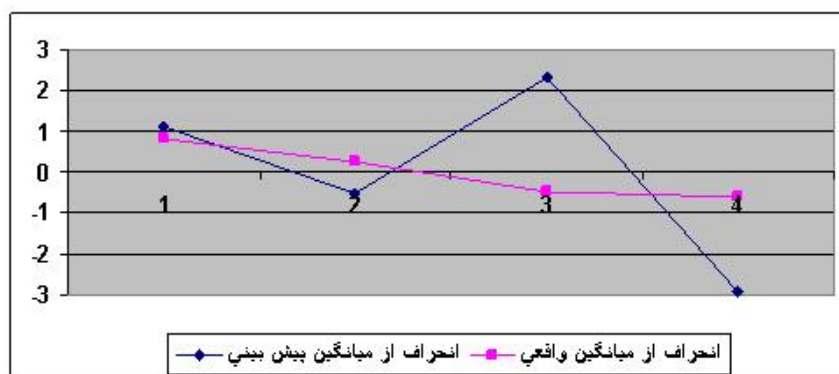
نمودار ۴- پیش‌بینی قیمت نفت روند اکیداً صعودی

نمودار ۱-۴، که تفاوت مقادیر پیش‌بینی شده از مقادیر واقعی برای روند اکیداً صعودی است، با یک روز تأخیر و از  $t+3$  به بعد واگرایی سریع و پایدار را نشان می‌دهد.



نمودار ۱-۴- تفاوت مقادیر پیش‌بینی و واقعی روند اکیداً صعودی

نمودار ۲-۴، انحراف از میانگین مقادیر واقعی و پیش‌بینی را برای روند اکیداً صعودی در مکانیسم بازخورد غیرخطی نشان می‌دهد. تغییرات انحراف از میانگین مقادیر واقعی نزولی و برای مقادیر پیش‌بینی، یک روند غیرخطی در جهت تعدیل قیمت‌ها، ولی ناپایدار بر روی میانگین آن‌هاست.

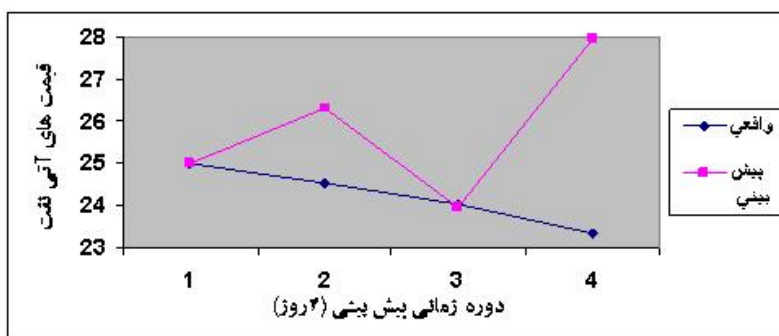


نمودار ۴-۲- انحراف از میانگین مقادیر پیش‌بینی و واقعی روند اکیداً صعودی

جدول ۷- روند اکیداً نزولی

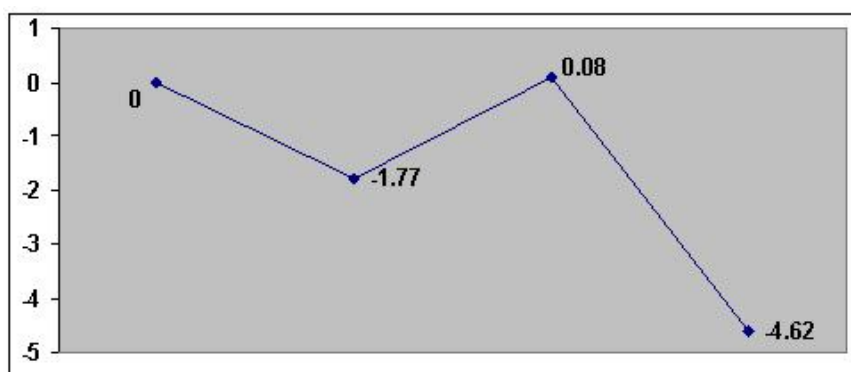
میانگین	انحراف معیار	t+4	t+3	t+2	t+1	دوره زمانی
۲۴,۲۴	۰,۷۰۷۴۱۳	۲۳,۳۶	۲۴,۰۳	۲۴,۵۴	۲۵,۰۱	سری زمانی
۲۵,۸۱	۱,۷۳۸۷۴۳	۲۷,۹۸	۲۳,۹۵	۲۶,۳۱	۲۵,۰۱	مقادیر پیش‌بینی
		-۴,۶۲	۰,۰۸	-۱,۷۷	-	تفاوت
		۰,۸۸	۰,۲۱	-۰,۳	-۰,۷۷	انحراف از میانگین واقعی
		۲,۱۷	-۱,۸۶	۰,۵	-۰,۸	انحراف از میانگین پیش‌بینی

