حل سريع روش اجزاي مرزي براي مسائل الاستيسيته با استفاده از موجكها

لطيف ابراهيم نژاد[۱] و رضا عطارنژاد[*۲]

[۱]دانشجوي دكتري سازه دانشكده مهندسي عمران- پرديس دانشكده هاي فني - دانشگاه تهران

[۲]استاديار دانشكده مهندسي عمران- پرديس دانشكده هاي فني - دانشگاه تهران

(تاريخ دريافت ۸۵/۷/۲۲ ، تاريخ دريافت روايت اصلاح شده ۸۶/۲/۱۵ ، تاريخ تصويب ۸۶/۳/۱۹)

چكيده

در اين مقاله روشي سريع براي حل مسائل الاستيسيته به كمك روش اجزاي مرزي ارائه مي شود. نكته اصلي اين روش، استفاده از تبديل موجک براي فشرده كردن ماتريس هاي پرو نامتقارن ناشي از روش اجزاي مرزي است. موجكهای متعامد Daubechies برای فشرده كردن ماتريس هاي سيستم اجزاي مرزی در مسائل عملي الاستيسيته استفاده شده اند. تبديل موجک به شكل جعبه سياه به برنامه هاي اجزاي مرزي موجود اعمال شده است.

آناليز حساسيت نتايج عددي تغيير مكانها و تنشها براي پارامترهاي آستانه مختلف ارائه شده است. مزيت عمده اين روش تبديل ماتريس هاي پر در روش اجزاي مرزي به ماتريس هاي شبه نواري است كه عناصر غيرصفر آن كم بوده و حول و حوش قطر اصلي توزيع شده اند. اين ويژگي باعث كاهش قابل ملاحظه زمان حل سيستم معادلات خطي با روش تكراریGMRES ميگردد. مثالهای ارائه شده كارائي روش را در حل سيستم هاي بزرگ اجزاي مرزي نمايان مي سازد.

واژه هاي كليدي : تبديل موجک- روش اجزاي مرزي- حل كننده GMRES - مسائل الاستيسيته

مقدمه

روش تفاضل هاي محدود و اجزاي محدود دو روش حل عددي بسيار نيرومند براي حل مسائل عملي مهندسي مي باشند. در اين دو روش كه از نوع دامنه اي هستند، بايد كل دامنه مسأله افراز شود. در روش اجزاي مرزي، نيازي به افراز دامنه مسأله نيست و فقط مرز مسأله افراز مي شود. همين ويژگي باعث كاهش يک بعد از ابعاد مسأله شده و به خاطر كاهش درجات آزادي سيستم بسيار جالب به نظر می رسد. متأسفانه در ازاي مزيت مذكور، ماتريس هاي حاصله از روش اجزاي مرزي بر خلاف ماتريس هاي سختي روش تفاضل هاي محدود و اجزاي محدود كه نواري و غالباً متقارن هستند، پر و نامتقارن مي باشند. به اين دليل ديگر نمي توان در حل سيستم معادلات خطي از تكنيک های كارآمد Sky Line وFrontal استفاده كرد و همين امر باعث مي شود كه از روش حل مستقيم گاوس براي حل سيستم معادلات خطي روش اجزاي مرزي استفاده شود. با توجه به اينكه تلاش محاسباتي حل در روش گاوس، از مرتبه توان سوم درجات آزادي مسأله است، زمان حل و حافظه لازم براي حل سيستم هاي بزرگ در روش اجزاي مرزي باعث ناكارآمدي اين روش مي شود و ايراد عمده اين روش محسوب مي شود. براي غلبه بر مشكل ماتريس هاي پر و نامتقارن روش اجزاي مرزي، روش Panel Clustering [۱]، FMM [۲] و موجك [۳،۴،۵،۶،۷] ارائه شده است. ايده استفاده از تبديل موجک در روش اجزاي مرزي، نخستين بار توسط Beylkin، Coifman و Rokhlin در سال ۱۹۹۱ ارائه شد و بعدها توسط سايرين [۷، ۸، ۹، ۱۰ و۱۱] پي گيری و توسعه داده شد. مزيت عمده موجكها نسبت به Panel Clusteringو FMM در اين است كه مي توان موجكها را به شكل جعبه سياه به برنامه هاي اجزاي مرزي اضافه نمود. در حاليكه در دو روش ديگر بايد فرمولاسيون مسأله از ابتدا تغيير كند. تاكنون كاربرد موجكها در روش اجزاي مرزي براي حل مسائل ساده پتانسيل مورد بررسي قرار گرفته است. در اين مقاله براي نخستين بار اين روش براي مسائل الاستيسيته تعميم داده شده است و كارائي آن با مثالهاي متعدد به اثبات رسيده است. تعميم روش به مسائل الاستو ديناميک كار بعدي نويسنگان اين مقاله است كه در دست تهيه است. پيكربندي اين مقاله به اين شكل تنظيم شده است كه در ادامه سيستم دستگاه معادلات خطي حاكم بر مسائل دو بعدي الاستيسيته و مسائل با تقارن محوري در روش اجزاي مرزي بدست

* نويسنده مسئول : تلفن : ۶۱۱۱۲۲۲۵ , فاكس : ۶۶۴۰۳۸۰۸ , Eamil: rattar@ut.ac.ir

مي آيد. سپس موجكها و ويژگي هاي مهم آنها بررسي مي شود. پس از معرفي موجكها، نحوه اعمال موجكها به سيستم معادلات خطي حاصل از روش اجزاي مرزي نشان داده مي شود. براي ارزيابي كارائي روش، نتايج عددي چند مثال و آناليز حساسيت نتايج حل را با پارامترهاي موجكها بررسي مي كنيم و در نهايت نتيجه گيري از روش ارائه شده به عمل مي آيد.

روش اجزاي مرزي براي حل مسائل الاستيسيته دوبعدي و مسائل با تقارن محوري

معادله ناويه

در اين مقاله از فرمولاسيون "مستقيم" در روش اجزاي مرزي كه كميت هاي فيزيكي را بعنوان متغيرهاي حل بكار مي برد، استفاده شده است. براي بدست آوردن معادله ديفرانسيل حاكم بر تئوري الاستيسيته بر حسب تغيير مكان، سه رابطه معادله ديفرانسيل تعادل، روابط تنش- كرنش و روابط كرنش- تغيير مكان را بكار برده و براي محيط هاي همگن به معادله زير موسوم به معادله ناويه مي رسيم:

$$u_{i,jj}+(\frac{1}{1-2\upsilon^*})u_{j,ij}=-\frac{f_i}{\mu}$$

(١)

در نوشتن روابط در اين مقاله از جمع انديسي استفاده شده است. در رابطه فوق u_i و f_i بترتيب مؤلفه i ام تغييرمكان و بار حجمي، μ مدول برشي و υ^* براي مسائل كرنش مسطح ضريب پواسون و براي مسائل تنش مسطح از رابطه زير بدست مي آيد:

$$\upsilon^*=\frac{\upsilon}{1+\upsilon}$$

(٢)

كه در آن υ ضريب پواسون مي باشد.

