

## اکستروژن سه بعدی به روش میدان خطوط لغزش

کارن ابری نیا<sup>۱\*</sup> و رحیم تحریری ماسوله<sup>۲</sup>

(تاریخ دریافت ۸۵/۹/۱۵، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۵/۳/۲۰، تاریخ تصویب ۸۵/۹/۱۱)

تا کنون مسائل زیادی با استفاده از تئوری میدان خطوط لغزش حل شده اند لیکن تمام این مسائل در حالت دوبعدی (کرنش صفحه ای و تنش صفحه ای) و متقارن محوری بوده اند. در این مقاله سعی شده است تا با بکارگیری روش میدان خطوط لغزش حلی جدید برای مسائل اکستروژن در حالت سه بعدی ارائه شود. برای این منظور ابتدا سطوح جریان که سطوحی تشکیل یافته از منحنی های مسیر عبور نقاط مادی موجود در مقطع ورودی تا رسیدن به مقطع خروجی هستند تعریف شده اند و سپس با استفاده از مفاهیم سطوح جریان و میدان خطوط لغزش روشی برای محاسبه فشار نسبی اکستروژن ارائه گشته است. با توجه به تاب خوردگی سطوح جریان در مسائل اکستروژن سه بعدی و عدم امکان ترسیم میدان خطوط لغزش برای این سطوح پیشنهادی جهت جایگزینی این سطوح با سطوحی تخت ارائه گشته است. برای مقایسه کمی سطوح تخت جایگزین شده با سطوح جریان اصلی که تاب خورده هستند پارامترهای خطای زاویه ای و طولی معرفی شده اند. سطوح جریان دو خطی و پارامترهای خطای مربوط به آنها برای اکستروژن مقطع دایره به برخی از مقاطع خاص مانند مربع، بیضی و... محاسبه شده اند. در پایان فشار متوسط اکستروژن برای اکستروژن برخی از مقاطع خاص به روش ارائه شده در این مقاله محاسبه شده و با نتایج حاصل از سایر روش ها و نتایج تجربی مقایسه شده است.

:

هیدرولیکی را ساخت و در سال ۱۸۹۴ الکساندر توانست مس و برنج را اکستروژد کند. پس از اکستروژن موفقیت آمیز فلزات نرمی مانند مس، سرب و برنج اکستروژن فلزات سخت تر مانند آهن نیز ممکن گشت.

یکی از روشهای مورد استفاده برای تحلیل فرآیند اکستروژن میدان خطوط لغزش است. اصول اولیه تئوری میدان خطوط لغزش توسط کلمب (۱۷۷۶) و رانکین (۱۸۵۷) و پس از آنها توسط لوی (۱۸۷۳) ارائه شده است [۱]. اولین حل کنگره زنی<sup>۲</sup> یک بلوک نیمه بینهایت در حالت کرنش صفحه ای<sup>۳</sup> که با استفاده از تئوری میدان خطوط لغزش انجام شد توسط پراتل [۲] صورت گرفت. هنکی [۳] معادلات دیفرانسیل تنش حاکم در تئوری میدان خطوط لغزش برای حالت کرنش صفحه ای را برای مواد صلب کاملاً پلاستیک<sup>۴</sup> ارائه داد. این معادلات به نام معادلات تنش هنکی معروف هستند. پس از آن معادلات سرعت در میدان خطوط لغزش توسط گرینگر [۴] در سال های بعد بدست آمد. تئوری میدان خطوط لغزش با فرض ماده صلب کاملاً پلاستیک و ایزوتروپ<sup>۵</sup> برای حالت کرنش صفحه ای، تنش صفحه ای و حالت متقارن

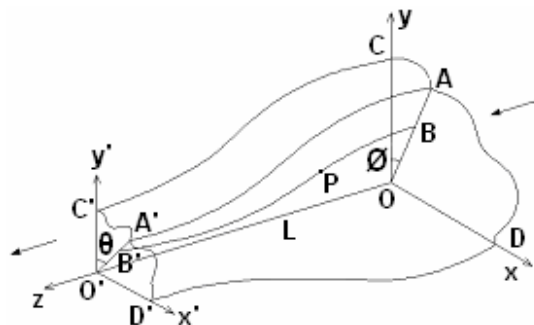
امروزه دسته گسترده ای از مسائلی که در حیطه مهندسی مکانیک مطرح می باشند مسائل مربوط به شکل دهی فلزات هستند. بشر از آن زمان که روش استخراج و شکل دهی فلزات را آموخت تا کنون همواره در پی یافتن روش هایی تازه برای شکل دهی فلزات و بهبود روش های موجود بوده است. تعدد روشهایی که هم اکنون برای شکل دهی فلزات مرسوم هستند دلیلی بر این تلاش خستگی ناپذیر است.

