روش توابع پتانسيل براي محيط همسان جانبي با تقارن محوري

مرتضي اسكندري قادي*

استاديار گروه علوم پايه مهندسی - پرديس دانشكده های فنی - دانشگاه تهران

(تاريخ دريافت ۸۵/۱۰/۵ ، تاريخ دريافت روايت اصلاح شده ۸۶/۴/۲۰ ، تاريخ تصويب ۸۶/۶/۲۴)

چكيده

در مرجع [۲]، جواب كامل مسائل الاستو ديناميک در محيطهاي همسان جانبي بر حسب دو تابع پتانسيل معرفي شده است. كامل بودن جواب، با استفاده از معادلات تكراري موج در محيطهاي همسان جانبي اثبات شده است. همچنين نشان داده شده است كه در حالت تقارن محوري دو تابع پتانسيل به يک تابع تنها تبديل مي شوند. محدوديت تابع پتانسيل فوق الذكر در حالت تقارن محوري بدون پيچش آن است كه نيروهاي حجمي در اين مسائل حداكثر مي توانند به صورت بردار $(0,0,b_z(r,z,t))$ نوشته شود. در اين مقاله محدوديت فوق برداشته شده و نيروهاي حجمي به شكل كلي خود يعني $(b_r(r,z,t),0,b_z(r,z,t))$ براي حالت متقارن محوري بدون پيچش قابل اعمال مي باشد. جواب مسائل انتشار امواج ارائه شده در اين مقاله براي حالت استاتيكي ساده شده و نيز براي مسائل انتشار امواج ومسائل استاتيكي در محيطهاي همسان ساده تر مي گردد. همچنين نشان داده مي شود كه جواب ارائه شده در اينجا براي مسائل استاتيكي در محيطهاي همسان به جواب Simmonds [۱۴]، كه خود توسعه يافته جواب Love [۹]مي باشد، همگرا مي گردد.

واژه هاي كليدي: الاستوديناميك – الاستواستاتيك - همسان جانبي - متقارن محوري - توابع پتانسيل

مقدمه

مدتها است كه تئوري ارتجاعي براي مواد ناهمسان[۱] مورد توجه محققان قرار گرفته است. يكي از مواد ناهمسان كه كاربرد وسيعي در مهندسي دارد، مواد همسان جانبي[۲] مي‌باشد. در اين مقاله فقط اين نوع مواد مورد توجه قرار مي گيرند. از آنجايي كه حل تحليلي مسائل تئوري ارتجاعي در حالت ديناميكي و استاتيكي با حل دستگاه معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزئي همراه است، اين مقوله كمتر مورد توجه قرار گرفته است. حال اگر خصوصيات مواد به جاي همسان، نا همسان باشد، مشكلات مربوط به حل تحليلي دو چندان مي گردد. حل تحليلي مسائل استاتيكي مربوط به محيطهاي همسان جانبي به تحقيقات ميشل[۱۰]، لخنيتسكي، اليوت[۱]، هو[۶]، نواكي[۱۱]، ايوبنكس و استرنبرگ[۴]، لخنيتسكي[۸] و ونگ و ونگ[۲۰] بر مي گردد. متأسفانه تحقيقات براي حل تحليلي مسائل ديناميكي در محيطهاي همسان جانبي بسيار كمتر مي باشد. لخنيتسكي درسال (۱۹۴۰) تغييرمكان‌هاي استاتيكي يک محيط همسان جانبي با تقارن محوري بدون پيچش را بر حسب يک تابع پتانسيل بيان كرد و نشان داد كه معادله حاكم بر تابع پتانسيل فوق الذكر يک معادله ديفرانسيل با مشتقات جزيي از مرتبه ۴ مي‌باشد. نواكي[۱۱]در سال (۱۹۵۴) همان جواب لخنيتسكي را مجدداً به دست آورد.

