

طراحی فیلتر برای سیستمهای تکین خطی نامتغیر با زمان

م. میرمؤمنی^۱ مسعود شفیعی^۲ کارو لوکس^۱ بابک نجار اعرابی^۱

^۱ دانشکده برق و کامپیوتر، دانشگاه تهران، تهران، ایران

^۲ دانشکده برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

دیگر، توسعه روشهای کلاسیک شناسایی به سیستمهای ناسره را مفید فایده می‌سازد. در این مقاله سعی بر این است که با تجزیه این سیستمها به دو زیر سیستم، مدلی ارائه کرده و در نهایت پارامترهای این مدل را با استفاده از الگوریتم گرادیان نزولی تنظیم کنیم. نتایج شبیه‌سازیها خود گواه بر قدرت این روش در شناسایی سیستمهای ناسره بالاخص سیستمهای تکین می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: سیستمهای تکین، بیشترین نزول، سیستم ناسره، اندیس سیستمهای تکین.

چکیده: امروزه شناسایی و مدل‌سازی سیستمها در جای جای جهان، خود را به عنوان رکن مهمی از علوم و مهندسی، شناسانده‌اند. در سالهای اخیر پیشرفت شگرفی در زمینه شناسایی سیستمها حاصل شده است؛ به طوری که در حال حاضر برای انواع سیستمها روشهای متنوعی برای شناسایی وجود دارد که هر یک بسته به خواص خود مزایا و معایبی دارد. متأسفانه در بیشتر این روشها، سره بودن سیستمها پیش‌فرض مسئله شناسایی می‌باشد، چرا که اغلب سیستمهای واقعی از چنین شکلی برخوردارند. با پیدایش سیستمهای تکین به عنوان تعمیمی بر سیستمهای کلاسیک با فرمی ناسره از یک طرف و خواص خوب این سیستمها در مدل‌سازی پدیده‌های آشفته از طرف

Abstract: System identification is one of the most important parts in science and technology. Unfortunately most well-known identification methods consider casual systems which have proper transfer functions. This paper presents a novel methodology for identifying linear time invariant singular systems from empirical data. A main motivation is that such systems include improper transfer functions as well as proper transfer functions. Such systems are useful to model non-casual phenomena. In addition, singular systems can be used to

describe complex dynamics with constraints. The identification method proposed in this paper is based on decomposition which decomposes a singular system to a proper and a polynomial sub-system. The parameters are tuned via a gradient decent approach. Results clearly depict the advantage of this method in identifying singular systems

Keywords: Singular systems, steepest descent, improper systems, index

۱- مقدمه

به جرأت می‌توان گفت که تمدن بشری ریشه در حس کنجکاوای بشر اولیه در شناخت محیط و پدیده‌های اطراف خود داشته است، لذا شناسایی پدیده‌ها از دیرباز دغدغه آدمی بوده است. در برابر تلاش‌های متمادی و یافته‌های بزرگ، همچنان پدیده‌های طبیعی زیادی یافت می‌شوند که آدمی را به کوشش در مدل‌سازی و شناسایی ساختار این پدیده‌ها به خود مشغول ساخته است. برخی به علت طبیعت تصادفی و برخی دیگر به علت ساختار پیچیده، به راحتی قابل شناسایی نیستند. سیستم‌های تکین نمونه‌ای خوب از چنین سیستم‌هایی می‌باشند. این سیستم‌ها که حالت کلی-تری از سیستم‌های کلاسیک می‌باشند، دارای پیچیدگی‌های خاصی بوده که تحلیل را برای این سیستم‌ها مشکل می‌سازد و گاه^۱ نیاز به روش‌هایی نامتعارف برای تحلیل این سیستم‌ها می‌باشد. این سیستم‌ها که گاه^۲ از آنها به سیستم‌های توصیفی^۱، تعمیم یافته^۲، جبری دینامیکی^۳، نیمه حالت^۴، ... یاد می‌شود، در برگزیده معادلات حالت دینامیکی در کنار معادلات جبری به عنوان محدودیت‌هایی بر متغیرهای حالت می‌باشند. این محدودیت‌های جبری که حالت سیستم را مقید به حرکت بر خمینه‌هایی می‌کند، گاه^۱ موجب پدید آمدن آشفتگی‌هایی در حالت سیستم و خروجی می‌شود. این رفتارهای ناگهانی که میزان به وجود آمدن آنها به مشخصات سیستم تکین وابسته است، عاملی است که تحلیل، شناسایی و مسائلی از این دست را برای این قبیل سیستم‌ها مشکل می‌سازد. در [۱] و [۲] به طور کامل در باب این سیستم‌ها و خواصشان صحبت شده است و روش‌هایی تحلیلی برای بررسی پاسخ این سیستم‌ها در حالت خطی ارائه شده است که تنها نگاهی اجمالی کافیت تا پیچیدگی و سنگینی بار محاسباتی این روش‌ها مشخص شود.

