



## تحلیل دو بعدی تنش - کرنش در محیط‌های سنگی اطراف حفریات زیرزمینی با رفتار الاستو-پلاستیک غیرخطی به روش اجزای محدود

نویسنده: دکتر مرتضی احمدی\* و محسن مشاری\*

### 2-D Stress-Strain Analysis for Underground Excavations in Rock With Non-linear Elasto-Plastic Behavior Using FEM (Finite Element Method)

By: Dr. M. Ahmadi\* & M. Moshary\*

#### چکیده

در این مقاله تحلیل دو بعدی تنش - کرنش در اطراف سنگ حفریات زیرزمینی در صورتی که محیط اطراف حفریات زیرزمینی زیر بار اعمال شده رفتار الاستو-پلاستیک از خود نشان دهند، مورد بررسی قرار گرفته است. برای تحلیل تنش در این حالت نرمافزاری به نام برنامه اجزای محدود (FEM) تهیه شده است که اساس کار آن روش اجزای محدود است. در این راستا، ابتدا اساس کاربرد روش اجزای محدود (FEM) برای تحلیل تنش بیان گردیده و از این روش در حل معادلات اساسی مکانیک جامدات یعنی اصل انرژی پتانسیل کلی استفاده و روابط نهایی برای تحلیل ارائه شده است. سپس به بیان روابط اساسی پلاستیسیته پرداخته شده است. در نهایت با تلفیق این روابط با عبارات حاصل از حالت الاستیک، روابطی جهت تحلیل الاستو-پلاستیک به شیوه اجزای محدود حاصل شده است. اصلی‌ترین نتایج حاصله، محاسبه تنشها و کرنشها در شرایط الاستو-پلاستیک غیرخطی می‌باشد. برای بررسی عملکرد برنامه، مثالهای فرضی و کاربردی توسط برنامه FEM تحلیل شده و نتایج حاصل با روشهای دیگر تحلیل تنش موجود مقایسه گردیده است. انطباق خوبی بین نتایج برنامه FEM با دیگر برنامه‌های رایانه‌ای و روش تجربی دیده می‌شود. مهم‌ترین ویژگی نرمافزار FEM نسبت به دیگر نرمافزارها تعریف معیارهای قابل استفاده در مکانیک سنگ کاربردی است.

**کلید واژه‌ها:** اجزای محدود، رفتار الاستو-پلاستیک، حفریات زیرزمینی، تحلیل تنش-کرنش

#### Abstract

In this research, two-dimensional analysis is applied to surrounding underground excavations that behave in nonlinear elasto-plastic manner. A computer program (FEM: Finite Element Program) was developed based on finite element method. The main output of applying the FEM is the calculation of the value of stress and strain in elasto-plastic conditions. The principles of FEM in stress analysis are first described, then the principles of solid mechanics explained, and consequently the final formulas of finite element analysis are derived. Main formulas of plasticity are defined and then combined with elastic formulas to acquire the FEM elasto-plastic formulas. The details of subroutines can be found after the theoretical discussion. Finally, the ability of software was examined by execution of the FEM with theoretical and practical examples. A good agreement is observed when the FEM is compared with other program (Ansys) and empirical methods. Criteria definition of rock mechanics is the main advantage of the FEM with respect to other softwares.

**Key words:** Finite element, Elasto-plastic behavior, Underground excavation, Stress - strain analysis.

#### مقدمه

توسعه چشمگیر علوم رایانه (سخت‌افزار و نرم‌افزار) در دو دهه اخیر، موجب استفاده روز افزون مهندسان از این پدیده





که در آن  $J_1$ ,  $J_2$  و  $J_3$  نامتغیرهای کاهش یافته تنش بوده و  $s$ ,  $m$  و  $\sigma_c$  جزء خواص مکانیکی سنگ به شمار می‌آید.