در سال(۱۹۵۳)، هو[۶] حالت كلي‌تر مسائل استاتيكي را مورد توجه قرار داده وجوابي كاملتر از جواب لخنيتسكي ارائه نموده است. اليوت[۱] در سال (۱۹۴۸) جواب كامل مسائل متقارن محوري بدون پيچش در حالت استاتيكي را بر حسب ۲ تابع معرفي كرد به طوري كه معادلات حاكم بر آنها معادلات موج مرتبه ۲ مي باشند. توسعه جواب اليوت براي حالت بدون تقارن محوري توسط لاج انجام شده است. بيشترين توجه ما پس از معرفي جواب يک دستگاه معادلات با مشتقات جزيي بر حسب توابع پتانسيل مربوط به اثبات كامل بودن جواب مي باشد. اثبات كامل بودن جواب‌هاي لخنيتسكي، نواكي، هو، اليوت، لاج و برخي ديگر از توابع پتانسيل در محيطهاي همسان در مقالات ايوبنكس و استرنبرگ [۴]، استرنبرگ و ايوبنكس [۱۶]، استرنبرگ [۱۵]، استرنبرگ و گرتين [۱۷]، استيپس [۱۸]، تروسدل [۱۹] و ونگ و ونگ[۲۰] قابل پي گيري مي‌باشد. دراين مقاله توابع پتانسيل جديد براي مسائل متقارن محوري بدون پيچش درمحيطهاي همسان جانبي ارائه مي گردد. تفاوت اين توابع با توابع ارائه شده در مرجع [۲] در حالت متقارن محوري بدون پيچش آن است كه توابع ارائه شده در مرجع [۲] نمي‌تواند شامل نيروي حجمي در امتداد شعاعي باشد؛ در حالي كه توابع اين مقاله درعين حال كه براي مسائل

* نويسنده مسئول : تلفن : ۶۱۱۱۲۱۷۱ , فاكس : ۶۶۴۶۹۸۰۹ , Email: ghadi@ustmb.ac.ir

متقارن محوري بدون پيچش مي باشد، اما نيروهاي حجمي در اين حالت مي تواند كلي‌تر بوده وشامل نيروي حجمي شعاعي نيز باشد.

معادلات حاكم

محيط با رفتار همسان جانبي را با B نشان مي دهيم. محيط B را با تعريف داده شده در كلوگ [۷] منظم فرض مي كنيم. معادلات حركت در اين محيط در حالت متقارن محوري در دستگاه مختصات استوانه‌اي (r,θ,z) به صورت زير نوشته مي شود:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})+\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z}+b_r=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\sigma_{rz}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+b_z=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(۱)

كه در آن $\sigma_{ij}(r,z,t)$, $(i,j=r,\theta,z)$ مؤلفه‌هاي تانسور تنش، ρ جرم حجمي، $b_i(r,z,t)$ $(i=r,z)$ مؤلفه‌هاي نيروي حجمي و (v,w) مؤلفه‌هاي بردار تغييرمكان مي باشند. با فرض وجود تابع انرژي كرنشي براي محيط B با رفتار ايزوتروپ جانبي با محور تقارن موازي z، روابط تنش وكرنش به صورت زير در مي آيند[۵]:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{rr}\\ \sigma_{\theta\theta}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{rz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{1111}&C_{1122}&C_{1133}&0\\ C_{1122}&C_{1111}&C_{1133}&0\\ C_{1133}&C_{1133}&C_{3333}&0\\ 0&0&0&C_{1313}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{rr}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\\ \varepsilon_{zz}\\ 2\varepsilon_{rz}\end{bmatrix}$$

(۲)

به علاوه روابط كرنش تغييرمكان به صورت زير در مي‌آيد:

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u}{\partial r},\ \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u}{r},\ \varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z},\ 2\varepsilon_{rz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}$$

(۳)