از طرف دیگر، با رشد روز افزون این نظریه و نفوذ آن در شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی از قبیل رباتیک، کنترل بهینه، اقتصاد، سیستم‌های با ابعاد و سبب و ... انگیزه تحلیل و بررسی این سیستم‌ها به شدت رو به افزایش است، به طوری که در این سه دهه موجی از پژوهش‌ها برای تحلیل هرچه بیشتر این سیستم‌ها به پاخاسته است که به عنوان نمونه می‌توان از تلاش‌های آقایان لوئیز و مرتزویس [۳] و [۴] و بالاچاندرا و پالاسینامی [۵]-[۷] در

آنالیز سیستم‌های تکین خطی با استفاده از توابع متعامد نام برد که در ادامه در پی موفقیت این عزیزان سیانو و چانگ [۸] و سپهریان و رزاقی [۹] با استفاده از موجک هار و سری والش به عنوان یکی از توابع متعامد سیستم‌های تکین غیر خطی متغیر با زمان را هدف خود قرار دادند و روشی برای تحلیل این سیستم‌ها ارائه دادند. همچنین مسئله طراحی فیلتر کالمن و تخمین سیگنال چه در حالت گسسته در زمان و چه در حالت پیوسته در زمان برای اینگونه سیستم‌ها مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. طراحی فیلتر کالمن برای سیستم تکین گسسته در زمان برای حالت کلی توسط آقایان نیکوخواه و کمپل مورد بررسی قرار گرفته است [۱۰] که سیری است اصلاحی بر مقالات [۱۱]-[۱۳]. حالت پیوسته در زمان نیز برای حالت کلی توسط آقایان علامی و شفیعی مورد بحث قرار گرفته است [۲۰]. ولی باید اذعان داشت که مسئله شناسایی این سیستم‌ها تا کنون دست نخورده باقی مانده است. چرا که این سیستم‌ها در بستر فرکانس از نوع ناسره^۵ بوده و روش‌های کلاسیک شناسایی برای اینگونه از سیستم‌ها ابر می‌باشند. هر چند باید اذعان داشت که مسئله شناسایی سیستم‌های ناسره نیز تا حد زیادی دست نخورده باقی مانده است. در سال‌های اخیر تلاش‌هایی برای دستیابی به روش‌هایی در شناسایی اینگونه سیستم‌ها به عمل آمده است که به عنوان نمونه می‌توان به تلاش آقایان واندراستین، لینتن و پینتلون اشاره کرد [۱۴]. روشی که در این مقاله به کار گرفته شده است، بر معیار کمترین مربعات خطا بنا شده و با تعمیم این معیار به سیستم‌های ناسره سعی در شناسایی پارامترهای هدایت کننده موج هم صفحه^۶ دارد. متأسفانه باید اذعان داشت که روش مزبور قابل اعمال به سیستم‌های تکین نبوده و عملکرد مناسبی در شناسایی پارامترهای سیستم تکین از خود نشان نمی‌دهد. قدرت بالای سیستم‌های تکین در مدل کردن سیستم‌های غیر خطی پیچیده با تعداد پارامترهای کمتر نسبت به مدل‌های معمولی [۱۵] و [۱۶] که این امر برخاسته از مشخصات ذاتی این سیستم‌هاست، ما را وادار می‌دارد که در پی توسعه روش‌های کلاسیک شناسایی به این سیستم‌ها باشیم. وجود فیلتر کالمن برای این نوع سیستم‌ها به عنوان دوگانی بر روش‌های شناسایی خود نوید بخش وجود روشی است که شناسایی این سیستم‌ها را برای ما مقدور سازد. روشی که سعی در ارائه آن در این مقاله داریم. در بخش دوم به طور کوتاه به خواص سیستم‌های تکین اشاره می-