جدول ۷ و نمودار ۵، نشان می‌دهند که پیش‌بینی با یک روز تأخیر برای روز سوم در روند اکیداً نزولی؛ از دقت و هم‌گرایی بالایی برخوردار است و از آن به بعد به سرعت و به صورت پایدار واگرا شده و جهت تغییرات مقادیر پیش‌بینی شده و مقادیر اصلی نیز متقارن یا معکوس می‌شود. این به دلیل تباین روند مذکور با مکانیسم بازخورد غیرخطی تحت معادله لجستیک است.



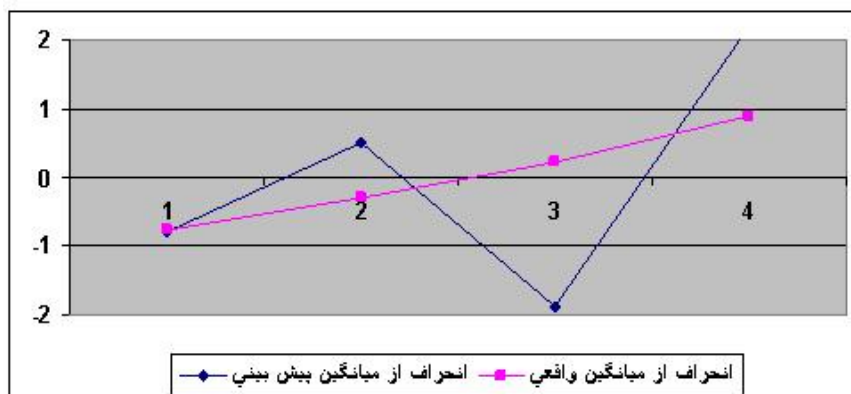
نمودار ۵- پیش‌بینی قیمت نفت روند اکیداً نزولی

نمودار ۵-۱، که تفاوت مقادیر پیش‌بینی شده از مقادیر واقعی برای روند اکیداً نزولی است، با یک روز تأخیر و از  $t+3$  به بعد واگرایی سریع و پایدار را نشان می‌دهد.



نمودار ۵-۱- تفاوت مقادیر پیش‌بینی و واقعی روند اکیداً نزولی

نمودار ۲-۱ انحراف از میانگین مقادیر واقعی و پیش‌بینی را برای روند اکیداً نزولی در مکانیسم بازخورد غیرخطی نشان می‌دهد. تغییرات انحراف از میانگین مقادیر واقعی صعودی و برای مقادیر پیش‌بینی، یک روند غیرخطی در جهت تعدیل قیمت‌ها، ولی ناپایدار بر روی میانگین شان آن‌هاست.