در معادلات (۲) و(۳)، $\varepsilon_{ij}(r,z,t)$ با $(i,j=r,\theta,z)$ مؤلفه‌هاي تانسور كرنش و C_{ijkl} مؤلفه‌هاي تانسور ضرايب ارتجاعي مرتبه ۴ مربوط به رفتار ايزوتروپ جانبي مي باشند. با استفاده از معادلات (۲) و(۳)، معادلات حركت به شكل زير در مي‌آيند:

$$(1+\alpha_1)C_{1212}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right)+\alpha_2 C_{1212}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$+(C_{1133}+\alpha_2 C_{1212})\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial z}+b_r=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$
$$\alpha_2 C_{1212}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)+C_{3333}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$
$$+(C_{1133}+\alpha_2 C_{1212})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+b_z=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(۴)

كه در آن:

$$C_{1313}=\alpha_2 C_{1212},\ C_{1111}=(1+\alpha_1)C_{1212}.$$

(۵)

با در نظر گرفتن مثبت معين بودن تابع انرژي كرنشي به راحتي مي توان نشان داد كه $C_{1212}>0$, $\alpha_2>0$ و $\alpha_1>-1$ است.

جواب كلي مسائل الاستوديناميک

براي ارائه جواب معادلات (۴)، ابتدا تابع پتانسيل $\Theta(r,z,t)$ را به عنوان جواب معادله زير در نظر مي گيريم:

$$\frac{\partial^2\Theta(r,z,t)}{\partial r\,\partial z}=b_r(r,z,t)$$

(۶)

در اين صورت تغيير مكان‌هاي u وw را بر حسب توابع F و Θ به صورت زير مي‌نويسيم:

$$u(r,z,t)=-\alpha_3\frac{\partial^2 F(r,z,t)}{\partial r\partial z},$$
$$w(r,z,t)=(1+\alpha_1)$$
$$\times\left(\nabla_r^2+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\rho}{(1+\alpha_1)C_{1212}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)F(r,z,t)$$
$$-\frac{1}{\alpha_3 C_{1212}}\Theta(r,z,t).$$

(۷)

در اين معادله $\alpha_3=(C_{1133}+C_{1313})/C_{1212}$ و $\nabla_r^2=\partial^2/\partial r^2+\partial/r\partial r$. با جايگزيني (۷) در معادلات (۴)، مشاهده مي شود كه اولين معادله (۴) به معادله (۶) و دومين معادله (۴) به معادله (۸) تبديل مي شوند:

$$\left[\nabla_1^2\nabla_2^2-\delta\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial t^2}\right]F(r,z,t)=\frac{-1}{\alpha_2(1+\alpha_1)}\frac{b_z(r,z,t)}{C_{1212}}$$
$$+\frac{1}{\alpha_2\alpha_3 C_{1111}}\left(\nabla_r^2+\frac{C_{3333}}{C_{1212}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\rho}{C_{1212}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Theta(r,z,t).$$

(۸)

كه در آن:

$$\nabla_\alpha^2=\nabla_r^2+\frac{\partial^2}{s_\alpha^2\partial z^2}-\frac{\partial^2}{c_\alpha^2\partial t^2},\quad(\alpha=1,2)$$
$$c_2^2=\frac{C_{1313}}{\rho},\ c_1^2=\frac{C_{1111}}{\rho},$$

به علاوه s_α^2 $(\alpha=1,2)$ ريشه‌هاي معادله زير مي با شند:

$$C_{3333}C_{1313}s^4+(C_{1133}^2+2C_{1133}C_{1313}-C_{1111}C_{3333})s^2+C_{1111}C_{1313}=0.$$

(۹)

همچنین:
$\delta = (1-1/s_2^2)/c_1^2 + (C_{3333}/C_{1111} - 1/s_1^2)/c_2^2$. واضح است که جواب (۷) در شرط $\underline{e}_z .curl[u,0,w]^{\mathrm{T}} = 0$ ، صدق مي كند. دراينجا $\underline{e}_z$ بردار يكه در امتداد محور z بوده وبالانويس T به معني ترانهاده است.