حل اساسي مسأله

براي حل معادله فوق، به حل اساسي مسأله نياز داريم. حل اساسي مسأله الاستيسيته حل كلوين است، كه در روابط (٣) و (۴) ارائه شده است [١٢] .

$$u_i=\frac{1}{8\pi\mu(1-\upsilon)}\left[(3-4\upsilon)Ln(\frac{1}{r})\delta_{ij}+r_{,i}r_{,j}\right]$$

(٣)

$$t_i=\frac{-1}{4\pi(1-\upsilon)r}\{[(1-2\upsilon)\delta_{ij}+2r_{,i}r_{,j}]r_{,n}-[(1-2\upsilon)(r_{,j}n_{,i}-r_{,i}n_{,j}]\}$$

(۴)

در اين رابطه t_i مؤلفه i ام بردار تنش روي سطح با بردار نرمال n با مؤلفه هاي n_i و δ_{ij} دلتاي كرونكرمي باشد.

معادله انتگرال مرزي

از قضيه تقابل بتي [١٢] براي به دست آوردن معادله انتگرالي تغييرمكان نقطه P ناشي از تنش و تغييرمكان بر روي نقطه مرزي Q استفاده مي كنيم. در غياب نيروهاي حجمي، معادله انتگرالي به شكل زير درمي آيد:

$$u_i(P)+\int_\Gamma T_{ij}(P,Q)u_j(Q)d\Gamma(Q)=\int_\Gamma U_{ij}(P,Q)t_j(Q)d\Gamma(Q)$$

(۵)

در رابطه فوق U_{ij} و T_{ij} بترتيب كرنل تغييرمكان و تنش مي باشند.

حل معادله انتگرالي

براي حل معادله انتگرالي (۵) بايد مراحل زير طي شود:

تجزيه مرز به المانها

نحوه تغييرات هندسه و متغيرهاي تغييرمكان و تنش بر روي المانهاي مرزي بايد از پيش مشخص باشد. در اين مقاله از المانهاي ايزوپارامتريک درجه دو استفاده شده است.

انتگرال گيري عددي كرنل ها:

با استفاده از ماتريس ژاكوبين براي تبديل از مرز G به مختصات محليx معادله انتگرالی (۵) به صورت زير درمي آيد:

$$\begin{bmatrix}c_{xx}(P) & c_{xy}(P)\\ c_{yx}(P) & c_{yy}(P)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_x(P)\\ u_y(P)\end{Bmatrix}+\sum_{m=1}^{M}\sum_{c=1}^{3}\left(\int_{\Gamma_m}\begin{bmatrix}T_{xx}(P,Q) & T_{xy}(P,Q)\\ T_{yx}(P,Q) & T_{yy}(P,Q)\end{bmatrix}N_c(\xi)J(\xi)d\xi\right)\begin{bmatrix}u_x(Q)\\ u_y(Q)\end{bmatrix}=\sum_{m=1}^{M}\sum_{c=1}^{3}\left(\int_{\Gamma_m}\begin{bmatrix}U_{xx}(P,Q) & U_{xy}(P,Q)\\ U_{yx}(P,Q) & U_{yy}(P,Q)\end{bmatrix}N_c(\xi)J(\xi)d\xi\right)\begin{bmatrix}t_x(Q)\\ t_y(Q)\end{bmatrix}$$

(۶)

كه در آن M تعداد كل المانهاست.

$N_c(\xi)(c=1,2,3)$ توابع شكل و c_{ij} براي مرزهاي

هموار با رابطه زير تعريف می شود:

$$c_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij} \quad ; i,j = x,y$$

(۷)

در مرزهاي ناهموار نظير گوشه هاي تيز، اصلاحاتي در مدلسازي و تقريب مرزها صورت مي گيرد [۱].

اگر انتگرالهای رابطه (۶) را با ماتريسهاي [A] و [B] جايگزين نمائيم به رابطه زير مي رسيم:

$$\begin{bmatrix} c_{xx}(P) & c_{xy}(P) \\ c_{yx}(P) & c_{yy}(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x(P) \\ u_y(P) \end{Bmatrix} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{c=1}^{3} \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(Q) \\ u_y(Q) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{c=1}^{3} \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{bmatrix}$$

(۸)

که اين معادله مي تواند به صورت مجموعه معادلات جبري خطي به شكل زير نوشته شود:

$$[A]\cdot[u] = [B]\cdot[t]$$

(۹)

لازم به ذكر است كه سه حالت براي وضعيت نقاط P وQ متصور است:

الف- P و Q در المانهاي جداگانه باشند:

در اين حالت از روش انتگرال گيري گاوس استفاده مي شود.

ب-P وQ دريک المان باشند ولي $P \neq Q$:

در اين حالت كرنل هاي U_{ij} و T_{ij} منفرداند ولي حاصلضرب آنها در تابع شكل منفرد نيست. بنابراين مجدداً از روش انگرال گيري گاوس استاندارد استفاده مي شود.

ج- P و Q دريک المان باشند و $P = Q$:

در اين حالت از انتگرال گيري لگاريتمي گاوس براي ارزيابي عناصر قطری ماتريس B استفاده مي شود. براي عناصر قطري ماتريس A در محيطهاي محدود از تكنيک حركت جسم صلب استفاده مي شود.

با استفاده ازاين تكنيك درايه قطري ماتريس A برابر با قرينه مجموع درايه هاي سطر مربوطه به دست مي آيد. در محيطهاي نامحدود اين تكنيك قابل اعمال نيست و بايد انتگرال هاي منفرد حاصله در مفهوم كوشي (CPV) محاسبه شوند.