یکی از روش های پر استفاده برای شکل دهی فلزات اکستروژن<sup>۱</sup> است. اکستروژن فرآیندی است که در آن قطعه ای از فلز با اعمال فشار از درون قالبی عبور داده می شود، فلز درون قالب تغییر شکل پلاستیک داده و پس از عبور از دهانه خروجی قالب شکل مقطع خروجی قالب را به خود می گیرد.

نخستین ایده اکستروژن در سال ۱۷۹۷ توسط جوزف برماه مطرح گردید. وی در مقاله ای که ارائه داده بود بررسی را شرح داده بود که می توانست لوله هایی با قطرهای مختلف و طولهای دلخواه از سرب یا هر فلز نرم دیگر تولید کند. در سال ۱۸۲۰ توماس بور پرس

این روش برای پنج نوع المان با سه شرط مرزی برای بدست آوردن میدان خطوط لغزش بکار گرفته شده است. در این روش خطوط لغزش با کمان هائی از دایره که شعاع آن از نقطه ای به نقطه دیگر تغییر می کند تخمین زده شده است. روش عددی ساختمان میدان خطوط لغزش محور متقارن برای تحلیل کنگره زنی یک بلوک ضخیم از یک ماده صلب کاملاً پلاستیک و وجود اصطکاک بین ابزار و ماده توسط چیتکارا و بات انجام شده است انجام شده است [۱۵]. در نوشته ایشان سنبه های مخروطی زبر و صاف مورد بررسی قرار گرفته اند. حل کلی اکستروژن از درون قالب های با سطح مخروطی، کسینوسی و تخت [۱۶] و بدست آوردن میدان خطوط لغزش در اکستروژن متقارن برای میله ها در قالب های مخروطی، کسینوسی و تخت [۱۷] توسط این دو محقق با استفاده از مرجع [۱] صورت گرفته است.

جهت استفاده از تئوری میدان خطوط لغزش برای محاسبه فشار متوسط لازم در اکستروژن مقطعی دلخواه به مقطع دلخواه دیگر ابتدا لازم است تا سطوحی تحت عنوان سطوح جریان تعریف کنیم. این سطوح از اجتماع منحنی هایی تشکیل یافته اند که مسیر حرکت نقاط واقع بر یک خط راست در مقطع ورودی را نشان می دهند. در شکل (۱) که مربوط به اکستروژن یک مقطع دلخواه به مقطع دلخواه دیگر است سطح  $OAA'O'$  یکی از سطوح جریان است (جهت سهولت تنها یک چهارم مقطع نشان داده شده است).



در این سطح جریان نقاط واقع بر خط  $OA$  در مقطع ورودی پس از طی مسیری منحنی به مقطع خروجی در خط  $O'A'$  می رسند. منحنی  $AA'$  مسیری

گسترش پیدا نمود. تعداد زیادی از نوشته ها با استفاده از تئوری میدان خطوط لغزش در حالت کرنش صفحه ای توسط محققین طی سال های بعد ارائه شد. محققینی همچون هیل [۵]، پراگر و هاج [۶] تعداد زیادی از مسائل شکل دهی فلزات را با استفاده از تئوری میدان خطوط لغزش حل نمودند. روش حل میدان خطوط لغزش در حالت کرنش صفحه ای با استفاده از روش ماتریسی توسط جانسون و همکارانش [۷] و دورست و کولینز [۸] انجام گرفته است. تئوری میدان خطوط لغزش در حالت تنش صفحه ای توسط هیل بنا شد [۵]. همانند حالت کرنش صفحه ای تئوری میدان خطوط لغزش در حالت تنش صفحه ای دارای محدودیت هایی بوده و به همین دلیل تعداد کمی از مسائل با استفاده از این تئوری قابل حل هستند. عموماً از این تئوری برای بدست آوردن حد تسلیم سازه های مختلف استفاده می شود. مسئله تعیین حد تسلیم خمش تیر های یکسر درگیر با استفاده از تئوری میدان خطوط لغزش در حالت تنش صفحه ای توسط گرین در سال ۱۹۵۴ حل شده است [۱۰،۹]. رانشی و همکارانش حد تسلیم تیر های یکسر درگیر را تحت بارگذاری خمشی، با استفاده از این حالت تحلیل نمودند [۱۱]. معادلات اساسی برای جریان پلاستیک متقارن برای ماده صلب کاملاً پلاستیک توسط هیل ارائه شد [۵]. او در نوشته اش نشان داد که برای موادی که از معیار تسلیم فن میزز<sup>۷</sup> و قانون جریان مربوطه آن تبعیت می کنند معادلات حاکم تنش و سرعت بیضوی بوده و حل اینگونه معادلات دیفرانسیل از لحاظ ریاضی دارای مشکلات فراوانی می باشند در حالی که شیلد نشان داد [۱۲] که برای یک ماده صلب کاملاً پلاستیک که از معیار تسلیم ترسکا<sup>۷</sup> و قانون جریان مطابق آن و همچنین فرض هار- فن کارمن تبعیت می کنند معادلات دیفرانسیل حاکم بصورت هذلولی تبدیل خواهند شد. این گونه معادلات دیفرانسیلی دارای معادله مشخصه با جواب حقیقی بوده و با اعمال شرایط مرزی براحتی قابل حل می باشند. جزئیات روابط حاکم میدان تنش و سرعت برای جریان پلاستیک متقارن برای یک ماده صلب-پلاستیک که از معیار تسلیم ترسکا و روابط تنش-تخرک کرنش ترسکا مربوط به سنت ونان تبعیت می کند توسط لپیمن ارائه شده است [۱۳ و ۱۴]. یک روش عددی برای ساختن میدان خطوط لغزش بوسیله چیتکارا و بات ارائه شده است [۱].