قضيه زير نشان مي دهد كه جواب‌هاي داده شده در روابط (۷) براي يک محيط همسان جانبي و محدب نسبت به خطوط موازي محور z در حالت متقارن محوري بدون پيچش كامل مي‌باشند.

قضيه كامل بودن جواب

فرض كنيد B يک محيط منظم با تعريف داده شده در كلوگ [۷] و محدب نسبت به خطوط موازي محور z باشد. اين محيط را ايزوتروپ جانبي و$b_r(r,z,t)$ و$b_z(r,z,t)$ را دو تابع پيوسته تكه‌اي روي B و فاصله باز $(0,t_0)$ فرض مي كنيم. اگر$u(r,z,t)$ و$w(r,z,t)$ جواب‌هاي معادلات (۴) باشند، آنگاه توابع$\Theta(r,z,t)$ و$F(r,z,t,\delta)$ وجود دارند به طوري كه:

- تابع $\Theta(r,z,t)$ روي B و روي $(0,t_0)$ مشتق پذير تا مرتبه ۲ نسبت به z ,r و t است،
- تابع $F(r,z,t,\delta)$ روي B و روي $(0,t_0)$ مشتق پذير تا مرتبه ۴ نسبت به z ,r و t است،
- تابع F نسبت به δ تحليلي است، و u و w بر حسب F و Θ مطابق روابط (۷) تعريف مي شوند. (در روابط (۷) بايد $F(r,z,t,\delta)$ را جايگزين $F(r,z,t)$ كنيم.)

در اين صورت Θ *و* F *به ترتيب در معادلات (۶) و(۸) صدق مي كنند.*

اثبات: فرض كنيد $\Theta(r,z,t)$ جواب معادله (۶) باشد، در اين صورت Θ به صورت زير نوشته مي شود:

$$\Theta(r,z,t) = \iint b_r(r,z,t)\,dr\,dz, \quad r \geq 0\,, \quad r,z \in \mathrm{B}$$

حال اگر u و w جواب‌هاي معادلات (۴) باشند، آنگاه همانطور كه اشاره شده است اين توابع بر حسب Θ و F به صورت (۷) نوشته مي‌شوند. در اين صورت F بايد در معادله (۸) صدق كند. براي نشان دادن وجود جواب براي F، گوئيم ازآنجايي كه Θ نسبت به r، z و t تا مرتبه ۲ روي B و$(0,t_0)$ مشتق پذير است، آنگاه طرف راست معادله (۸) به صورت تكه اي پيوسته است. با نوشتن F به صورت سري تيلور نسبت به δ و بر اساس قضيه (۲) مرجع [۲]، معادله (۸) داراي جواب است. بدين ترتيب اثبات قضيه كامل است. در ادامه با استفاده از روابط كرنش و تغييرمكان (۳) و تنش-كرنش (۲)، كرنش‌ها و تنش‌ها نيز بر حسب توابع پتانسيل F و Θ نوشته مي شوند:

$$\varepsilon_{rr} = -\alpha_3 \frac{\partial^3 F}{\partial r^2 \partial z},$$
$$\varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{\alpha_3}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z},$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1+\alpha_1)\nabla_r^2 - \frac{\rho}{C_{1212}} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F - \frac{1}{\alpha_3 C_{1212}} \frac{\partial \Theta}{\partial z},$$
$$\varepsilon_{rz} = -\frac{1}{2}\alpha_3 \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial z^2} + \frac{1}{2}\left(\alpha_2 \frac{\partial^3}{\partial r \partial z^2} + (1+\alpha_1)\frac{\partial}{\partial r}\nabla_r^2 - \frac{\rho}{C_{1212}} \frac{\partial^3}{\partial r \partial t^2}\right)F - \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha_3 C_{1212}} \frac{\partial \Theta}{\partial r},$$
(۱۰)