در صورتی که مقدار  $F$  به  $\sqrt{s\sigma_c^2}$  برسد، تسلیم رخ می‌دهد. پس از تسلیم، روابط الاستو-پلاستیک به شرح زیر بر سیستم حاکم خواهد بود. هنگامی که میدان تنش موجب به تسلیم رسیدن یک نقطه شود، از آن پس با افزایش بیشتر تنش، کرنش حاصل الاستو-پلاستیک خواهد بود، یعنی قسمتی از آن الاستیک و قسمتی دیگر پلاستیک می‌باشد. به عبارت دیگر:

$$d\varepsilon_{ij} = (d\varepsilon_{ij})_e + (d\varepsilon_{ij})_p \quad (7)$$

نحوه تعیین هر یک از این عناصر در شکل 1 نشان داده شده است. از روابط الاستیسیته، کرنش الاستیک به دست می‌آید:

$$(d\varepsilon_{ij})_e = \frac{d\sigma'_{ij}}{2\mu} + \frac{(1-2\nu)}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} \quad (8)$$

که در آن  $\mu$ ،  $E$  و  $\nu$  به ترتیب ثابت لامه، مدول الاستیسیته و نسبت پواسون، از خواص مکانیکی مواد بوده  $d\sigma_{kk}$  جزء دیفرانسیلی تنش هیدرواستاتیک،  $\delta_{ij}$  تابع کرونگر و  $d\sigma'_{ij}$  جزء دیفرانسیلی تنش مؤثری است که موجب کرنش  $d\varepsilon_{ij}$  می‌شود. برای کرنش پلاستیک از اصول روابط پلاستیسیته براساس قانون جریان (Associated Flow Rule) استفاده شده است. در این اصل میدان تنشهای اصلی ماده در یک نقطه منطبق بر میدان کرنشهای پلاستیک در همان نقطه بوده و بردار افزایش کرنش پلاستیک، هم‌جهت با بردار عمود بر سطح تسلیم در آن نقطه می‌باشد [1]. لذا براساس این اصل:

$$(d\varepsilon_{ij})_p = \lambda \frac{\partial F(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (9)$$

که در آن  $\lambda$  ثابت تناسب و همواره مثبت است و ضریب پلاستیک نامیده می‌شود. بنابراین رابطه کامل میان تنش-کرنش برای تغییر شکل الاستو-پلاستیک به صورت زیر خواهد بود:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{d\sigma'_{ij}}{2\mu} + \frac{(1-2\nu)}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} + d\lambda \frac{\partial F(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (10)$$

در کاربردهای پلاستیسیته مسائلی از قبیل تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و متقارن محوری از تئوری افزایش تدریجی بارگذاری (Incremental Loading) برای موادی که پاسخ کاملاً الاستو-پلاستیک دارند، استفاده می‌شود.

### کاربرد اجزای محدود

برای ارزیابی جابه جاییهای حاصل از تحلیل الاستو-پلاستیک، از سه نوع المان چهار ضلعی می‌توان استفاده کرد: المانهای

قرن شده است. علم مکانیک سنگ نیز از این تحول بی‌نصیب نمانده و در تمامی کاربردهای خود از آن استفاده کرده است. یکی از کاربردها، سنجش کمی رفتار سنگها در میدان تنشهای وارده می‌باشد. در صورتی که این تنشها به قدری زیاد باشند که نقاطی از ناحیه تحت تنش به تسلیم رسیده و از آن بگذرند، دیگر توزیع تنش را نمی‌توان از روابط متداول الاستیسیته به دست آورد و روابط الاستو-پلاستیک را باید برای آن به کار برد. در این مقاله، به اختصار به چگونگی تعیین این روابط و سپس کاربرد اجزای محدود برای تحلیل آنها در حالت دو بعدی پرداخته شده است. حاصل کار این تحقیق، برنامه‌ای به نام FEP است که برای تحلیل دو بعدی الاستو-پلاستیک در محیطهای سنگی به کار می‌رود.

### نظریه تحلیل تنش - کرنش

مرز بین رفتار الاستیک و رفتار پلاستیک را معیار تسلیم تعیین می‌کند. معیار تسلیم، سطح تنش‌ی را معلوم می‌کند که در آن تغییر شکل پلاستیک آغاز می‌شود و می‌توان آن را به شکل عمومی زیر نوشت [4]:

$$F(\{\sigma_{ij}\}) = K(k) \quad (1)$$

که در آن،  $F$  تابعی از میدان تنش بوده و  $K$  پارامتری از ماده است که به صورت تجربی تعیین می‌شود. رفتار مواد مختلف موجب توسعه معیارهای مختلف تسلیم شده است. معیارهای تسلیم ترسکا و فون میسز عموماً برای فلزها به کار رفته و معیارهای موهر - کلمب، دراگر - پراگر و هوک - براون برای سنگها کاربرد دارد. از آنجا که عبارت معیار تسلیم باید مستقل از نحوه انتخاب محور مختصات تنشهای وارده باشد [5]، می‌توان آن را برحسب نامتغیرهای تنش توسعه داد. مثلاً معیار هوک - براون که در علم مکانیک سنگ از اهمیت زیادی برخوردار است، به صورت زیر می‌باشد:

$$F = \left\{ 4J_2' \cos^2 \theta + m\sigma_c (J_2')^2 \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta + \cos \theta \right) + \frac{m\sigma_{J_1}}{3} - s\sigma_c^2 \right\}^2 \quad (2)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left[ -\frac{3\sqrt{3}J_3'}{2(J_2')^2} \right]$$

در فرمول (3) پارامترها عبارتند از:

$$J_1 = \sigma_{ii} \quad (4)$$

$$J_2' = \frac{1}{2} [\sigma'_{ij} * \sigma'_{ij}]$$

(5)

$$J_3' = \frac{1}{3} [\sigma'_{ij} * \sigma'_{ik} * \sigma'_{ki}]$$

(6)





که در آن  $[D(e)]$  ماتریس مشخصه مواد تشکیل دهنده المان و  $[B_j^{(e)}]$  ماتریس کرنش است که برای کاربردهای مختلف در جدول 1 آورده شده است. در این صورت سهم حاصل از المان  $e$  در اولین عبارت 13 به صورت زیر باشد:

$$\sum_{j=1}^r [K_{ij}^{(e)}] \{d_j^{(e)}\} = \int_{\Omega^{(e)}} [B_i^{(e)}]^T [D^{(e)}] \left( \sum_{j=1}^r [B_j^{(e)}] \{d_j^{(e)}\} \right) d\Omega \quad (15)$$

که در آن  $K_{ij}^{(e)}$  عناصر ماتریس سختی المانی  $[K(e)]$  است. سهم حاصل از المان  $e$  در عبارت دوم در (13) عبارت است از:

$$\{f_{Bi}^{(e)}\} = \int_{\Omega^{(e)}} [N_i^{(e)}]^T \{d^{(e)}\} d\Omega \quad (16)$$

برای کاربردهای الاستو-پلاستیک شکل ماتریس مشخصه مواد تفاوت می‌کند. در این حالت به جای  $[D]$  از  $[Dep]$  استفاده می‌شود که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$[Dep] = [D] - \frac{\{d_D\} \{d_D\}^T}{A + \{d_D\}^T \{a\}} \quad (17)$$

$$\{dD\} = [D] \{a\} \quad (18)$$

که در آن:

$$d\lambda = \frac{1}{[A + \{a^T\} [D] \{a\}]} \{a\}^T \{d_D\} \{d\varepsilon\} \quad (19)$$

$$A = - \frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial k} dk \quad (20)$$

و دیفرانسیل پارامتر سخت کاری عبارت است از:

$$dk = \{\sigma\}^T \{d\varepsilon_p\} = \{\sigma\}^T d\lambda \{a\} = d\lambda \{a\}^T \{\sigma\} \quad (21)$$

### ساختار برنامه

نرمافزار حاصل، ترکیبی از زبانهای برنامه‌نویسی C و FOXPRO به نام برنامه اجزای محدود (FEM) است. مدیریت بانکهای اطلاعاتی مدل (FEM)، شرایط مرزی و غیره توسط FOXPRO نوشته شده است. قسمت تحلیل اجزاء محدود آن که مهمترین قسمت نرمافزار است، توسط زبان C نوشته شده است. ساختار این برنامه که نام آن *plast* است، در شکل 3 آورده شده است.