بین سطح مقطع ورودی و خروجی بدست می آید.  $\vec{r}_0$  و  $\vec{r}_3$  را می توان بر حسب پارامترهای  $u$  و  $q$  که بین صفر و یک تغییر می کنند نوشت:

$$\phi = q \frac{\pi}{n}, \quad r = uR \quad (3)$$

که در آن  $n$  بر حسب نوع تقارن مقطع مشخص می شود. نتیجتاً می توان معادله (۱) را بصورت زیر نوشت:

$$\vec{r} = f(u, q, t)\hat{i} + g(u, q, t)\hat{j} + h(u, q, t)\hat{k} \quad (4)$$

در صورت خطی بودن قالب یا خطی بودن پروفیل منطقه مرده در قالبهای تخت، سطوح جریان بدست آمده از نوع سطوح دو خطی خواهند بود. در این حالت بردارهای  $\vec{r}_1$  و  $\vec{r}_2$  حذف می شوند و چند ضلعی مشخصه نیز به همان خط راست جریان تبدیل می شود و خواهیم داشت:

$$\vec{r} = \vec{r}_0(1-t) + \vec{r}_3t \quad (5)$$

با اعمال فرض تراکم ناپذیری و حفظ تناسب نهایتاً خواهیم داشت:

$$\vec{r} = [1 \quad t] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} uR(\sin(\frac{\pi q}{n})\hat{i} + \cos(\frac{\pi q}{n})\hat{j}) \\ u(\hat{f}\hat{i} + \hat{g}\hat{j}) + \hat{l}\hat{k} \end{bmatrix} \quad (6)$$

که  $f$  و  $g$  به ترتیب  $O'A' \sin(\theta)$  و  $O'A' \cos(\theta)$  هستند.

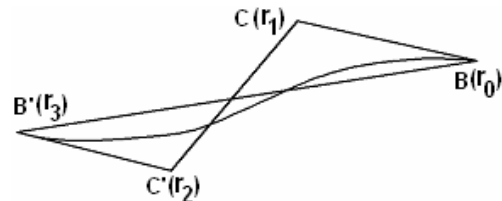
در این قسمت معادلات سطوح جریان برای اکستروژن مقطع دایره به مقاطع دایره، بیضی، مربع و مستطیل ارائه شده است. در جدول (۱) توابع  $f$  و  $g$  مربوط به دایره، مربع، بیضی و مستطیل ارائه شده اند.  $a$  در مربع طول ضلع مربع و در بیضی نصف قطر بزرگ و در مستطیل نصف ضلع بزرگ است.  $b$  نیز در بیضی نصف قطر کوچک و در مستطیل نصف ضلع کوچک است. همچنین در بیضی قطر بزرگ و در مستطیل ضلع بزرگتر به موازات محور  $x$  هستند.  $ar$  نشان دهنده نسبت ظاهری است و به صورت زیر تعریف می شود.