$$\sigma_{rr} = -\alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}\left(C_{1111}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + C_{1122}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)F + C_{1133}\frac{\partial}{\partial z}\left((1+\alpha_1)\nabla_r^2 + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\rho}{C_{1212}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)F - \frac{C_{1133}}{\alpha_3 C_{1212}}\frac{\partial \Theta}{\partial z},$$
$$\sigma_{\theta\theta} = -\alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}\left(C_{1122}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + C_{1111}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)F + C_{1133}\frac{\partial}{\partial z}\left((1+\alpha_1)\nabla_r^2 + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\rho}{C_{1212}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)F - \frac{C_{1133}}{\alpha_3 C_{1212}}\frac{\partial \Theta}{\partial z},$$
$$\sigma_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(C_{3333}(1+\alpha_1) - \alpha_3 C_{1133}\right)\nabla_r^2\right]F + \frac{\partial}{\partial z}\left[\alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\rho}{C_{1212}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F - \frac{C_{3333}}{\alpha_3 C_{1212}}\frac{\partial \Theta}{\partial z},$$
$$\sigma_{rz} = C_{1313}\frac{\partial}{\partial r}\left[(1+\alpha_1)\nabla_r^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]F - C_{1313}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\rho}{C_{1212}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F - \frac{C_{1313}}{\alpha_3 C_{1212}}\frac{\partial \Theta}{\partial r}.$$
(۱۱)

جواب مسائل الا ستودينا ميک در محيطهاي همسان

تانسور ضرايب ارتجاعي در مواد همسان به صورت زير است:

$$C_{1111} = C_{3333} = 2\mu + \lambda,$$
$$C_{1122} = C_{1133} = \lambda,$$
$$C_{1212} = C_{1313} = \mu,$$
(۱۲)

به طوري كه در آن λ و μ ضرايب لامه هستند. با استفاده از روابط (۱۲) مي توان نوشت:

$$\alpha_1=\alpha_3=\frac{\lambda+\mu}{\mu},\quad \alpha_2=1,\ s_0^2=s_1^2=s_2^2=1,$$
$$\delta=0.$$

(۱۳)

$$c_1^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho},\qquad c_2^2=\frac{\mu}{\rho}.$$

(۱۴)

با قرار دادن روابط (۱۲) تا (۱۴) درمعادلات (۷) به نتايج زير مي‌رسيم:

$$u(r,z,t)=-\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial^2 F(r,z,t)}{\partial r\,\partial z},$$
$$w(r,z,t)=\frac{\lambda+2\mu}{\mu}$$
$$\times(\nabla_r^2+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2})F(r,z,t)$$
$$-\frac{1}{\lambda+\mu}\Theta(r,z,t),$$

(۱۵)

كه در آن $F(r,z,t)$ جواب معادله زير مي‌باشد:

$$\nabla_1^2\nabla_2^2\,F(r,z,t)=\frac{-1}{\lambda+2\mu}b_z(r,z,t)$$
$$+\frac{\mu}{(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu)}(\nabla_r^2+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\Theta(r,z,t)$$

(۱۶)

در اين رابطه براي $\alpha=1,2$ عملگر ∇_α^2 برابر $\nabla^2-\partial^2/\left(c_\alpha^2\partial t^2\right)$ بوده و ∇^2 عملگر معمول لاپلاس در فضاي سه بعدي مي‌باشد. معادله حاكم بر Θ تغيير نكرده و همان معادله (۶) مي‌باشد. در مواد همسان روابط بين تنش و توابع پتانسيل به شكلهاي زير در مي‌آيند:

$$\varepsilon_{rr}=-\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial^3 F}{\partial r^2\,\partial z},$$
$$\varepsilon_{\theta\theta}=-\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial z},$$
$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\nabla_r^2-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F-\frac{1}{\lambda+\mu}\frac{\partial\Theta}{\partial z},$$
$$\varepsilon_{rz}=-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\frac{\partial^3 F}{\partial r\partial z^2}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3}{\partial r\partial z^2}+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}\nabla_r^2-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^3}{\partial r\partial t^2}\right)F$$
$$-\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\frac{\partial\Theta}{\partial r},$$