### توانمندی برنامه

چند مسئله توسط این نرمافزار تحلیل شد. یکی از این مسائل مربوط به مغار نیروگاه کانو در کاناداست. برای نیروگاه برقایی در ژرفای 300 متری زمین در توده سنگی گنیس حفاری

چهار گرهی خطی (1)، المانهای هشت گرهی سرندي پیتی (2) و المانهای 9 گرهی لاگرانژی (3). شکل المانها به همراه تابع شکل هر يك در شکل 2 آورده شده است. محدوده مورد تحلیل به توسط ماتریس‌های ژاکوبین متناسب با هر المان، به سیستم مختصات طبیعی انتقال می‌یابد. دلیل این انتقال سهولت در انتگرال‌گیری عددی به روش گوس و وجود قوانین سیستماتیک در محاسبه متغیرهای اولیه و ثانویه (Primary and Secondary Variable) می‌باشد [6]. بنابراین در سیستم مختصات طبیعی محاسبات انجام می‌شود.

نظریه اجزای محدود برای معادله اساسی مکانیک جامدات یعنی اصل انرژی پتانسیل کل به کار گرفته می‌شود. اگر جسمی تحت مجموعه‌ای از نیروهای درونی  $\{b\}$  و نیروهای سطحی  $\{t\}$  در مرز قرار داشته باشد، اصل انرژی پتانسیل کل بیان می‌دارد:

$$\int_{\Omega} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega - \int_{\Omega} \{\delta u\}^T \{b\} d\Omega - \int_{\Gamma^T} \{\delta u\}^T \{t\} d\Gamma = 0 \quad (11)$$

که در آن  $\{\sigma\}$  بردار تنشها،  $\{u\}$  بردار جابه جایی مجازی،  $\{\varepsilon\}$  بردار کرنشهای مجازی،  $\Gamma$  مرز ناحیه موردنظر،  $\Omega$  ناحیه مورد بررسی و  $\Gamma^T$  قسمتی از مرز است که نیروهای سطح در روی آن مرز تعریف شده است. شکل این معادله در قالب اجزای محدود عبارت است از:

$$\sum_{i=1}^n \{\delta d_i\}^T \left\{ \int_{\Omega} [B_i]^T \{\sigma\} d\Omega - \int_{\Omega} [N_i]^T \{b\} d\Omega - \int_{\Gamma^T} [N_i]^T \{t\} d\Gamma \right\} \quad (12)$$

که در آن برای گره  $i$ ، بردار متغیرهای گرهی مجازی  $\{d_i\}$  (Virtual nodal variables)  $[Ni] = [I]Ni$ ، ماتریس توابع شکل سراسری و  $[Bi]$  ماتریس کرنش - تغییر مکان سراسری است.  $n$  تعداد کل گره‌ها در تمامی شبکه است.

از آنجا که در فرمول 12 می‌باید برای هر مجموعه دلخواه از تغییر به مکانهای مجازی  $\{d_i\}$  صادق باشد، لذا برای هر گره  $i$  به صورت:

$$\int_{\Omega} [B_i]^T \{\sigma\} d\Omega - \int_{\Omega} [N_i]^T \{b\} d\Omega - \int_{\Gamma^T} [N_i]^T \{t\} d\Gamma = 0 \quad (13)$$

خواهد بود. این معادله را می‌توان برای تک‌تک المانهای دامنه تحلیل به کار گرفت و اثبات کرد که:

$$\{\sigma^{(e)}\} = [D^{(e)}] \{\varepsilon^{(e)}\} = [D^{(e)}] \times \left( \sum_{j=1}^r [B_j^{(e)}] \{d_j^{(e)}\} \right) \quad (14)$$





شده، مغار با مقطع شکل 4 طراحی شده است [7]. اطلاعات اساسی توده سنگ در جدول 2 و مدل FEM اولیه جهت تحلیل توسط برنامه FEP در شکل 5 آورده شده است. از خروجی برنامه مشخص گردید که المانهای دیواره تسلیم شده و مستعد ریزش هستند. مدل مذکور به روش تجربی توسط مرجع [3] و توسط نرمافزار [2] ANSYS تحلیل شد. انتخاب نرمافزار ANSYS به خاطر تشابه تحلیل، یعنی رفتار الاستو-پلاستیک است. به منظور ارزیابی مقادیر پارامترهای مختلف خروجی ایجاد شده توسط نرمافزار FEP، با نرمافزار ANSYS تعیین تنش افقی، قائم و VON-MISES در مرکز دیواره مغار در امتداد خط افقی تعیین گردید. این مقادیر به صورت مجزا، برای هر سه تنش مختلف به صورت مقایسه‌ای در شکل‌های 6 و 7 و 8 ارائه شده است.