$$ar = \frac{b}{a} \quad (7)$$

است که نقطه  $A$  طی می کند تا از مقطع ورودی به مقطع خروجی برسد و منحنی  $BB'$  نیز مسیری است که نقطه  $B$  طی می کند تا به مقطع خروجی برسد. برای تعریف سطوح و منحنی های فوق الذکر از روش های طراحی منحنی ها و سطوح ساده ای که اصول ریاضی آن توسط بزییر ارائه شده است استفاده می شود [۱۸]. در این روش از معادلات پارامتری برای تعریف منحنی سطوح استفاده می شود. معادله معرفی شده توسط بزییر به قرار زیر است.

$$\vec{r}(t) = (1-t)\vec{r}_0 + 3t(1-t)\vec{r}_1 + 3t(1-t)\vec{r}_2 + t^3\vec{r}_3 \quad (1)$$

$\vec{r}$  بردار مکان نقاط واقع بر این منحنی ها،  $t$  پارامتری بین صفر و یک ( $0 \leq t \leq 1$ ) و  $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  ضرایب ثابت معادله هستند. یک منحنی  $BB'$  دلخواه و چند ضلعی مشخصه مربوطه آن در شکل (۲) نشان داده شده است.



در اینجا  $\vec{r}_0$  و  $\vec{r}_3$  بردارهای مکان نقاط  $B$  و  $B'$  نسبت به مرکز مختصات  $O$  هستند (شکل ۱) و  $\vec{r}_1$  و  $\vec{r}_2$  به ترتیب بردارهای مکان نقاط  $C, C'$  (رئوس چند ضلعی مشخصه) هستند (شکل ۲). با استفاده از فرض حفظ تناسب نقاط در مقاطع ورودی و خروجی ( $\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'}$ ) به ازای هر نقطه ورودی مشخص  $B$  در سطح مقطع ورودی می توان نقطه متناظر آن در سطح مقطع خروجی یعنی  $B'$  را تعیین کرد. فلذا برای هر  $\vec{r}_0$  مشخص  $\vec{r}_3$  متناظر آن بدست می آید. برای تعریف منحنی  $BB'$  داشتن  $\vec{r}_0$  و  $\vec{r}_3$  کافی نیست و باید  $\vec{r}_1$  و  $\vec{r}_2$  نیز مشخص شوند. بردارهای مکان  $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  به شکل عمومی زیر تعریف می شوند [۱۸]:

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= OB \sin(\phi)\hat{i} + OB \cos(\phi)\hat{j} \\ \vec{r}_1 &= a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k} \\ \vec{r}_2 &= a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k} \end{aligned} \quad (2)$$

$\vec{r}_3 = O'B' \sin(\theta)\hat{i} + O'B' \cos(\theta)\hat{j} + L\hat{k}$   
که در آن  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  ثابت هایی هستند که موقعیت  $C, C'$  را تعیین می کنند. پارامتر  $\theta$  از روابط

که یک چهارم قالب را در نظر می گیریم  $n$  برابر دو خواهد بود .

مسائل مورد نظر در این فصل را می توان به دو دسته کلی تقسیم کرد :

الف - مسائل متقارن محوری

ب- مسائل سه بعدی (بدون تقارن محوری)

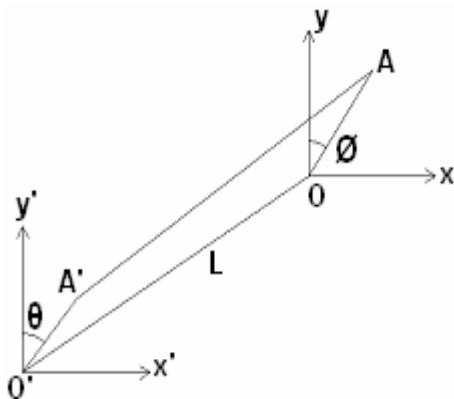
دسته اول یعنی مسائل دارای تقارن محوری حالتی هستند که در آن مقطع ورودی و خروجی هر دو دایره هستند. در این گونه مسائل داریم  $\phi = \theta$  و تمام سطوح جریان تخت و با هم برابر هستند و در نتیجه خواهیم داشت :

$$p(\phi) = \text{const} \quad (10)$$

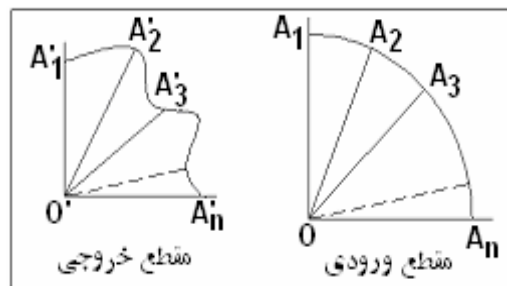
$$\bar{P} = p(\phi)$$

ترسیم میدان خطوط لغزش و محاسبه  $\bar{P}$  برای حالت محور متقارن توسط برخی از محققین از جمله چیتاکارا و بات [۱۷] و آندره سورین [۱۹] صورت پذیرفته و تئوری آن در دست است و در اینجا به دلیل اختصار از ذکر آن صرف نظر می کنیم.