¹ Descriptor

² Generalized

³ Algebraic-Differential

⁴ Semi-State

⁵ Improper

⁶ Coplanar Waveguide



$$\begin{bmatrix} sE - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ex(0_-) \\ Y(s) \end{bmatrix} \quad (4)$$

ماتریس ضریب در سمت چپ این معادله، ماتریس سیستم متناظر با سیستم (۱) نامیده می‌شود [۱۸]. با توجه به نظریه «قلم منظم»، ماتریسهای ناکتین M و N برای چنین سیستمی وجود دارد به-طوری که:

$$M(sE - A)N = \begin{bmatrix} sI_n - \bar{A} & 0 \\ 0 & I_{r-n} - s\bar{E} \end{bmatrix} \quad (5)$$

که \bar{E} یک ماتریس پوچ توان می‌باشد (همه مقادیر ویژه‌اش صفر می‌باشد). قابل ذکر است که با چنین تبدیلی رفتار متغیر حالت X بدون تغییر می‌ماند و می‌توان رفتار متغیر X را تحت هر تبدیلی از این دست محاسبه کرد و در نتیجه باید اذعان داشت که چنین تبدیلاتی هیچگونه خرابی بر رفتار سیستم و «خواص مهم سیستم» ندارد. ماتریس موجود در معادله (۵) شکل کرونکر قلم $(sE - A)$ نام دارد. حال با در نظر گرفتن این تبدیل معادله (۴) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} sI_n - \bar{A} & 0 & -\bar{B} \\ 0 & I_{r-n} - s\bar{E} & -\bar{B} \\ \bar{C} & \bar{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}(s) \\ \tilde{X}(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}(0_-) \\ -\tilde{E}\tilde{x}(0_-) \\ Y(s) \end{bmatrix} \quad (6)$$

که \bar{B} و \tilde{B} و همینطور سایر بلوکهای به این شکل، به ترتیب نمایانگر زیربلوکهای متناظر در MB می‌باشند. بدین ترتیب تابع تبدیل این سیستم عبارت است از:

$$G(s) = \bar{G}(s) + D(s) \quad (7)$$

که

$$\bar{G}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} \quad (8) \quad \text{بخش سره}$$

و

$$D(s) = \bar{C}(I - s\bar{E})^{-1}\tilde{B} = \bar{C}(I + s\bar{E} + \dots + s^v \bar{E}^v)\tilde{B} \quad (9) \quad \text{چندجمله‌ای}$$

به طوری که v اندیس ماتریس \bar{E} می‌باشد. همانطور که از رابطه (۹) مشخص است درجه چند جمله‌ای $D(s)$ که درجه ناسره‌ای سیستم تکین است، برابر با v اندیس ماتریس \bar{E} می‌باشد. در نتیجه باید گفت که عامل رفتارهای آشفته در سیستمهای تکین خطی، ماتریس \bar{E} بوده و میزان آشفستگی این سیستمها، همچنین

شود، خواصی که در روش شناسایی خود از آنها بهره می‌جوئیم. در بخش سوم به ارائه روش شناسایی مذکور پرداخته و در ادامه در بخش چهارم با ارائه مثالی صحت روش مذکور را در شناسایی پارامترهای سیستم تکین نشان می‌دهیم و در نهایت بخش پنجم را به جمع‌بندی و نتیجه‌گیری اختصاص می‌دهیم.

۲- مروری کلی بر سیستمهای تکین

در این بخش سعی در ارائه تعاریف کلیدی مربوط به سیستمهای تکین خواهیم داشت. سیستمهای تکین توسط معادله فضای حالت خطی زیر توصیف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \dot{Ex}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

که X برداری است از مرتبه r که نمایانگر متغیرهای درونی یا حالت است و u برداری است از درجه m که نمایانگر ورودی کنترل می‌باشد. y نیز بردار خروجی از مرتبه p می‌باشد. در صورتی که ماتریس E تکین باشد، شرایطی به وجود می‌آید که در سیستمهای استاندارد هیچوقت رخ نمی‌دهد. این شرایط عبارتند از:

۱. در این وضعیت واضح است که درجه آزادی سیستم که همان تعداد مقادیر مستقل در $Ex(0_-)$ می‌باشد، نسبت به حالت استاندارد کاهش یافته و برابر است با:

$$f \square rank E < r \quad (2)$$

- به درجه تعمیم یافته سیستم یاد کرد. f که می‌توان از تابع انتقال $G(s) = C(sE - A)^{-1}B + D$ در این سیستمها لزوماً سره نمی‌باشد و می‌توان آنرا به صورت دو بخش سره و یک بخش چند جمله ای نوشت.
۳. در اینگونه از سیستمها $degree of |sE - A| \square n \leq f < r$ اثبات می‌شود که به تعداد $(f-n)$ فرکانس نامحدود و ضربه‌ای و n فرکانس محدود به مثابه $s = \lambda$ ریشه-های $|sE - A| = 0$ وجود دارد.

۴. برای شرط اولیه x_0 ، ممکن است جواب وجود نداشته باشد و یا اینکه جواب منحصر به فرد به دست نیاید.

در صورت مشخص بودن $Ex(0_-)$ و $u(t)$ برای $t \geq 0$ ، پاسخ سیستم با استفاده از تبدیل لاپلاس عبارت است از:

$$\begin{aligned} X(s) &= (sE - A)^{-1} [Ex(0_-) + BU(s)] \\ Y(s) &= CX(s) \end{aligned} \quad (3)$$

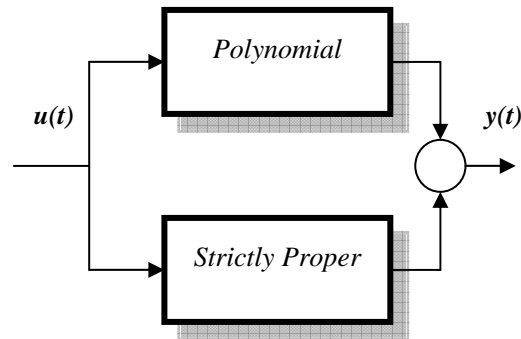
با بازنویسی این رابطه داریم:

درجه ناسره‌ای تابع تبدیل چنین سیستمهایی به اندیس این ماتریس که رابطه‌ای مستقیم با تعداد معادلات جبری و محدودیتها دارد، وابسته می‌باشد.

در ادامه، در بخش بعد به ارائه روش شناسایی تعمیم یافته برای اینگونه از سیستمها خواهیم پرداخت. لازم به ذکر است که در این مقاله اندیس ماتریس \tilde{E} برای راحتی دانسته فرض می‌شود. در عمل می‌بایست در صورت معین نبودن این مقدار، از اندیس صفر شروع کرده و کم کم درجه اندیس (پیچیدگی سیستم تکین) را افزایش داده تا به یک مدل مطلوب برسیم.

۳- طراحی فیلتر برای سیستمهای تکین خطی

همانطور که در بخش قبل مطرح شد، تابع تبدیل سیستمهای تکین را می‌توان شامل دو زیر سیستم^۷ سره و چند جمله‌ای دانست، به طوری که درجه زیر سیستم چند جمله‌ای به اندیس ماتریس پوچ توان و درجه معادله مشخصه مربوط به زیر سیستم سره به درجه ماتریس نانتکین در معادله حالت سیستم تکین وابسته است. همانطور که دیدیم، این جداسازی را می‌توان با اعمال یک تبدیل خطی به سیستم تکین به دست آورد. شکل ۱ تابع تبدیل یک سیستم تکین را که توسط یک تبدیل ماتریسی به دو زیر سیستم تجزیه شده است نشان می‌دهد.



شکل (۱): سیستم تکین تجزیه شده به دو زیر سیستم.

با گذر از حوزه پیوسته در زمان به حوزه گسسته در زمان زیر سیستم چند جمله‌ای به یک زیر سیستم متوسط‌گیر^۸ تبدیل شده و زیر سیستم سره به شکل یک زیر سیستم سره در حوزه گسسته در زمان تبدیل می‌شود. الگوریتمی که برای شناسایی پارامترهای این