اعمال شرايط مرزي

با اعمال تغييرمكان و تنشهاي پيش فرض در معادله (۸) بايد آرايش مجددي در معادلات خطي صورت گيرد تا معلومات مسأله در طرف راست معادله و مجهولات در سمت چپ معادله قرار گيرند. از آنجا كه مرتبه درايه هاي ماتريس A و B باهم متفاوت است، براي اجتناب از خطاهاي عددي حل دستگاه معادلات، از مقياس كردن عناصر ماتريس B براي هم مرتبه كردن با درايه هاي ماتريس A استفاده مي شود. بطوريكه معادله (۹) پيش از آرايش مجدد به شكل معادله زير در مي آيد:

$$[A]\cdot[u] = (s[B])\cdot(\frac{1}{s}[t])$$

(۱۰)

كه s از رابطه (۱۱) بدست مي آيد:

$$s = \frac{E}{L_{max}}$$

(۱۱)

دراين رابطه E مدول الاستيسيته و L_{max} حداكثر فاصله دو گره است. پس از اعمال شرايط مرزي به معادله زير مي رسيم:

$$[A^*]\cdot[x] = [B^*]\cdot[y] = [c]$$

(۱۲)

حل دستگاه معادلات جبري

در روش استاندارد اجزاي مرزي از روش مستقيم حذف گاوس براي حل معادله (۱۲) استفاده مي شود. در سيستم هاي بزرگ اين روش بسيار وقتگير است، لذا معادله مذكور در ادامه، به فضاي موجک انتقال داده مي شود تا با تُنُک كردن ماتريس $[A^*]$ و استفاده از روش حل عددی GMRES زمان حل دستگاه معادلات به ميزان قابل توجهي كاهش يابد.

محاسبه تنشهاي مرزي

در اين مقاله با استفاده از مشتق گيري توابع شكل، تنشها مستقيماً از تغييرمكان هاي محاسبه شده بدست مي آيند.

محاسبه متغير هاي دامنه

پس از حل معادلات، تمامي تغييرمكان ها و تنشها در نقاط مرزي بدست مي آيند. براي تعيين تغييرمكان و تنش در نقاط دامنه از معادلات زير استفاده مي شود:

$$u_i(p)+\int_\Gamma T_{ij}(p,Q)\cdot u_j(Q)d\Gamma(Q)=\int_\Gamma U_{ij}(p,Q)\cdot t_j(Q)d\Gamma(Q)$$

(١٣)

$$\sigma_{ij}(p)+\int_\Gamma S_{kij}(p,Q)\cdot u_k(Q)d\Gamma(Q)=\int_\Gamma D_{kij}(p,Q)\cdot t_k(Q)d\Gamma(Q)$$

(١٤)

كه S_{kij} و D_{kij} تانسورهاي مرتبه سوم هستند در كه مرجع [١٢] ارائه شده اند.

مروري بر تئوري موجک

تبديل موجک ابزاري است كه داده ها، توابع و عملگرها را به مقياس هاي مختلف فركانسي تفكيک مي كند و سپس هر مؤلفه را با دقتی متناسب با مقياس آن مؤلفه مورد مطالعه قرار مي دهد. از آنجا كه تبديل موجک بسيار شبيه تبديل فوريه عمل مي كند، آن را با تبديل فوريه و تبديل فوريه پنجره اي مقايسه مي كنيم. تبديل فوريه تابع يا عملگر را به محتواي فركانسي اش تفكيک مي كند ولي تمامي اطلاعات مربوط به محل فركانس ها را از دست مي دهد. براي غلبه بر اين مشكل تبديل فوريه پنجره اي ابداع شده است. در اين روش نخست محل يابي در زمان توسط ايجاد پنجره اي بر روي داده ها صورت مي گيرد و سپس تبديل فوريه گرفته مي شود. ايراد اين روش اين است كه همواره ابعاد قطعات داده هاي مورد مطالعه، يكسان و مستقل از محتواي فركانسي است. تبديل موجک عرض قطعه زماني را متناسب با محتواي فركانسي اش تنظيم مي كند. انتگرال هائي كه تبديل فوريه، تبديل فوريه پنجره اي و تبديل موجک را تعريف مي كنند به قرار زير مي باشند:

$$(T^{FT})(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt$$

(١٥)

$$(T^{WFT})(\omega,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot g(t-\tau)\cdot e^{-i\omega\tau}dt$$

(١٦)

$$(T^{WT})(a,b)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot \Psi(\frac{t-b}{a})\cdot dt$$

(١٧)

در روابط فوق T^{FT}، T^{WFT} و T^{WT} بترتيب تبديل فوريه، فوريه پنجره اي و موجک تابع $f(t)$ مي باشند. $g(t-\tau)$ تابع پنجره و $\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ موجک با مقياس a و جابجائی b را تعريف مي كند. بر پايه اين تعاريف مشاهده مي شود كه توابع پايه براي تبديل فوريه توابع نمايي مختلط مي باشند، در حاليكه براي تبديل موجک هر تابعي كه شرايط موجک ها را ارضاء نمايد مي تواند تابع پايه باشد. موجكهاي مختلف ويژگي هاي متفاوتي دارند كه باعث مي شود هر كدام كاربرد خاص داشته باشند. به منظور بهره گرفتن از ويژگي فشرده كردن ماتريس ها در روش اجزاي مرزي از موجكهائي با مشخصات فشرده سازي قوي استفاده مي شود. يكي از موجكها برای اين منظور موجكهای Daubechies مي باشند كه داراي خاصيت تعامد، تعداد لنگرهاي صفر زياد و دامنه ضرايب غير صفر محدود می باشند [١٣]. در اين مقاله از اين موجكها براي فشرده كردن ماتريس هاي ناشي از روش اجزاي مرزي استفاده مي كنيم. نحوه اعمال تبديل موجک سريع به ماتريس هاي منتجه از روش اجزاي مرزي در بخش بعدي تشريح مي گردد.

استفاده از موجكها براي فشرده كردن ماتريس روش اجزاي مرزي

دو استراتژي عمده براي اعمال موجكها به روش اجزاي مرزي وجود دارد. استراتژي اول متغيرها را به سري موجكها بسط مي دهد. با وجود اينكه اين روش زمان حل را تا مرتبه O(N.LOG(N))كاهش مي دهد ([٣])،و به محاسبه تمامي درايه هاي ماتريسها نياز ندارد، به فرمولاسيوني كاملاً جديد و به تبع آن الگوريتم و برنامه كامپيوتري جديدي نياز دارد. استراتژي دوم كه موضوع اين مقاله است، فشرده سازي توسط موجكها را پيش از شروع حل سيستم نهائي اعمال مي كند. عمده ترين مزيت اين روش حداقل كردن تغييرات لازم در برنامه كامپيوتري روش استاندارد اجزاي مرزي است. اين روش ماتريس هاي پر و نامتقارن روش اجزاي مرزي استاندارد را گرفته و ماتريس هاي تُنُک مربوطه را توليد مي كند.