در دسته دوم مسائل یعنی مسائلی که فاقد تقارن محوری هستند مقطع دایره ای طی فرآیند اکستروژن به مقطعی غیر دایره ای تبدیل می شود. در این دست از مسائل بر خلاف مسائل متقارن محوری رابطه  $\theta = \phi$  برقرار نیست و به ازای زوایای  $\phi$  مختلف به زوایای  $\theta$  متفاوت خواهیم رسید . همچنین به دلیل تفاوت بین  $\phi$  و  $\theta$  سطوح جریان دیگر به صورت تخت نخواهند بود و دچار تاب خوردگی می شوند. برای این دسته از مسائل با توجه به تاب خوردگی سطوح جریان تئوری ای که بتوان با استفاده از آن خطوط لغزش را بر روی سطوح جریان رسم نمود در دسترس نیست.



در این بخش با استفاده از سطوح جریان معرفی شده در بخش قبل و با بکار گیری تئوری میدان خطوط لغزش به تحلیل فرآیند اکستروژن در حالت سه بعدی پرداخته و فشار متوسط مربوط به این فرآیند را بدست می آوریم. لازم بذکر است که تئوری ارائه شده در این مقاله برای قالب های خطی و قالبهای مسطح با فرض خطی بودن پروفیل منطقه مرده قابل استفاده است و مقطع ورودی در تمام قالبها دایره فرض شده است.



در شکل (۳) اضلاع ورودی و خروجی مربوط به صفحات جریان برای اکستروژن مقطع دایره ای به مقطع دلخواه نمایش داده شده است (جهت سهولت فقط یک چهارم مقاطع نمایش داده شده است).

با توجه به تعریفی که در فصل پیش از سطوح جریان داشتیم خطوط  $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$  در مقطع ورودی پس از عبور از قالب به خطوط  $OA'_1, OA'_2, \dots, OA'_n$  تبدیل می شوند. در صورتی که فشار متوسط بر روی هریک از خطوط  $OA_i$  را داشته باشیم می توانیم فشار در مقطع ورودی را به صورت زیر برآورد کنیم .

$$P = p(\phi) \quad (8)$$

با استفاده از رابطه (۸) می توانیم فشار متوسط اکستروژن در مقطع ورودی را به صورت زیر برآورد کنیم

$$\bar{P} = \frac{n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\phi) d\phi \quad (9)$$

در این رابطه  $n$  عددی صحیح است که با توجه به تقارن مقطع خروجی تعیین می شود . به طور مثال برای حالتی

$g f$  :

$g$	$f$	مقطع خروجی
$R' \cos(\phi)$	$R' \sin(\phi)$	دایره
$b \cos(\theta)$	$b \sin(\theta)$	بیضی
$\sqrt{ar^2 \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)}$	$\sqrt{ar^2 \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)}$	
$\sqrt{2a} \left( \frac{1 - \phi}{2} - \frac{\phi}{\pi} \right)$	$\sqrt{2a} \frac{\phi}{\pi}$	مربع
$\begin{cases} b & 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \\ 2b \left( 1 - \frac{2\phi}{\pi} \right) & \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} 4a \frac{\phi}{\pi} & 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \\ a & \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	مستطیل

$R'$

$E_\theta$  :

$E_\theta$	مقطع خروجی
صفر	دایره
$\left  \phi - \text{Arc tan} \left( \frac{\tan \phi}{ar} \right) \right $	بیضی
$\left  \text{Arct tan} \left( \frac{2\phi}{\pi - 2\phi} \right) - \phi \right $	مربع
$\begin{cases} \left  \phi - \text{Arc tan} \left( \frac{4\phi}{ar\pi} \right) \right  & 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \\ \left  \phi - \text{Arc tan} \left( \frac{\pi}{2ar(\pi - 2\phi)} \right) \right  & \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	مستطیل

سطوح تاب خورده با سطوح تخت است. سطح جریان تخت پیشنهاد شده به عنوان جایگزین سطح جریان تاب خورده شکل (۴) در شکل (۵) نمایش داده شده است.