زیر سیستمها استفاده می‌شود، الگوریتم گرادیان نزولی^۹ می‌باشد. در این روش ابتدا ساختار مدل سیستم مورد نظر مشخص می‌شود. در این ساختار تعدادی پارامتر متغیر وجود خواهد داشت که این پارامترها بر اساس داده‌های ورودی- خروجی به طوری تنظیم می‌شوند که معیاری خاص کمینه شود. در این مقاله فرض بر این است که اندیس بخش پوچ توان سیستم تکین معین بوده و برابر با مقدار ثابت p می‌باشد. در نتیجه با گذر از حوزه پیوسته در زمان به حوزه گسسته در زمان، معادله تفاضلی سیستم تکین به شکل زیر می‌باشد:

$$\hat{y}(i) = a_{-p}u(i+p) + \dots + a_0u(i) + a_1u(i-1) + \dots + a_mu(i-m) + b_1y(i-1) + \dots + b_qy(i-q) = \theta^T \varphi(i) \quad (10)$$

که در آن $\theta^T = [a_{-p} \dots a_0 \ a_1 \dots a_m \ b_1 \dots b_q]$ نمایانگر پارامترهای مدل و بردار

$\varphi^T(i) = [u(i+p) \dots u(i-m) \ y(i-1) \dots u(i-q)]$ به ترتیب نمایانگر ورودیها و متغیر خروجی در زمانهای مختلف می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود، این مدل، مدلی است غیر علی و این چیزی دور از انتظار نیست؛ چرا که سیستمهای ناسره سیستمهایی غیرعلی می‌باشند و سیستم تکین نیز از این قاعده مستثنی نیست. هدف ما، یافتن پارامترهای مدل (۱۰) است به-طوری که به‌زای زوج مشاهدات $\{y(i), \varphi(i), i = 1, 2, \dots, n\}$ خطای تطبیق:

$$\varepsilon(i) = \frac{1}{2}(y(i) - \hat{y}(i))^2 = \frac{1}{2}(y(i) - \theta^T \varphi(i))^2 = \frac{1}{2}e_i^2 \quad (11)$$

کمینه گردد.

برای تنظیم پارامترها از الگوریتم گرادیان نزولی بهره می‌گیریم. شکل کلی این الگوریتم در تنظیم پارامترهای مدل به ازای یک زوج داده ورودی- خروجی به شکل زیر است:

$$\theta^{k+1} = \theta^k - \eta \nabla \varepsilon(\theta^k) \quad (12)$$

همانطور که مشاهده می‌شود، جهت تنظیم پارامترها در جهت عکس گرادیان تابع خطا بوده و این جهت در واقع همان جهتی است که تابع خطای مورد نظر به ازای زوج داده ورودی- خروجی، بیشترین نزول^{۱۰} را دارد. در این رابطه η طول گام تنظیم را در هر مرحله مشخص می‌کند. گاهی از این پارامتر (بالاخص در مباحث

⁹ Gradient Descent-Based Algorithm

¹⁰ Steepest Descent

⁷ Sub System

⁸ Moving Average

سیستمهای فازی و شبکه‌های عصبی مصنوعی) به ثابت یادگیری^{۱۱} [۱۷] و [۱۸] یاد می‌شود.

با در نظر گرفتن رابطه (۱۲) قانون تنظیم پارامترها عبارت است از:

$$a_j^{k+1} = a_j^k - \eta \frac{\partial \varepsilon(\varphi(i), \theta^k)}{\partial a_j^k}$$

$$= a_j^k + \eta u(i - j) e_i,$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$j = -p, \dots, m$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$
(۱۳)

و

$$b_j^{k+1} = b_j^k - \eta \frac{\partial \varepsilon(\varphi(i), \theta^k)}{\partial a_j^k}$$

$$= b_j^k + \eta y(i - j) e_i,$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$j = -p, \dots, m$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$
(۱۴)

با میل کردن k به سمت بی‌نهایت، انتظار می‌رود که پارامترهای مدل به سمت مقادیر واقعی خود همگرا شوند. در این صورت از روی رابطه (۱۲) نتیجه می‌شود که در نقطه همگرایی $\nabla \varepsilon(\cdot)$ برابر صفر بوده و این بدان معنی است که پارامترهای مدل سیستم تکین در یک نقطه می‌نیمم محلی تابع خطای مورد نظر قرار گرفته است. اگر تابع خطا از شکلی ساده برخوردار باشد، انتظار می‌رود که پارامترهای مدل در این الگوریتم به مقادیر مطلوب همگرا شوند. ولی در صورتی که تابع خطا پیچیده بوده و چندین نقطه می‌نیمم محلی داشته باشد، این الگوریتم تضمینی بر همگرایی پارامترها به مقادیر واقعی خود ندارد. در چنین حالتی می‌بایست به دیگر روشهای مرسوم بهینه سازی از قبیل الگوریتمهای ژنتیک و روشهای هوشمند از این دست متوسل شد [۱۹].