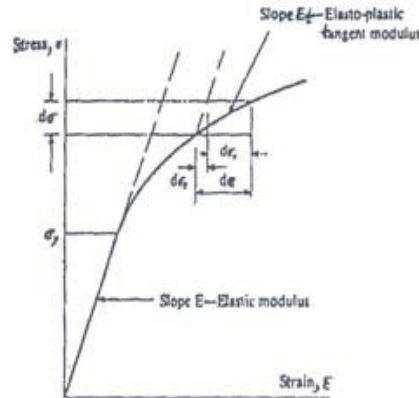
**نتیجه‌گیری**  
در این مقاله تحلیل رفتار الاستو-پلاستیک محیط‌های سنگی در حالت دو بعدی به صورت عددی، مورد بحث قرار گرفته است. پس از ارائه نظری این رفتار، به کاربرد اجزای محدود در تحلیل معادلات مربوطه اشاره شد. برای این نظریه و معادلات، نرمافزار رایانه‌ای مناسبی ارائه شده است. برنامه رایانه‌ای ارائه شده، توانایی اجرا برای سه حالت دو بعدی تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و متقارن محوری را دارد. همچنین برنامه قادر به تحلیل الاستو-پلاستیک است. در به کارگیری اجزای محدود در تحلیل این مسائل سازه‌های زیرزمینی، می‌توان از انواع المانهای سه‌ضلعی و چهارضلعی استفاده کرد. ساختار برنامه ارائه شده و در نهایت برای تصدیق عملکرد برنامه، مثالی نیز ارائه شد که طی مقایسه با روشهای تجربی و عددی، توافق مناسبی در حل مسئله دیده شد. از ویژگیهای نرمافزار، قابلیت تعریف هر نوع معیار تسلیم مهم در علم مکانیک سنگ است.

باتوجه به اینکه وضعیت المانها در دو نرم افزار فوق، کمی با هم تفاوت دارد، اختلاف کمی بین اعداد خروجی از دو نرم افزار مشاهده می‌شود. اما روند کلی هر دو نرم افزار با هم انطباق دارد. همچنین از نظر تعیین مناطق بحرانی (پلاستیک شده) توافق خوبی بین نرم افزار جدید و دو روش موجود وجود دارد.

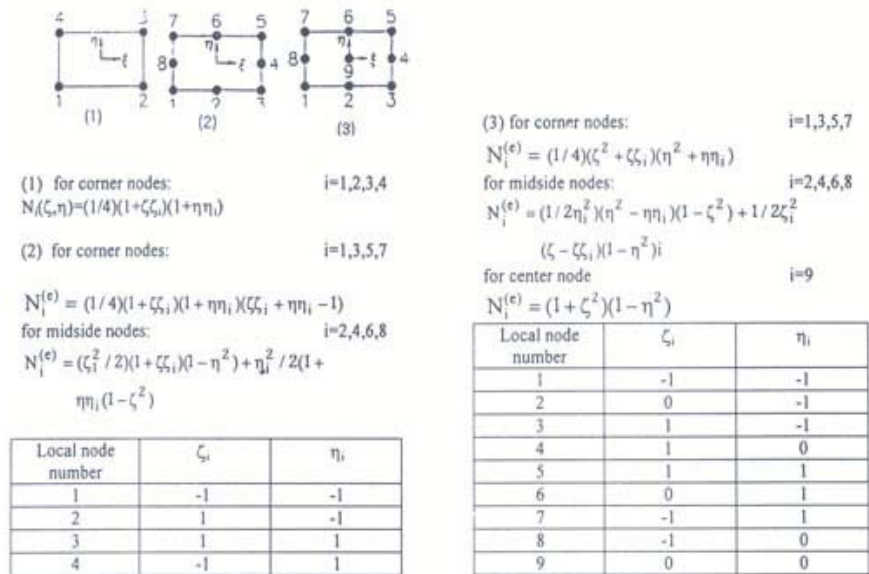
جدول 1- ماتریسهای مشخصه مواد و کرنش برای کاربردهای مختلف دو بعدی [4].