معادله (١٨) كه همان معادله (١) است، توسط روش اجزاي مرزي استاندارد براي مسأله الاستيسيته دوبعدي بدست آمده است:

$$[A^*]\cdot[x]=[c]$$

(١٨)

که درآن A^* ماتريس شامل درايه هاي ماتريس هاي A و B (مجهولات مسأله) مي باشد.
[x] شامل بردارمتغيرهاي مجهول و [c] شامل بردار عناصرحاصل از ضرب متغيرهاي معلوم در درايه هاي ماتريس هاي مربوطه مي باشد. از آنجا که از معادلات مقياس شده استفاده کرده ايم (معادله (١٠))، درايه هاي ماتريس A^* حدوداً هم مرتبه هستند.
الگوريتم تبديل موجک سريع(FWT)[1] بردارa^w را براي هر بردارa توليد مي کند:

$$a^w = W.a \qquad (١٩)$$

که در آن Wماتريس مربعي است که درايه هاي آن بستگي به نوع موجک انتخاب شده دارد. از آنجا که موجک متعامد Daubechies را مورد استفاده قرار داده ايم، W چنان انتخاب مي شود که:

$$W^T \cdot W = I \qquad (٢٠)$$

با پيش ضرب کردن رابطه (١٨) در ماتريسW خواهيم داشت:

$$[W]\cdot[A^*]([W^T]\cdot[W])[x]=[W]\cdot[c] \qquad (٢١)$$

که مي تواند به شکل زير بيان شود:

$$([W]\cdot[A^*][W^T])\cdot([W][x])=[W]\cdot[c] \qquad (٢٢)$$

ماتريس هاي انتقال يافته جديد به شکل زير خواهند بود:

$$[\bar{A}]=[W]\cdot[A^*]\cdot[W^T] \qquad (٢٣)$$

$$[\bar{x}]=[W]\cdot[x] \qquad (٢٤)$$

$$[\bar{c}]=[W]\cdot[c] \qquad (٢٥)$$

با جايگذاري روابط (٢٣) تا (٢٥) در رابطه (٢٢) خواهيم داشت:

$$[\bar{A}]\cdot[\bar{x}]=[\bar{c}] \qquad (٢٦)$$

از آنجا که ماتريس انتقال يافته $[\bar{A}]$ فقط تعداد محدودي درايه بزرگ دارد، مي توانيم درايه هائي را که از پارامتر آستانه اي کوچکتر هستند به صفر تبديل کنيم. اين نوع فيلترينگ را آستانه سازي نوع سخت (مرگ و زندگي) مي نامند [١۴].
$\left[\tilde{\bar{A}}\right]$ ماتريس تُنُک شده ماتريس $[\bar{A}]$ است که با آستانه سازی به دست آمده است. اين ماتريس شکلي شبيه به انگشتان دست دارد. يک نمونه از اين ماتريس ها در شکل شماره (١) ارائه شده است.
از آنجا که حل عددي معادله (٢۶) با دشواري هائي توأم است، ماتريس متعامد جابجائيP را بصورت زير تعريف مي کنيم:

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & ;\ i\le\frac{n}{2}\ ,\ j=2i\text{-}1\\ 0 & ;\ i\le\frac{n}{2}\ ,\ j\ne 2i\text{-}1\\ 1 & ;\ i>\frac{n}{2}\ ,\ j=2i\text{-}n\\ 0 & ;\ i>\frac{n}{2}\ ,\ j\ne 2i\text{-}n\end{cases} \qquad (٢٧)$$

در رابطه فوق p_{ij} درايه هاي ماتريسP وn تعداد درجات آزادي مسأله مي باشد. اگر رابطه (٢۴) را در ماتريس متعامد P پيش ضرب کنيم، خواهيم داشت:

$$[\mathrm{P}]\cdot[\mathrm{W}]\cdot[\mathrm{A}^*](\left[\mathrm{W}^{\mathrm{T}}\right]\cdot\left[\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\right]\cdot[\mathrm{P}]\cdot[\mathrm{W}])\,[\mathrm{x}] =[P]\cdot[W]\cdot[c] \qquad (٢٨)$$

و يا:

$$([P]\cdot[W]\cdot[A^*]\cdot[W^T]\cdot[P^T])\cdot([P]\cdot[W]\cdot[x]) =[P]\cdot[W]\cdot[c] \qquad (٢٩)$$

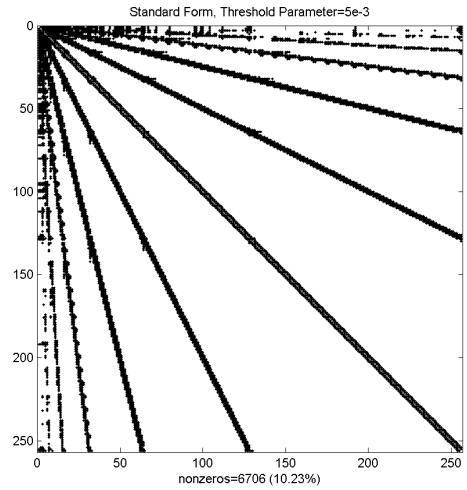
و يا بصورت ديگر:

$$\left[\tilde{\bar{A}}\right]\cdot\left[\tilde{\bar{x}}\right]=\left[\tilde{\bar{c}}\right] \qquad (٣٠)$$

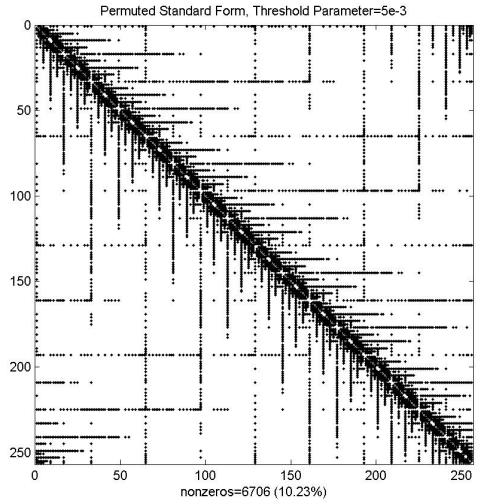
پس از آستانه سازي به ماتريس $\left[\tilde{\bar{A}}\right]$ مي رسيم. اين ماتريس برخلاف ماتريس$\left[\tilde{\bar{A}}\right]$ تقريباً نواري است.
ماتريس معادل شکل (١) در شکل (٢) نشان داده شده است. با افزايش مرتبه موجکها، تعداد عناصر غيرصفر و عرض نوارکاهش مي يابد. حل عددي دستگاه معادلات (٣٠) بسيار راحتتر و کم هزينه تر از حل دستگاه معادلات (٢۶) است.