در بخش بعد با ذکر مثالهایی، صحت عملکرد این روش در مقایسه با روشهای کلاسیک شناسایی در باب شناسایی پارامترهای مدل سیستم تکین پرداخته می‌شود.

۴- نتایج شبیه‌سازی

این بخش اختصاص به ارائه مثالی جهت نشان دادن عملکرد روش مورد نظر در شناسایی پارامترهای تابع تبدیل سیستم تکین دارد. برای مقایسه عملکرد این روش، روش معمولی کمترین مربعات خطا نیز برای شناسایی سیستمهای تکین به کار گرفته می‌شود.

مثال آ.

سیستم تکین با معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
(۱۵)

$$y = [1 \quad 1]x$$

قلم منظم این سیستم تکین عبارت است از:

$$(s\tilde{E} - \tilde{A}) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(۱۶)

همانطور که دیده می‌شود بخش پوچ توان موجود در سیستم تکین دارای اندیس صفر می‌باشد، لذا بخش چند جمله‌ای تابع تبدیل از درجه صفر برخوردار است. تابع تبدیل این سیستم تکین عبارت است از:

$$G(s) = \frac{s+2}{s+1} = 1 + \frac{1}{s+1}$$
(۱۷)

$$G_T(z) = 1 + \frac{T}{z + (T-1)}$$

حال این سیستم تکین را با ثابت زمانی $T=0/6$ در نظر گرفته و سعی در شناسایی پارامترهای سیستم تکین با استفاده از دو روش کمترین مربعات خطا و روش تجزیه به دو زیرسیستم با تنظیم پارامترها به وسیله الگوریتم گرادیان نزولی خواهیم داشت.

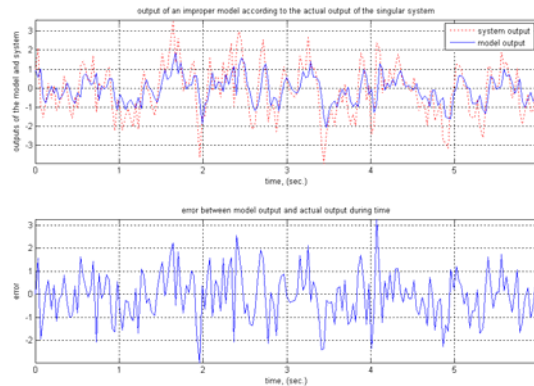
برای شناسایی پارامترهای مدل، یک نویز گوسی به عنوان تحریک به سیستم اعمال کرده و از ۲۰۰ داده ورودی- خروجی برای تنظیم پارامترهای مدل سیستم تکین بهره می‌گیریم، به طوری که خروجی سیستم با اغتشاش نویزی در آمیخته است. صحت عملکرد مدل‌های به دست آمده نیز با ورودی نویز سفید سنجیده می‌شود. جدول ۱ مقادیر واقعی سیستم تکین و مقادیر شناسایی شده توسط هریک از روشها را به ازای $T=0/6$ نشان می‌دهد.

جدول (۱): نتایج شبیه سازی سیستم تکین به ازای $T=0/6$

| | پارامتر ۱ | پارامتر ۲ | پارامتر ۳ | RMS E |
|------------------------|-----------|-----------|-----------|-------|
| مقادیر واقعی پارامترها | -۰/۵ | ۱ | ۰/۲ | --- |
| روش LSE | ۰/۵۰۹ | ۰/۰۴۱ | ۰/۰۱۲ | ۰/۰۷۵ |
| روش تجزیه | ۰/۴۶۳ | ۱/۰۰۴ | ۰/۱۶۳ | ۰/۰۰۷ |