(۱۷)

$$\sigma_{rr}=\frac{\partial}{\partial z}\left(-(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)F$$
$$+\lambda\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)F-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{\partial\Theta}{\partial z},$$
$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial^2}{\partial r^2}-(\lambda+2\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)F$$
$$+\lambda\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)F-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{\partial\Theta}{\partial z},$$
$$\sigma_{zz}=\frac{\partial}{\partial z}\left[(3\lambda+4\mu)\nabla_r^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F$$
$$-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial\Theta}{\partial z},$$
$$\sigma_{rz}=\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\nabla_r^2-\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)F$$
$$-\frac{1}{\lambda+\mu}\frac{\partial\Theta}{\partial r}.$$

(۱۸)

معادلات در حالت استاتيكي

در حالت الاستواستاتيک، كليه توابع مستقل از زمان بوده ودر نتيجه روابط تغييرمكان و توابع پتانسيل، به عنوان مثال، به صورت زيردر مي‌آيد:

$$u(r,z)=-\alpha_3\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial z},$$
$$w(r,z)=(1+\alpha_1)(\nabla_r^2+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial z^2})F$$
$$-\frac{1}{\alpha_3 C_{1212}}\Theta.$$

(۱۹)

در اين حالت توابع پتانسيل $F(r,z)$ و $\Theta(r,z)$ به ترتيب جواب‌هاي معادلات (۲۰) و (۲۱) مي باشند:

$$\frac{\partial^2\Theta(r,z)}{\partial r\,\partial z}=b_r(r,z),$$

(۲۰)

$$\nabla_{1s}^2\nabla_{2s}^2\,F(r,z)=\frac{-1}{\alpha_2(1+\alpha_1)}\frac{b_z(r,z)}{C_{1212}}$$
$$+\frac{1}{\alpha_2\alpha_3 C_{1111}}(\nabla_r^2+\frac{C_{3333}}{C_{1212}}\frac{\partial^2}{\partial z^2})\Theta(r,z),$$

(۲۱)

كه در آن عملگر $\nabla_{\alpha s}^2$ براي $\alpha=1,2$ به صورت $\nabla_r^2+\dfrac{\partial^2}{s_\alpha^2\partial z^2}$ درمي آيد.

براساس تابع پتانسيل نيوتني، كامل بودن جواب (۲۰) به آساني اثبات مي شود [3, Claim4].

براي در اختيار داشتن كرنش ها وتنش ها بر حسب توابع پتانسيل F و Θ، كافي است كه با جايگزيني $F(r,z,t)$ و $\Theta(r,z,t)$ به ترتيب با $F(r,z)$ و $\Theta(r,z)$ در روابط (١٠) و (١١)، ازآنها استفاده شود.

جوابهاي استاتيكي در مصالح همسان

به منظور بدست آوردن جواب معادلات ناويه در حالت استاتيكي در مصالح همسان، ميتوان با استفاده از معادلات (١٢) تا (١٤) و (١٩) شروع كرد تا جواب زير را به دست آورد:

$$u(r,z) = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z},$$
$$w(r,z) = \frac{\lambda+2\mu}{\mu}(\nabla_r^2 + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2}{\partial z^2})F - \frac{1}{\lambda+\mu}\Theta. \quad (٢٢)$$

در اين حالت توابع $F(r,z)$ و $\Theta(r,z)$ به ترتيب جوابهاي معادلات (٢٣) و (٢۴) هستند:

$$\frac{\partial^2 \Theta(r,z)}{\partial r \partial z} = b_r(r,z) \quad (٢٣)$$

$$\nabla^2\nabla^2 F(r,z) = \frac{-1}{\lambda+2\mu}b_z(r,z) + \frac{\mu}{(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu)}(\nabla_r^2 + \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial z^2})\Theta(r,z), \quad (٢۴)$$