حافظه مورد نياز براي ذخيره كردن ماتريس $\left[\tilde{\tilde{A}}\right]$ در مقايسه با $\left[\bar{\bar{A}}\right]$ بسيار كمتر است. تعداد عناصر غير صفر ماتريس $\left[\tilde{\tilde{A}}\right]$ بستگي به پارامتر آستانه دارد.

هر چه اين پارامتر بزرگتر باشد نرخ فشرده سازي بيشتر و دقت جوابها كمتر خواهد بود. در اين مقاله براي تعيين پارامتر آستانه بهينه، پارامترهاي آستانه مختلف با خطاي عددي حل مسأله سنجيده مي شود. بهترين پارامتر آستانه زماني بدست مي آيد كه خطاي حل بدليل آستانه سازي با خطاي مجزاسازي المانها برابر باشد [١۴].



شكل ١: فرم انگشت مانند ماتريس در فضاى موجک.



شكل ٢ : فرم نوارى ماتريس در فضاى موجک جابجاشده.

براي ذخيره كردن ماتريس $\left[\tilde{\tilde{A}}\right]$ نياز به دانستن محل و مقدار درايه هاي غيرصفر داريم. روش مختصات فشرده $(CC)^2$ براي ذخيره كردن محل و مقدار درايه هاى غيرصفر ماتريس $\left[\tilde{\tilde{A}}\right]$ استفاده شده است.

حل كننده تكراريGMRES ([١۵]) براى حل سيستم معادلات خطي بكار گرفته شده است. اين حل كننده براي هر تكرار نياز به تلاش محاسباتي از مرتبه O(N.Log(N)) دارد. پس از حل سيستم معادلات بردارهاي $\left[\bar{\bar{x}}\right]$ معلوم خواهند شد. از تبديل معكوس زير براي بدست آوردن متغيرهاي فيزيكي مسأله در فضاي واقعي استفاده مي شود.

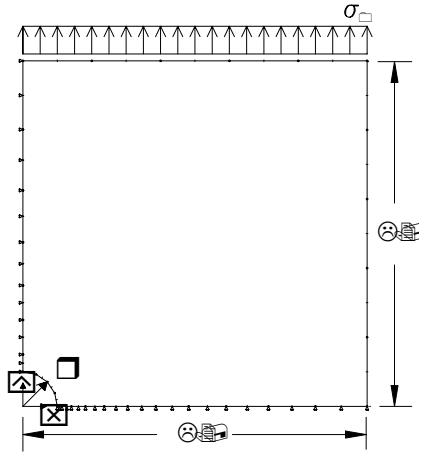
$$[x]=\left[P^T\right]\left[W^T\right]\cdot\left[\bar{\bar{x}}\right] \qquad (٣١)$$

نتايج عددي

در اين بخش نتايج مثالهاي عددي كه به منظور تعيين صحت و اعتبار روش ارائه شده براي حل مسائل دوبعدي الاستيسيته گنجانده شده است. مثالهايي كه مطرح مي شوند مربوط به مسائل زير هستند:

مثال١- ورق با سوراخ گرد تحت كشش

معروفترين مثال براي كنترل صحت برنامه هاي حل عددي در اين مقاله نيز به خدمت گرفته مي شود.
ورق مربعي بطول L با سوراخ گرد به شعاع r در وسط تحت كشش به تنش σ_0 قرار دارد. (شكل (٣))

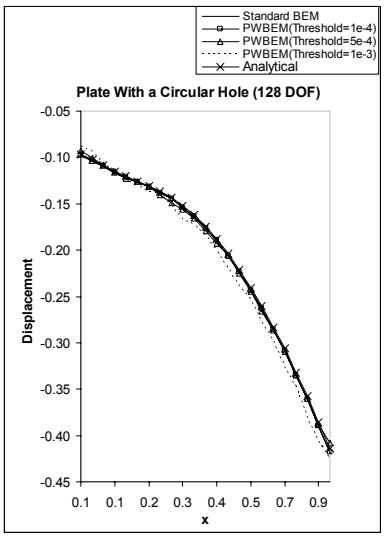


شكل ٣ : مثال ١ - ورق مربعى با سوراخ گرد تحت كشش.

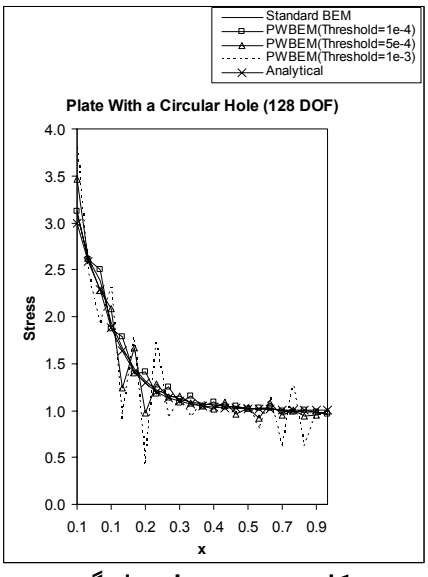
ورق به اندازه كافي نازک در نظر گرفته مي شود تا شرايط تنش مسطح حاكم باشد. حل تحليلي تنش محوري حول سوراخ در ورق به طول نامحدود از رابطه زير بدست مي آيد [١٢]:

$$\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_0}=0.5\left[2+(\frac{r}{x})^2+3(\frac{r}{x})^4\right] \qquad (٣٠)$$

در رابطه اخير σ_{yy} و σ_0 بترتيب تنش قائم در نقطه به فاصله x از مركز سوراخ و تنش وارده به لبه ورق می باشند. مثال ۱ با تعداد درجات آزادي ۱۲۸، ۲۵۶، ۵۱۲ و۱۰۲۴ حل شده است تا خطاي مجزاسازي تعيين شود. نتيجه حل مسأله فوق براي تغييرمكان و تنش با روش استاندارد اجزاي مرزي و روش ارائه شده در اين مقاله با ۱۲۸ درجه آزادي در حالت $L=2$ ،$r=0.1$ و $\sigma_0=1.0$ به ترتيب در شكلهاي (۴) و (۵) ارائه شده است.



شكل ۴: تغييرمكان فائم(u_y) ورق با سوراخ گرد.