نمودار ۵-۲- انحراف از میانگین مقادیر پیش‌بینی و واقعی روند اکیداً نزولی

### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، براساس نمای لیاپانوف، سعی شد که تابع پویای خاصی بر سری زمانی قیمت آتی نفت برآزش شود. از آن‌جا که تابع لجستیک می‌تواند بازار مبتنی بر عرضه و تقاضا را مدل کند، برای تعیین پارامتر کنترل‌کننده در انجام محاسبات از نمای لیاپانوف تابع لجستیک استفاده شد. لیکن امکان انتخاب توابع دیگر، مانند هنون که بازار با ماهیت‌های متفاوت را مدل می‌کنند، وجود دارد. همین‌طور روش‌های دیگری برای تعیین نمای لیاپانوف سری زمانی؛ وجود دارد، که با به‌کارگیری مناسب آن‌ها، امکان بیشتری برای پیش‌بینی فراهم می‌شود. با محاسبه پارامتر کنترل‌کننده تابع لجستیک ملاحظه شد که می‌توان کار پیش‌بینی را برای روندهای لجستیک با طول زمانی ۴ تا ۶ روز همراه با پایداری مکانیسم بازخور غیرخطی و برای روندهای غیر لجستیک با تأخیر زمانی ۱ روز و عدم پایداری برای روزهای بعد؛ با دقت خوبی انجام داد.

### منابع

- ۱- احراری، مهدی (۱۳۸۰)، "بررسی آشوب در سری زمانی قیمت های آتی نفت"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده اقتصاد، دانشگاه فردوسی مشهد، صفحه ۱۱-۵۱.

- ۲- ابریشمی، معینی، احراری (۱۳۸۱)، "آزمون ناخطی معین برای قیمت های آتی نفت"، فصل‌نامه پژوهش‌های اقتصادی ایران، دانشکده اقتصاد، دانشگاه علامه طباطبائی شماره ۱۰ صفحه ۱۰۵-۱۲۵.
- ۳- مشیری، سعید (۱۳۸۱)، "مروری بر نظریه آشوب و کاربردهای آن در اقتصاد"، مجموعه مقاله‌های اولین همایش معرفی و کاربرد مدل‌های ناخطی پویا و محاسباتی در اقتصاد، مرکز تحقیقات اقتصاد ایران، دانشکده اقتصاد، دانشگاه علامه طباطبائی صفحه ۵۱-۱۱.
- 4- Gencay R, Dechert W.D., (1992), "An Algorithm for the n-Lyapunov exponents of an n-dimensional unknown dynamical system" *Physica D* 59:142-57.
- 5- Hommes, C. (1991), "Adaptive Learning and Roads to Chaos: The Case of the Cobweb," *Economics Letters*, Vol.36, No.2, pp.127-132
- 6- Lorenz, E. N. (1963). "Deterministic nonperiodic flow". *J. Atmos. Sci.* 20: 130-141.
- 7- M. Michelitsch and O. E. Rössler (1989). "A New Feature in Hénon's Map". *Computers and Graphics* 13: 263-265.
- 8- Miskiewicz, J, Ausloos, M, (2004), "A logistic map approach to economic cycles. The best adapted companies", *Physica A*, Volume 336, Issue 1-2, p. 206-214.
- 9- Nychka D.W., Ellner S., (1992), "Finding chaos in a noisy system", *J R Stat Soc B.*, 54:399-426.
- 10- Panas E, Ninni V, (2000), "Are Oil Markets Chaotic? A Non-Linear Dynamic Analysis", *Energy Economics*, 22:549-568.
- 11- Savit R. (1989), "Nonlinearities and Chaotic Effects in Option Prices" , *Journal of Future Market*, Vol.9, No.6, pp. 507-518.
- 12- Savit, R. (1988), "When Random Is Not Random: An Introduction to Chaos in Market Prices", *Journal of Futures Market*, vol.8, No. 3, pp. 271-289.
- 13- Sprott, C., J., (2003), "Chaos and Time-Series Analysis", Oxford University Press, USA.
- 14- Strogatz, Steven (2000). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Publishing.
- 15- Stutzer M.J. (1980), "Chaotic dynamic and bifurcation in a macro model", *Journal of Economic dynamics and control* 2, PP. 353-376.

- 16- Wei-Bin Zhang(2005), "Differential Equations, Bifurcations and Chaos in Economics", published by World Scientific Books.
- 17- Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H., L., and Vastono, J.A., (1985), "Determining Lyapunov exponent from a time series", Physical D 16, PP. 285-317.
- 18- X. Zeng, R. Eykholt, and R. A. Pielke (1991). "Estimating the Lyapunov-exponent spectrum from short time series of low precision". Physical Review Letters 66: 3229.