کاربرد	[B(e)]	[D(e)]
تنش صفحه‌ای	$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^{(e)} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^{(e)} \\ \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^{(e)} & \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^{(e)} \end{bmatrix}$	$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$
کرنش صفحه‌ای	$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^{(e)} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^{(e)} \\ \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^{(e)} & \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^{(e)} \end{bmatrix}$	$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$
متقارن محوری	$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^{(e)} & 0 \\ \left(\frac{N_i}{r}\right)^{(e)} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial N_i}{\partial z}\right)^{(e)} \\ \left(\frac{\partial N_i}{\partial z}\right)^{(e)} & \left(\frac{\partial N_i}{\partial r}\right)^{(e)} \end{bmatrix}$	$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ 0 & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$





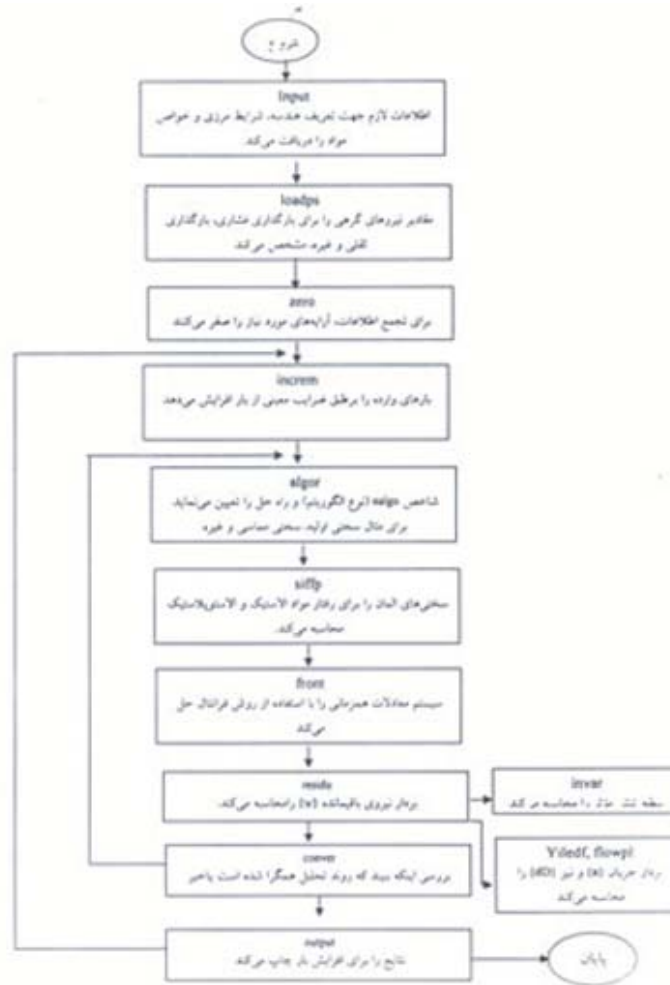
شکل 1- رفتار کرنش سختی الاستو - پلاستیک برای حالت یک محوری [4].



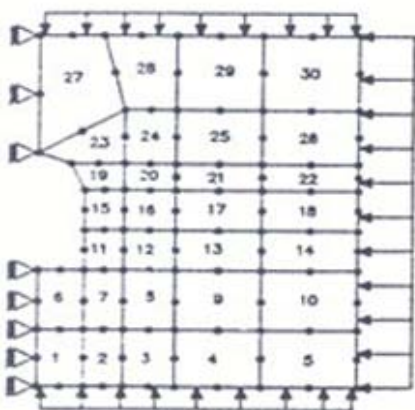
شکل 2- المانهای مختلف چهار ضلعی [2]

جدول 2- مشخصات سنگهای اطراف مغار [3].