با مقایسه سطح تخت  $OAO'A''$  با سطح تاب خورده  $OAO'A'$  خواهیم داشت :

الف - اضلاع  $OA$  و  $OO'$  در هر دو سطح مشترک هستند .

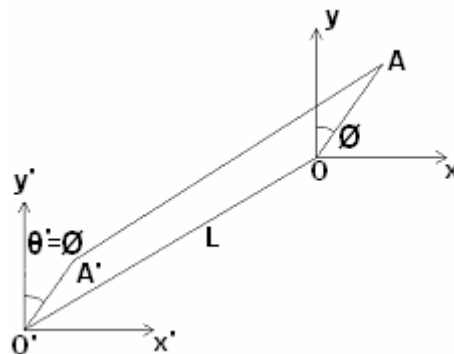
ب- طول ضلع  $O'A''$  با  $O'A'$  یکسان در نظر گرفته شده است .

ج- طول اضلاع  $A'A''$  و  $O'A'$  با هم برابر نیستند .

د- زوایای  $\theta'$  و  $\theta$  باهم برابر نیستند .

همان طور که پیداست این دو سطح در دو مورد متفاوت هستند. مورد اول تفاوت طول ضلعی از سطح جریان است که با قالب در تماس است، این طول در سطح جریان تخت جایگزین شده کوچکتر است. مورد دیگر زاویه ضلع

در شکل (۴) یکی از سطوح جریان مربوط به اکستروژن یک مقطع دایره ای به مقطعی دلخواه به صورت شماتیک نشان داده شده است.



پیشنهاد ارائه شده در این پروژه برای رفع این مشکل اعمال نوعی ساده سازی و جایگزین کردن این

خروجی سطح جریان است که در سطح جریان تخت جایگزین شده مقدار آن با  $\phi$  یکسان در نظر گرفته شده است.

برای بررسی کمی و دقیقتر این دو صفحه پارامترهای خطای  $E_L$  و  $E_\theta$  را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$E_L = \frac{AA' - AA''}{AA'} \quad (11)$$

$$E_\theta = |\theta - \phi| \quad (12)$$

آشکار است که هرچه خطاهای  $E_L, E_\theta$  کمتر باشند ساده سازی پیشنهاد شده قابل قبول تر و جواب های بدست آمده به واقعیت نزدیک تر خواهند بود. خطاهای  $E_L$  و  $E_\theta$  بسته به شکل مقطع خروجی متفاوت خواهند بود. در جداول (۲) و (۳) به ترتیب مقادیر  $E_L$  و  $E_\theta$  برای مقاطع خروجی مربع، مستطیل و بیضی ارائه شده است.

در روابط بالا  $\eta$  نسبت اکستروژن است و برابر نسبت مساحت مقطع خروجی به مقطع ورودی است.  $\bar{E}_L$  و  $\bar{E}_\theta$  به ترتیب خطای زاویه ای و طولی متوسط هستند و به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\bar{E}_L = \frac{\int_0^{\pi/2} E_L d\phi}{\pi/2} \quad (13)$$

$$\bar{E}_\theta = \frac{\int_0^{\pi/2} E_\theta d\phi}{\pi/2} \quad (14)$$

در اکستروژن دایره به مربع مقدار  $E_\theta$  و  $\bar{E}_\theta$  مستقل از ابعاد مقاطع ورودی و خروجی و کاهش سطح مقطع هستند و نتیجتاً مقدار  $\bar{E}_\theta$  ثابت و برابر  $2/6^\circ$  است که مقدار اندکی است. لیکن  $E_L$  و نتیجتاً  $\bar{E}_L$  به پارامترهای  $\eta$  و  $L/R$  وابسته هستند.  $L/R$  با افزایش کاهش و با افزایش  $\eta$  افزایش می یابد. با این حال مقادیر  $\bar{E}_L$  تقریباً در تمام حالات بسیار ناچیز است. به عنوان مثال مقدار  $\bar{E}_L$  برای حالتی که  $\eta = 0.8$  و  $L/R = 0.5$  است برابر  $0.045\%$  است که این مقدار با کاهش  $\eta$  (افزایش  $r$ ) و افزایش  $L/R$  کمتر می شود. فلذا می توان