شكل ۵ : تنش ورق با سوراخ گرد.

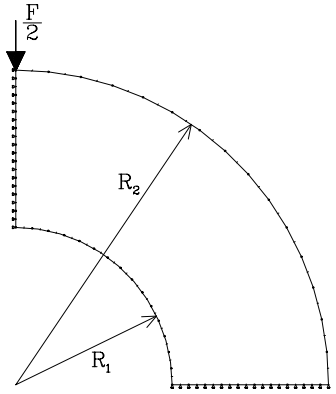
مشاهده مي شود كه تغييرمكان حتي با پارامتر آستانه بزرگ نيز خطاي ناچيزي دارد ولي تنش ها به پارامتر آستانه حساس مي باشند. برای كاهش خطای تنشها بايد از پارامتر آستانه كوچكتر استفاده كرد.

همانطور كه حل تحليلی براي ورق بطول بينهايت پيش بيني مي كند، مقادير تنش در نقاط حول سوراخ، حدود سه برابر تنش متوسط ورق است.

جزئيات بيشتر تحليل نتايج مثالها در مرجع [۲۱] ارائه شده است. جدول (۱) نُرم دوم خطا را براي تغييرمكان و تنش های مثال ۱ با پارامتر آستانه های مختلف ارائه مي كند.

مثال۲- حلقه تحت بار متمركز

تغييرشكل حلقه به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجي R_2 تحت اثر دو بار متمركز خلاف جهت هم به شدت F مورد بررسي قرار مي گيرد (شكل (۶)).

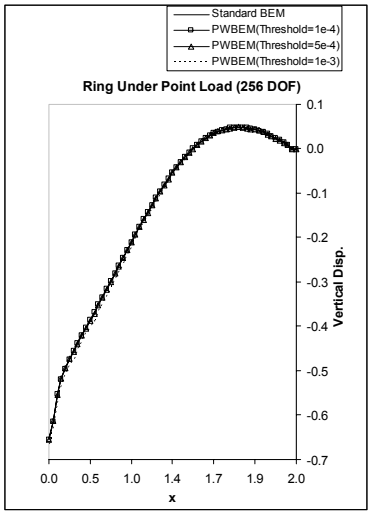


شكل ۶ : مثال ۲ - حلقه تحت بار متمركز.

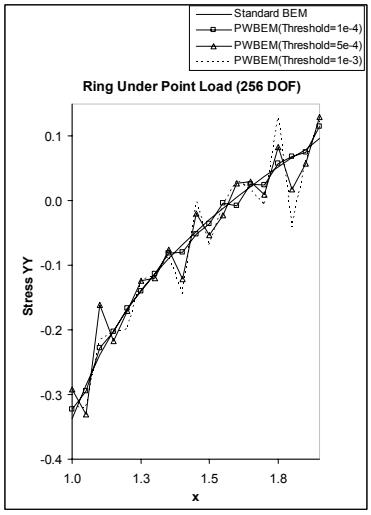
حلقه به اندازه كافي ضخيم در نظر گرفته مي شود تا شرايط كرنش مسطح حاكم باشد. شكل (۷) و (۸) بترتيب تغييرشكل و تنش را در نقاط مختلف حلقه نشان مي دهد. نظير مثال۱ اين مثال نيز با تعداد درجات آزادي ۲۵۶، ۵۱۲ و ۱۰۲۴تحليل شده و نتايج ارائه شده فقط براي حالت ۲۵۶ درجه آزادي مي باشد. جدول (۲) نُرم خطا را براي مثال ۲ با تعداد درجات آزادي ۲۵۶ و پارامترآستانه مختلف نشان مي دهد. مشابه مثال ۱ تغييرمكان ها با پارامتر آستانه بزرگ نظير 10^{-3} كمتر از ۵ درصد خطا دارند ولي تنش ها احتياج به پارامتر آستانه اي كوچكتر از $5*10^{-4}$ دارند.

مثال۳- ورق وصله شاهتير پل

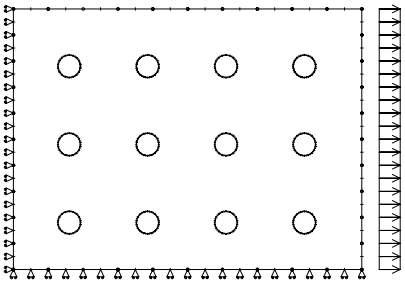
مثال ۳ شامل حل مسأله عملي ورق وصله شاهتيرهاي پل فلزي است. اين ورق به ابعاد ۶۰ در ۸۰ سانتيمتر داراي ۴۸ سوراخ به قطر ۲۶ ميليمتر است كه تحت تنش افقي قرار دارد. بدليل تقارن در دو جهت يک چهارم ورق تحليل شده است (شكل (۹)).



شكل ٧: تغييرمكان فائم حلقه تحت بار متمركز.



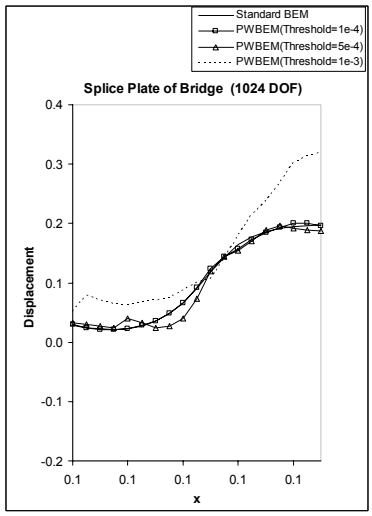
شكل ٨ : تنش حلقه تحت بار متمركز.



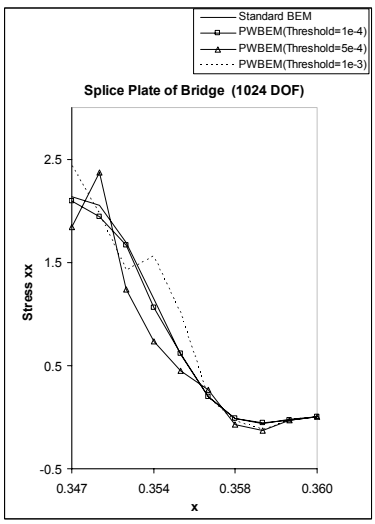
شكل ٩ : مثال ٣ - ورق وصله شاهتير پل فلزى.