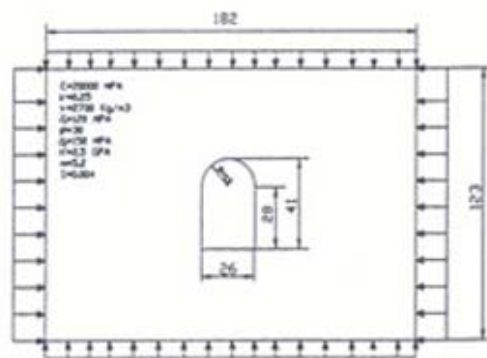
مقدار	مشخصه
12	شاخص کیفیت سنگ (Q)
150 مگاپاسکال	مقاومت فشاری یک محوری
2	نسبت محوری تنش افقی به قائم برجا (k)
0/0027 مگانیوتن بر مترمکعب	وزن مخصوص توده سنگ (γ)
8/1 مگاپاسکال	فشار قائم
16/2 مگاپاسکال	فشار افقی
m=5/2 s=0/004	پارامترهای مقاومتی هوک و براون



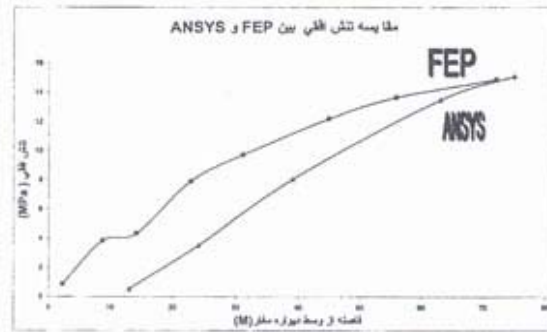
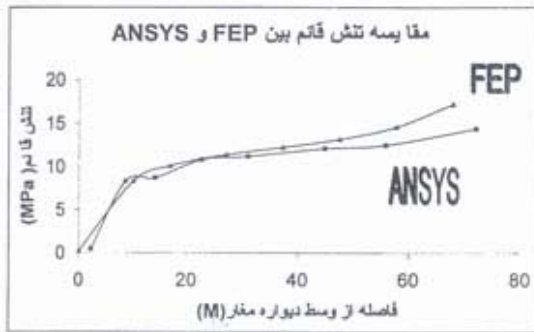
شکل 3- سازماندهی برنامه برای کاربردهای الاستو - پلاستیک دوبعدی.



شکل 5- مدل FEM توسط نرم‌افزار FEP.

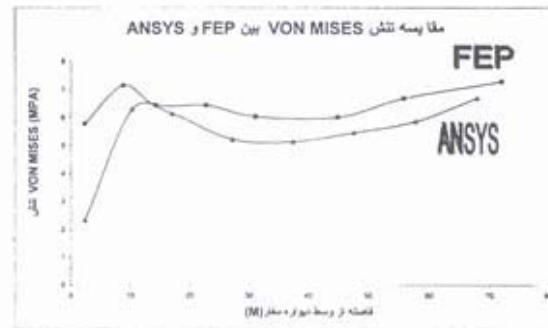
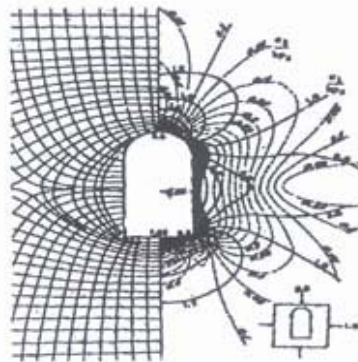


شکل 4 - مدل مهندسی.



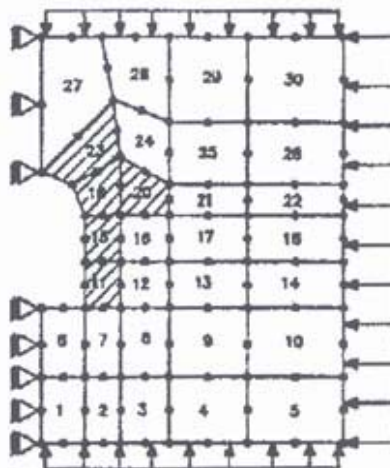
شکل 7- تنش قائم (خروجی برنامه‌های ANSYS و FEP) برای خط افقی عبوری از مرکز دیواره مغار.

شکل 6- تنش افقی (خروجی برنامه‌های ANSYS و FEP) برای خط افقی عبوری از مرکز دیواره مغار.