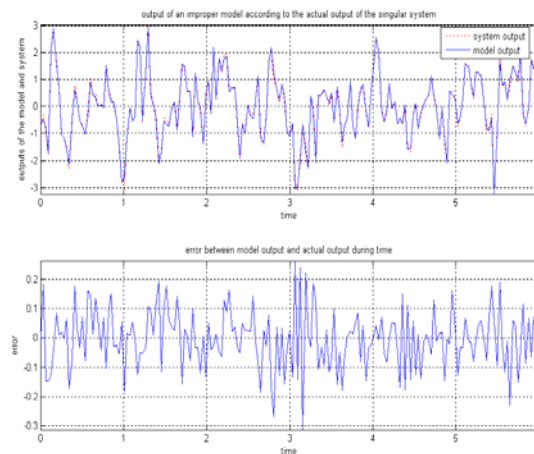
¹¹ Learning Constant

شکل ۲ پاسخ مدل به دست آمده با استفاده از روش کمترین مربعات خطا را به ورودی نویز سفید در برابر پاسخ واقعی سیستم نشان می‌دهد. همانطور که دیده می‌شود پاسخ مدل نسبت به پاسخ حقیقی دارای بایاس و تأخیر می‌باشد و در کل عملکرد رضایت‌بخشی ندارد.



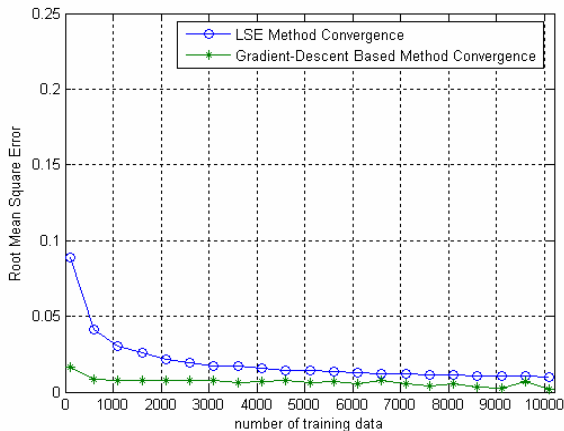
شکل (۲): - آ- پاسخ مدل حاصل شده از روش LSE و پاسخ واقعی سیستم تکین به ورودی نویز سفید با ازای $T=0.6$ - ب- خطای ما بین خروجی مدل حاصل و خروجی حقیقی.

شکل ۳ پاسخ مدل به دست آمده با استفاده از روش تجزیه به زیر سیستمها را به ورودی نویز سفید در برابر پاسخ واقعی سیستم نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود پاسخ این مدل در مقایسه با روش کمترین مربعات خطا به مراتب بهتر بوده و این روش به خوبی از عهده شناسایی پارامترهای سیستم تکین برآمده است.



شکل (۳): - آ- پاسخ مدل حاصل شده از روش گرادیان نزولی و پاسخ واقعی سیستم تکین به ورودی نویز سفید با ازای $T=0.6$ - ب- خطای ما بین خروجی مدل حاصل و خروجی حقیقی.

شکل ۴ همگرایی پارامترهای مدل به مقادیر واقعی را با استفاده از روش تجزیه بر حسب افزایش زوج داده‌های ورودی - خروجی را در مقایسه با روش کمترین مربعات خطا نشان می‌دهد.



شکل (۴): میزان همگرایی پارامترهای مدل به دست آمده از دو روش LSE و گرادیان نزولی بر حسب تعداد زوج داده‌های ورودی - خروجی.

همانطور که مشخص است روش گرادیان نزولی با تعداد داده‌های کم به سرعت به مقادیر واقعی همگرا شده، در صورتی که روش کمترین مربعات حتی با داده‌های زیاد نیز به مقادیر واقعی همگرا نمی‌شوند.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله روشی برای شناسایی پارامترهای سیستم تکین که بر گرفته از روشهای کلاسیک شناسایی می‌باشد، ارائه شد تا ضعف ذاتی این روشها در شناسایی پارامترهای سیستمهای ناسره که سیستمهای تکین یکی از انواع این سیستمها می‌باشند مرتفع شود. این روش بر تجزیه سیستم تکین به دو زیر سیستم سره و چند جمله‌ای بنا شده است و در الگوریتم شناسایی مزبور پارامترهای هر یک از زیر سیستمها به طور همزمان با زوج داده‌های ورودی - خروجی بر اساس الگوریتم گرادیان نزولی تنظیم می‌شوند. صحت عملکرد این روش در شناسایی پارامترهای سیستم تکین با عملکرد روش کمترین مربعات خطا به عنوان یکی از معیارهای کلاسیک شناسایی در مثالی نشان داده شده است و روش مذکور به مراتب عملکرد بهتری در شناسایی پارامترهای سیستم تکین از خود نشان می‌دهد.