اين مثـال بـا تعـداد درجـات آزادي ١٠٢۴ و ٢٠۴٨ مـورد تحليل قرار گرفته است. حل روش استاندارد اجزاي مـرزي محک مقايسه نتايج روش ارائه شـده اسـت. شـكل (١٠) و (١١) نتايج حل تغييرمكان و تـنش را در نزديكـي سـوراخ هاي رديف آخر براي حالـت تعـداد درجـات آزادي ١٠٢۴ نشان مي دهد. همانگونه كه ديده مي شـود، حتـي بـراي پارامتر آستانه 10^{-3} نتايج تغييرمكان بسيار مناسب اسـت. بطوريكه حداكثر خطا كمتر از ٣ درصد است. ولى تنش ها به پارامتر آستانه $1*10^{-4}$ نياز دارند. جـدول (٣) نَـرم دوم خطاي را براي مثال٣ و در حالات مختلف ارائه مي كند.

از مقايسه نتايج بدست مي آيد كه تغييرمكانها حتي براي پارامتر آستانه 10^{-4} خطايي كمتر از ۴ درصد دارنـد. ولـى براي تنش ها با پارامتر آستانه $5*10^{-4}$ خطاهـاي حـداكثر براي مثالهاي ١ تا ٣ بترتيب ٧/٢، ١/٣ و١٩/٣ درصد است. با پارامتر آستانه 10^{-4} حداكثر خطـاي تنشـها كمتـر از ۴ درصد مي باشد. همانگونه كه در شكلهاى (۵)، (٨) و (١١) ديده مى شود، به ازاى پارامتر آستانه بزرگـي نظيـر 10^{-3}، نتـايج تنشـها داراي نوسـانات نسـبتاً زيـادى اسـت. بـراي كاستن از نوسـانات در نتـايج تـنش، بايـد مقـدار پـارامتر آستانه را كاهش داد. بهتـرين پـارامتر آسـتانه بـا ملحـوظ نمودن دقت مناسب جوابها براي تنش ها، 10^{-4} مي باشد.



شكل ١٠: تغييرمكان افقى ورق وصله شاهتير فلزي.



شكل ١١: تنش ورق وصله شاهتير فلزي.

جدول (۴) تعداد المان هاي غيرصفر و نرخ فشرده سازي را براي پارامتر آستانه هاي مختلف در مثال هاي ۱ تا ۳ ارائه مي كند.

جدول (۵) زمان حل كل مسأله و زمان مورد نياز براي حل سيستم معادلات خطي را در روش اجزاي مرزي استاندارد و روش ارائه شده براي مثالهاي مختلف نشان مي دهد. همانطور كه ديده مي شود، براي مسائل با درجه آزادي كم زمان افزايش يافته است. دليل اين امر، محاسبات اضافی لازم در روش پيشنهادی نسبت به روش استاندارد اجزای مرزی و سرعت بالای الگوريتم حذف گاوس برای حل سيستم معادلات خطی با تعداد معادلات كم می باشد. ولي در مسائل با مقياس بزرگ روش استاندارد اجزای مرزی نياز به زمان بيشتری برای حل دستگاه معادلات جبری دارد و روش ارائه شده، كاهش قابل ملاحظه اي را در زمان حل موجب مي شود، بدون آنكه خطاي محسوسي در جوابها ايجاد نمايد.

نتيجه گيري

در اين مقاله نتايج كاربرد موجكها در بهسازي روش اجزاي مرزي در حل مسائل الاستيسيته نشان داده شده است. تكنيک فشرده سازي با موجكها براي پوشش دادن ضعف عمده روش اجزاي مرزي (ماتريس هاي پر و نامتقارن و زمان حل زياد) با موفقيت استفاده شده است. در روش ارائه شده، ماتريسهای پر روش استاندارد اجزای مرزی به ماتريس های شبه نواری تُنُک، شبيه ماتريسهای سختي روش اجزای محدود، تبديل مي شوند. انتقال متغيرها از فضاي واقعي به فضاي موجک احتياج به زمان بسيار كمتري نسبت به زمان صرفه جويی شده در حل سيستم معادلات دارد.

حل سيستم معادلات خطي در فضاي تبديل يافته به كمک الگوريتم حل تكراري GMRES صورت گرفته است. با توجه به فرم تُنُک و شبه نواری ماتريسهای جديد، حل دستگاه معادلات جبري با حل كننده تكراري صرفه جويي قابل توجهي نسبت به زمان حل روش مستقيم حذف گاوس كه در روش استاندارد اجزای مرزی بكار گرفته مي شود، ايجاد مي كند.

با روش ارائه شده افزايش قابل ملاحظه اي در سرعت حل بدست آمده است، بدون اينكه به دقت حل مسأله لطمه وارد شود. نرخ فشرده سازي با پارامتر آستانه هاي مختلف آزمايش شده و در نهايت پارامتر آستانه مناسب براي مسائل الاستيسيته، با ملاحظات دقت كافی نتايج براي تنشها و تغييرمكانها، معرفي شده است.

از آنجا كه در اين مقاله تكنيک موجک به شكل يک جعبه سياه در برنامه روش اجزاي مرزي استاندارد اعمال شده است، نتايج اين كار انگيزه بسيار قوي براي استفاده از روش تركيبي موجک – اجزاي مرزي براي حل مسائل عملي مهندسي بخصوص در مسائل الاستو پلاستيسيته و ديناميكي كه نياز به زمان حل زيادي دارند، ايجاد مي كند.

جدول ۱: نُرم خطاي L^2تغييرمكان و تنش های مثال ۱ با پارامتر آستانه های مختلف.

h	DISP.	STR.(XX)	STR.(YY)	STR.(XY)	STR.(ZZ)	VON-MISES
1.E-04	2.45E-04	1.51E-02	3.43E-04	1.06E-02	0.00E+00	2.23E-03
5.E-04	4.52E-03	7.22E-02	4.52E-03	3.18E-02	0.00E+00	8.67E-03
1.E-03	1.68E-02	1.89E-01	1.49E-02	9.11E-02	0.00E+00	2.24E-02

جدول ۲ : نُرم خطاي L^2تغييرمكان و تنش های مثال ۲ با پارامتر آستانه های مختلف.

h	DISP.	STR.(XX)	STR.(YY)	STR.(XY)	STR.(ZZ)	VON-MISES
1.E-04	2.16E-03	2.92E-03	2.11E-03	2.70E-03	2.42E-03	2.18E-03
5.E-04	5.76E-03	1.29E-02	7.01E-03	9.44E-03	7.46E-03	7.48E-03
1.E-03	3.91E-02	4.94E-02	2.72E-02	3.75E-02	3.62E-02	2.72E-02

جدول ۳: نُرم خطاي L^2تغييرمكان و تنش های مثال ۳ با پارامتر آستانه های مختلف.

h	DISP.	STR.(XX)	STR.(YY)	STR.(XY)	STR.(ZZ)	VON-MISES
1.E-04	5.90E-03	3.97E-02	1.31E-01	4.69E-02	0.00E+00	5.94E-02
5.E-04	9.81E-02	1.93E-01	6.63E-01	3.49E-01	0.00E+00	3.21E-01
1.E-03	2.68E-01	2.12E-01	7.12E-01	3.98E-01	0.00E+00	3.33E-01

جدول ۴ : تعداد المان های غیرصفر و نرخ فشرده سازی برای پارامتر آستانه های مختلف در مثالهای ۱ تا ۳.