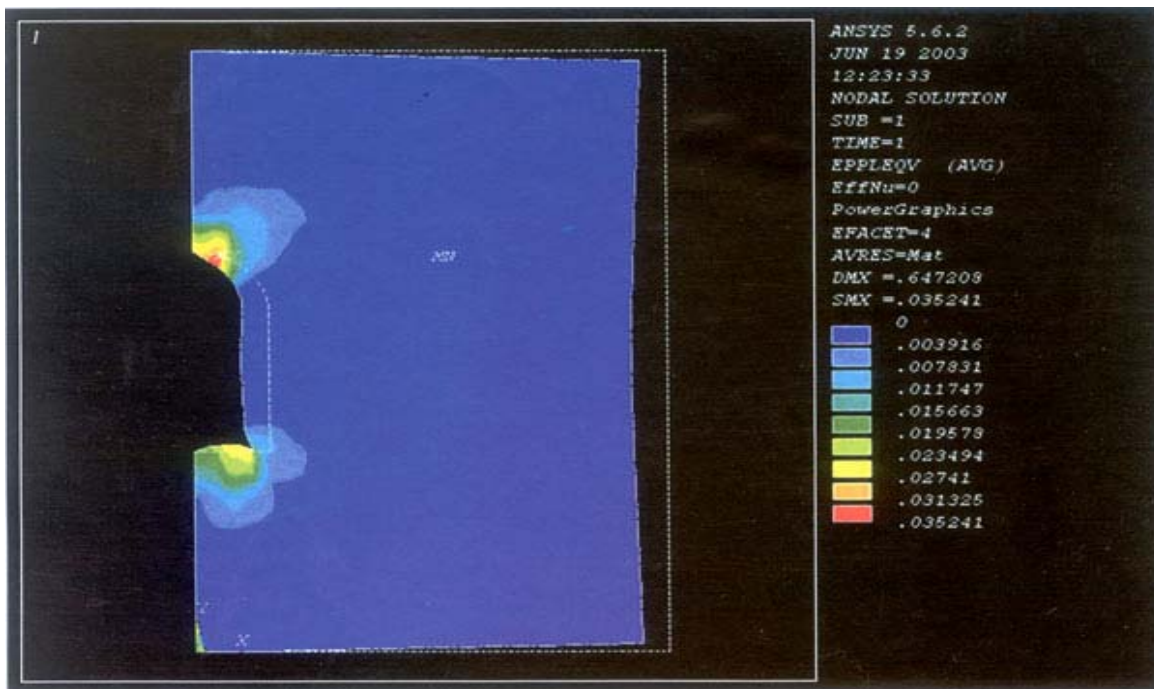


شکل 9- نواحی پلاستیک اطراف تونل روش تجربی توسط مرجع [3].

شکل 8- تنش VON-MISES (خروجی برنامه‌های ANSYS و FEP) برای خط افقی عبور از مرکز دیواره مغار.



شکل 10- نواحی پلاستیک اطراف تونل تحلیل شده توسط FEP.



شکل 11- نواحی پلاستیک اطراف تونل تحلیل شده توسط ANSYS.

### کتابنگاری

صدرنژاد، ا.، 1379- مبانی نظریه خمیری در خاک، انتشارات خواجه نصیرالدین طوسی، شماره کتاب 166.

### References

ANSYS 5.6.2 Software, Lynn Rowles, Ansys. Inc., Couthpointe, 275. Technology Drive, Canonsburg, PAUSA, 15317, www. Ansys. Com.

Hoek, Brown, 1980- "Underground Excavtion in Rock", Ins. Min. and Metall, London.

Owen, D.R.J., Hinton, E., 1980- "Finite Element in Plasticity", Pineridge Press, Swansea, U.K.

Ponde, G. N., Beer, G. & williams, J.R., 1990- "Numerical Methods in Rock Mechanics", John Wiley & Sons LTD.

Reddy, J. N., 1993- "An Introduction to Finite Element Method", Chapter 7, PP. 248, Published by MC. Graw Hill.

Smart, J.D. & Sager, J. W., 1972- "Instrumentation on Recent Corps Tunnelling Projects", Pro. First North American Rapid Excavation and Tunnelling Conference, AIME., Vol, 1, pp. 623-657.

\* دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده فنی و مهندسی، بخش معدن، تهران، ایران

\* Mining Dept. Engineering Faculty, Tarbiat Modarres University, Tehran, Iran.