كه در آن ∇^2 عملگر معمول لاپلاس در حالت ٣ بعدي است. به طور مشابه، مي توان از معادلات (١۵) شروع كرد و با حذف مشتقات نسبت به زمان به جواب (٢٢) رسيد. به منظور نشان دادن اينكه معادلات (٢٢) تا (٢۴) برروابط داده شده به وسيله Simmonds منطبق است، كافي است كه ضرايب لامه، λ و μ، برحسب ضرايب E و ν به ترتيب به شكل $\nu E/(1+\nu)(1-2\nu)$ و $E/2(1+\nu)$ جايگزين شوند. در اين صورت داريم:

$$u(r,z) = -\frac{1}{(1-2\nu)}\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z},$$
$$w(r,z) = \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}\nabla_r^2 F + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\Theta. \quad (٢۵)$$

$$\nabla^2\nabla^2 F(r,z) = \frac{-(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}b_z(r,z) + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)^2}{E(1-\nu)}(\nabla_r^2 + \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}\frac{\partial^2}{\partial z^2})\Theta(r,z), \quad (٢٦)$$

معادلات (٢۵) و (٢٦) با شرط جايگزيني F با $(1-2\nu)(1+\nu)F_{Love}/E$ دقيقاً همان معادلاتي است كه به وسيله Simmonds [١٣] ارائه شده است. لازم به توضيح است كه در اينجا F_{Love} تابع كرنشي لاو مي باشد.

عملكرد تابع پتانسيل

توابع پتانسيل ارائه شده در اينجا همچون توابع ارائه شده در مرجع [٢] براي محيطهاي ايزوتروپ جانبي بوده و همانند بسياري از توابع ارائه شده براي مواد ايزوتروپ (توابع گالركين، توابع نوبر-پاپكويچ، توابع بوسينسك و توابع هلمهولتز-لامه [۵]) براي جداسازي معادلات درگير حركت به كار ميآيد. استفاده از روش توابع پتانسيل به دليل كارآيي بالاي آن در حل مسائل تحليلي [۵] در حل بسياري از مسائل (مسائل كلوين، بوسينسك، سروتي چه در حالت استاتيكي و چه در حالت ديناميكي) به كار رفته است [٩]. توابع پتانسيل ارائه شده در [٢] نيز در حل برخي از مسائل انتشار امواج به كار رفته است [١٢]. هر روش ديگر مانند روش اجزاء محدود عليرغم كارايي بسيار زياد آن به حل تقريبي مي‌انجامد و افزايش دقت جوابهاي آن، به خصوص در مسائل انتشار امواج، نياز به ايدههاي خاص دارد. نويسنده بر آن است تا از توابع ارائه شده در اين مقاله براي حل تحليلي برخي از مسائل انتشار امواج به كمك سانتريفيوژ استفاده نمايد.

نتيجه گيري

در چارچوب مواد گرين، موادي كه وجود تابع انرژي براي آنها مسلم است، جواب معادلات الاستوديناميک (معادلات موج) ومعادلات الاستواستاتيک براي مسائل متقارن محوري و بدون پيچش در حالتي كه نيروهاي حجمي هم در جهت محور تقارن مواد همسان جانبي و هم عمود بر آن غير صفر است، ارائه شده است. جوابها بر حسب دو تابع پتانسيل ارائه شدهاند، به طوري كه آنها جوابهاي معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزيي غير همگن ميباشند. يكي از اين معادلات بسيار ساده و بر حسب نيروي حجمي عمود بر محور تقارن مواد نوشته ميشود وديگري معادلات موج تكراري در مواد همسان جانبي ميباشد. كامل بودن جواب منوط به محدب بودن دامنه مسئله نسبت به محورهاي موازي محور تقارن مواد ميباشد[٢]. جواب ارائه شده در اينجا در حالت ساده

مسائل الاستو استاتيک در مصالح بـه جـواب Simmonds [۱۴] همگرا مي‌شود که خـود گسـترش يافتـه جـواب لاو مي‌باشد.