[12] R. Nikoukhah, A. S. Wilsky, and B. C. Levy, "Kalman Filtering and Riccati Equations for Descriptor Systems," IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 37, pp. 1325- 1342, 1992.

[13] B. C. Levy, A. Beneveniste, and R. Nikoukhah, "High-level Primitive for Recursive Maximum Likelihood Estimation," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 41, pp. 1125- 1145, 1996.

[14] G. Vandersteen, R. Pintelon, D. Linten, and S. Donan, "Extended Subspace Identification of Improper Linear Systems," in Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition, Paris, France, February 2004.

[15] E. T. Jeung, D. Chang Oh, and H. B. Park, "Delay-Dependent Control for Time-Delayed T-S- Fuzzy Systems Using Descriptor Representation," Int. Journal of Control, Automation, and Systems., Vol. 2, No. 2, pp. 182-188, June 2004.

[16] Y. Wang, Z. Q. Sun, and F. C. Sun, "Robust Fuzzy Control of a Class of Nonlinear Descriptor Systems with Time-Varying Delay," Int. Journal of Control, Automation, and Systems., Vol. 2, No. 1, pp. 76-82, March 2004.

[17] L. X. Wang, "A Course in Fuzzy Systems and Control," Prentice-Hall, Inc. 1996.

[18] J-M. Zurada, "Introduction to Artificial Neural Systems," West Publishing Company, 1996.

[19] R. S. Sutton, A. G. Barto, "Introduction to Reinforcement Learning," MIT Press, Cambridge, 1998.

[20] علامی، علیرضا، و شفیعی، مسعود، "طراحی فیلتر کالمن برای سیستمهای پیوسته سینگولار"، مجموعه مقالات یازدهمین کنفرانس مهندسی برق ایران، ۱۶-۱۸ اردیبهشت ۱۳۸۲، شیراز، ایران، جلد سوم، صص ۲۰۸-۲۱۶.

[1] Campbell, S. L., "Singular Systems of Differential Equation", Pitman, London, 1980.

[2] G. C. Verghese, and B. C. Levy, and T. Kailath, "A Generalized State-space for Singular Systems," IEEE Trans. Auto. Contr. Vol. AC-26, No. 4, Aug. 1981.

[3] B. G. Mertzios, F. L. Lewis, "Analysis of Singular Systems Using Orthogonal Functions," IEEE Trans. Auto. Contr. Vol. AC-32, pp. 527-530, 1987.

[4] F. L. Lewis, B. G. Mertzios, and W. Marszalek, "Analysis of Singular Bilinear Systems Using Walsh Functions," IEE Proc. pp. 89-92, 1991.

[5] K. Balachandran, K. Murugesan, "Analysis of Singular Systems Using Orthogonal Functions", IEEE Trans. Auto. Contr. Vol. AC-32, No. 6, June 1984.

[6] K. R. Palanisamy, & K. Balachandran, "Analysis of time-varying Singular Systems via single-term Walsh Series Approach", IEE Proc., Vol. 135, pt. D, No. 6, pp. 461-462, 1988.

[7] K. R. Palanisamy, & K. Balachandran, "Single-Term Walsh Series Approach to Singular Systems", Int. J. Control, Vol. 46, No. 6, PP. 1931-1934, 1987.

[8] C.-H. Hsiao, W.-H Wang, "State Analysis of Time-varying Nonlinear Singular Systems via Harr Wavelets, " Math. Comput. Simulation, Vol. 51, No. 1-2, pp. 91-100, 1999.

[9] B. Sepehrian, M. Razzaghi, "Solution of Time-varying Singular Nonlinear Systems by Single-Term Walsh Series," Math. Problems in Engineering pp. 129-136. 2003:3 (2003).

[10] R. Nikoukhah, S. L. Campbell and F. Delebecque, "Kalman Filtering for Ggeneral Discrete Time Linear Systems," IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 44, No. 10, pp.1829-1839, October 1999.

[11] L. Dai, "Filtering and LQG Problems for Discrete-time Stochastic Singular Systems," IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 34, pp. 1105-1108, 1989.