Problem	DOF	NNZ			Compression Ratio		
		th=0.0001	th=0.0005	th=0.001	th=0.0001	th=0.0005	th=0.001
Example 1	128	13,200	10,395	9,111	1.24	1.58	1.80
	256	40,976	31,187	25,996	1.60	2.10	2.52
	512	128,723	90,581	70,152	2.04	2.89	3.74
	1024	413,309	253,594	172,154	2.54	4.13	6.09
Example 2	256	42,391	33,160	28,298	1.54	1.98	2.32
	512	134,037	100,126	76,704	1.96	2.62	3.42
	1024	457,527	300,799	180,426	2.29	3.48	5.81
Example 3	1024	631,876	426,476	320,185	1.66	2.46	3.27
	2048	1,903,013	1,120,267	772,211	2.20	3.74	5.43

جدول۵ : مقایسه زمان حل سیستم معادلات خطی و زمان حل کل (ثانیه) روش المان مرزی استاندارد و روش پیشنهادی.

Problem	DOF	Permuted Wavelet BEM		Standard BEM	
		Total Time	T_1	Total Time	T_1
Example 1	128	0.42	0.19	0.28	0.22
	256	1.93	1.31	1.83	1.61
	512	12.57	9.03	13.34	12.80
	1024	89.21	68.17	103.67	101.80
Example 2	256	1.97	1.34	1.88	1.66
	512	12.41	8.88	13.25	12.69
	1024	86.99	64.96	101.31	99.31
Example 3	1024	88.01	65.83	101.80	99.98
	2048	715.94	574.37	876.63	869.64

مراجع

1 - Hackbush, W. and Nowak, Z. P. (1989). *On the Fast Matrix Multiplication in the Boundary Element Method by Panel Clustering, Numer. Math.,* Vol. 54, PP. 463-491.

2 - Greengard, L. and Rokhlin, V. (1987). "A fast algorithm for particle simulations." *J. comp. phy.,* Vol. 73, PP. 325-348.

3 - Beylkin, G., Coifman, R. and Rokhlin, V. (1991). "Fast wavelet transforms and numerical algorithms I." *comm. Pure. Appl. Math.,* Vol. 44, PP. 141-183.

4 - Dahmen, W., Klemmann, B., Prossdorf, S. and Schneider, R. (1996). *Multiscale methods for the solution of the Helmholtz and Laplace equations, in Boundary Element Topics*, Wlfgang L.Wendland ed., Springer-Verlag.

5 - Lage, C. and Schwab, C. (1990). "Wavelet Galerkin algorithms for boundary integral equations." *SIAM J. Sci, Comp,* Vol. 20, PP. 195-222.

6 - Rokhlin, V. (1983). "Rapid solution of integral equations of classical potential theory." *J. Comp. Phys,* Vol. 60, PP. 187-207.

7 - Bucher, H. F., Wrobel, L. C., Mansur, W. J. and Magulta, C. (2004). "On the block wavelet transform applied to the boundary element method." *Engng. Anal. Bound. Elem,* Vol.28, PP. 571-581.

8 - Bucher, H. F., Wrobel, L. C., Mansur, W. J. and Magulta, C. (2003). "Fast solution of problems with multiple load cases by using wavelet compressed boundary element matrices." *Commun. Numer. Math. Engng.,* Vol.

19, PP. 387-399.

9 - Gonzalez, P., Cabalaeir, J. C. and Pena, T. F. (2002). "Parallel iterative solvers involving fast wavelet transforms for the solution of BEM systems." *Advanced in Engineering Softwares,* Vol. 33, PP. 417-426.

10 - Bucher, H. F. and Wrobel, L. C. (2002). "A novel Approach to applying fast wavelet transforms in the boundary element method." *Electronic Journal of Boundary Elements*, Vol. 2, PP. 187-195.

11 - Chen, K. (1999). "Discrete Wavelet Transforms accelerated sparse preconditioners for dense boundary element systems." *Electronic Transaction Numerical Analysis,* Vol. 8, PP. 138-153.

12 - Becker, A. A. (1991). *The Boundary Element Method in Engineering*, McGraw-Hill, London.

13 - Daubecies, I. (1992). *Ten Lectures on wavelets*, SIAM, Vol. 61.

14 - Koro, K. and Abe, K. (2003). "A practical determination strategy of optimal threshold parameter for matrix compression in wavelet BEM." *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 57, PP.169-191.

15 - Saad, Y. and Schultz, M. H. (1986). "GMRES: a generalized minimal residual method for solving nonsymmetric linear systems*." SIAM.J. Sci. Statist. Comput.*, Vol. 7, PP. 856-869.

16 - Williams, J. R. and Amaratunga, K. (1994). "Introduction to the wavelets in the engineering." *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 37, PP.2365-2388.

17 - Amaratunga, K. (2000). "A wavelet based approach for compressing kernel data in large-scale simulations for 3D integral problems." *Computing in Science and Engineering*, Vol. 1, PP. 34-45.

18 - Barra, LPS, Coutinho, ALGA, Mansur, W. J. and Telles, JCR. (1994). "Iterative solution of BEM equations by GMRES." *Computers and Structures,* Vol. 111, PP. 335-355.

19 - Mansur, W. J., Araujo, F. C. and Malgnini, JEB. (1992). "Solution of BEM systems of equations via iterative techniques." *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 33, PP. 1823-1841.

20 - Bond, D. M. and Vavasis, S. A. (1994). "Fast wavelet transforms for matrices arising from boundary element methods." *Computer science research report, TR-174*, Cornell University.

21 - Ebrahimnejad, L. (2007). *Applying wavelets to improve the boundary element method,* Ph.D Dissertation, School of Civil Engineering, University of Tehran.

واژه هاي انگليسي به ترتيب استفاده در متن

1 - Fast Wavelet Transform
2 - Compressed Coordinate