تشكر و قدرداني

نويسنده بر خـود لازم ميدانـد كـه از همكـاري‌هـاي جانبي آقاي مهندس عزيزا... اردشير بهرسـتاقي دانشـجوي كارشناسي ارشد رشته سازه دانشگاه علوم و فنون مازندران تشكر نمايد.

مراجع

1 - Elliott, H. A. (1948). "Three dimensional stress distribution in hexagonal aeolotropic crystals." *Proc. Camb. Phil. Soc.,* Vol. 44, PP. 522-533.

2 - Eskandari-Ghadi, M. (2005). "A complete solution of the wave equations for transversely isotropic media." *Journal of Elasticity,* Vol. 81, PP.1-19.

3 - Eskandari-Ghadi, M. and Pak, R. Y. S. (2006). *Elastodynamics and Elastostatics by a Unified Method of Potentials*, Submitted to the Journal of Elasticity on June.

4 - Eubanks, R. A. and Sternberg, E. (1954). "On the axisymmetric problem of elasticity theory for a medium with transverse isotropy." *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 3, PP. 89-101.

5 - Gurtin, M. E. (1972). "The linear theory of elasticity." *In S.* Flügge *(ed.), Handbuch der Physik*, Vol. Via/2, Mechanics of Solids II, ed C. Truesdell, PP. 1-295. Springer, Berlin.

6 - Hu, H. C. (1953). "On the three dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body." *Sci., Sinica,* Vol. 2, PP. 145-151.

7 - Kellogg, O. D. (1953). *Foundation of Potential Theory*, Dover Publications Inc.

8 - Lekhnitskii, S. G.(1981). *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Mir, Moscow .

9 - Love, A. E. H. (1944). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, New York, Dover Publications.

10 - Michell, J. H. (1900). "The stress in an aeolotropic elastic solid with an infinite plane boundary." *Proceeding of the London Mathematical Society*, Vol. 32, PP. 247-258.

11 - Nowacki, W. (1954). "The stress function in three dimensional problems concerning an elastic body characterized by transversely isotropy." *Bull. Acad. Polon. Sci*., Vol. 2, PP. 21-25.

12 - Rahimian, M., Eskandari-Ghadi, M., Pak, R. Y. S. and Khojasteh, A. (2007). "An elastodynamic potential method for a transversely isotropic solid." *ASCE Mech. Dev*. (in press).

13 - Rajapakse, R. K. N. D. and Wang, Y. (1993). "Greens functions for transversely isotropic elastic half-space." *J. Eng. Mech*., Vol. 119, No. 9, PP. 1724-1746.

14 - Simmonds, J. G. (2000). "Love's stress function for torsionless axisymmetric deformation of elastically isotropic bodies with body forces." *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 67, PP. 628-629.

15 - Sternberg, E. (1960). "On the integration of the equation of motion in the classical theory of elasticity." *Arch. Ration. Mech. Anal.,* Vol. 6, PP. 34-50.

16 - Sternberg, E. and Eubanks, R. A. (1957). "On stress functions for elastokinetics and the integration of the repeated wave equation." *Quarterly of Applied Mathematics,* Vol. 15, PP. 149-153.

17 - Sternberg, E. and Gurtin, M. E. (1962). "On the completeness of certain stress functions in the linear theory of elasticity." *Proc. Forth U.S. Nat. Cong. Appl. Mech.*, PP. 793-797.

18 - Stippes, M. (1962). "Completeness of papkovich potentials." *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 26, PP. 477-483.

19 - Truesdell, C. (1959). "Invariant and complete stress functions for general continua." *Arch. Ration. Mech. Anal.*, Vol. 4, PP. 1-29.

20 - Wang, M. Z. and Wang, W. (1995). "Completeness and nonuniqueness of general solutions of transversely isotropic elasticity." *Int. J. Solids Struct.,* Vol. 32 No. 374, PP. 501-513.

واژه هاي انگليسي به ترتيب استفاده در متن

1 - Anisotropic
2 - Transversely isotropic