نتیجه گرفت که ساده سازی صورت پذیرفته تاثیر زیادی در دقت جوابهای حاصله نخواهد داشت و فرض صورت گرفته قابل قبول است. در اکستروژن دایره به مستطیل نیز مقدار  $\bar{E}_\theta$  مستقل از کاهش سطح مقطع است لیکن به مقدار نسبت ظاهری که تابعی از شکل مقطع خروجی است بستگی دارد. با کاهش مقدار  $ar$  مقادیر  $E_\theta$  و  $\bar{E}_\theta$  افزایش می یابد. مقدار  $E_\theta$  در  $ar = 0.5$  در حدود  $13^\circ$  درجه و مقدار آن با افزایش  $ar$  کاهش می یابد تا در  $ar = 1$  که مستطیل به مربع تبدیل شده است مقدار آن به  $2/6^\circ$  درجه می رسد. لیکن  $E_L$  و  $\bar{E}_L$  علاوه بر نسبت ظاهری به پارامترهای  $\eta$  و  $L/R$  نیز وابسته هستند. با کاهش  $L/R$  مقدار  $E_L$  افزایش می یابد. همچنین مانند اکستروژن دایره به مربع در اینجا نیز با افزایش  $\eta$  و کاهش  $L/R$  مقدار  $E_L$  افزایش می یابد. در بازه های  $0.5 \leq L/R \leq 3$  ،  $0.5 \leq ar \leq 1$  و  $0.3 \leq \eta \leq 0.6$  حداکثر مقدار  $\bar{E}_L$  در  $L/R = 0.5$  ،  $ar = 0.5$  و  $\eta = 0.4$  رخ می دهد و مقدار آن حدود  $8/3\%$  است. در اکستروژن دایره به بیضی نیز مانند اکستروژن دایره به مستطیل مقدار  $E_\theta$  از مقدار کاهش سطح مقطع مستقل است و تنها به نسبت ظاهری بستگی دارد. هر چه شکل بیضی به دایره نزدیکتر باشد یعنی نسبت ظاهری آن به یک نزدیکتر باشد مقدار  $\bar{E}_\theta$  کمتر می شود. مقدار  $\bar{E}_\theta$  در  $ar = 0.5$  حدود  $12^\circ$  درجه است و در  $ar = 1$  به صفر می رسد.  $\bar{E}_L$  نیز به پارامترهای  $L/R$  و  $ar$  و  $\eta$  وابسته است و با کاهش  $L/R$  کاهش  $ar$  و افزایش  $\eta$  افزایش می یابد. در بازه های  $0.5 \leq L/R \leq 3$  ،  $0.5 \leq ar \leq 1$  و  $0.3 \leq \eta \leq 0.6$  حداکثر مقدار  $\bar{E}_L$  در  $L/R = 0.5$  ،  $ar = 0.5$  و  $\eta = 0.6$  رخ می دهد و مقدار آن در حدود  $6/7\%$  است.

نتایج حاصل از تئوری ارائه شده در بخش پیشین بصورت نمودارهای فشار نسبی اکستروژن تحت تاثیر پارامترهای مختلف از قبیل درصد کاهش سطح مقطع، طول نسبی قالب، شرایط اصطکاکی و پیچیدگی شکل سطح مقطع نهایی (محصول اکستروژن شده) ارائه شده است.

$E_L$  :

$E_L$	مقطع خروجی
صفر	دایره
$1 - \frac{\sqrt{\left(1 - \sqrt{\eta \left( ar \cdot \cos^2 \phi + \frac{\sin^2 \phi}{ar} \right)}\right)^2 + \left(\frac{L}{R}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\eta}{ar}\right)^2 \sin^2 \phi + \left(1 - \sqrt{\eta \cdot or}\right)^2 \cos^2 \phi + \left(\frac{L}{R}\right)^2}}$	بیضی
$1 - \frac{\sqrt{\left(1 - \sqrt{\eta \left( 4 \frac{\phi^2}{\pi} - 2\phi + \frac{\pi}{2} \right)}\right)^2 + \left(\frac{L}{R}\right)^2}}{\sqrt{\left(\sin \phi - \sqrt{2\eta} \frac{\phi}{\sqrt{\pi}}\right)^2 + \left(\cos \phi - \sqrt{2\eta} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\phi}{\sqrt{\pi}}\right)\right)^2 + \left(\frac{L}{R}\right)^2}}$	مربع
$1 - \frac{\sqrt{\left(1 - \sqrt{\eta \left( \frac{\pi}{4} ar + \frac{4}{\pi ar} \phi^2 \right)}\right)^2 + \left(\frac{L}{R}\right)^2}}{\sqrt{\left(\sin \phi - 2\sqrt{\frac{\eta}{\pi}} \phi\right)^2 + \left(\cos \phi - \frac{1}{2} \sqrt{\eta \pi ar}\right)^2} \left(\frac{L}{R}\right)^2}$	$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$
$1 - \frac{\sqrt{\left(1 - \sqrt{\eta \pi \left( \frac{1}{4ar} + ar \left(1 - \frac{2\phi}{\pi}\right)^2 \right)}\right)^2 + \left(\frac{L}{R}\right)^2}}{\sqrt{\left(\sin \phi - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta \pi}{ar}}\right)^2 + \left(\cos \phi - \sqrt{\eta \pi ar} \left[1 - \frac{2\phi}{\pi}\right]\right)^2} \left(\frac{L}{R}\right)^2}$	$\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$
	مستطیل

شرایط اصطکاک ثابت با افزایش میزان درصد کاهش سطح، فشار نسبی اکستروژن افزایش می یابد که حاکی از صحت نتایج ارائه شده است. علاوه براین با مقایسه دو شکل (۶) و (۷) میتوان دریافت که میزان فشار نسبی اکستروژن برای طول قالب کوچکتر، برای همه مقادیر درصد کاهش سطح مقطع و شرایط اصطکاکی گوناگون، بیشتر است. دلیل این امرافزایش کار مربوط به تغییر شکل داخلی برای طول نسبی قالب کوچک تر است.

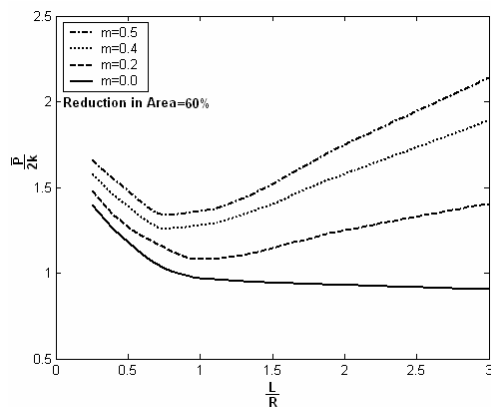
مقادیر فشار نسبی اکستروژن برای شرایط مختلف اصطکاکی و درصد کاهش سطح مقطع ۶۰ درصد برای اکستروژن بیلت مدوربه مقطع مربع شکل در نمودار(۸) نسبت به طول های نسبی مختلف رسم شده اند. ازاین نمودار می توان هم برای تخمین طول منطقه مرده فلز و

اکستروژن مستقیم بیلت های مدور به مقاطع مختلف از قبیل مربع،مستطیل و بیضی در این مقاله مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته اند. همچنین در پایان مقایسه نتایج حاصله با نتایج تئوری دیگران انجام شده است. لذا در ادامه بحث و بررسی یکایک نتایج می پردازیم:

در نمودارهای (۶) و (۷) فشار نسبی اکستروژن بیلت دایره ای به مقطع مربع شکل، نسبت به مقادیر مختلف درصد کاهش سطح مقطع ترسیم شده است. منحنی های ارائه شده برای شرایط اصطکاکی مختلف و دو مقدار طول نسبی قالب ۰/۵ (شکل(۶)) و ۱/۰ (شکل(۷)) ارائه شده اند. همان طور که ملاحظه می شود با افزایش اصطکاک مقادیر فشار نسبی برای یک مقدار درصد کاهش سطح مقطع ثابت افزایش می یابند و همچنین برای

اکستروژن بیلت استوانه ای به مقطع مربع شکل برابر با ۰/۹۵ تخمین زده می شود. براساس تئوری ارائه شده در این مقاله شکل سطوح منطقه مرده فلز مطابق با شکل سطوح جریان هستند. در اینجا سطوح جریان خطی دوگانه بوده و لذا سطوح منطقه مرده فلز نیز خطی دوگانه هستند. در صورتی که مثلاً سطوح دیگری را برای سطوح جریان فرض کنیم منطقه مرده فلز مطابق با آن سطوح خواهد بود.

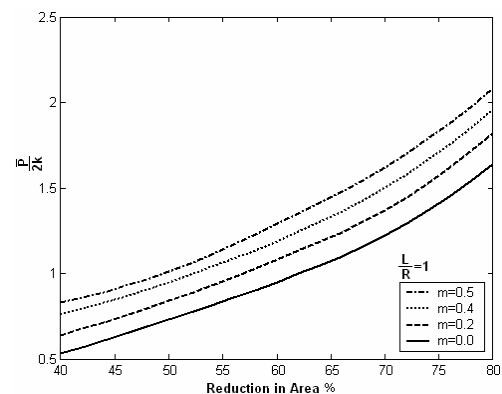
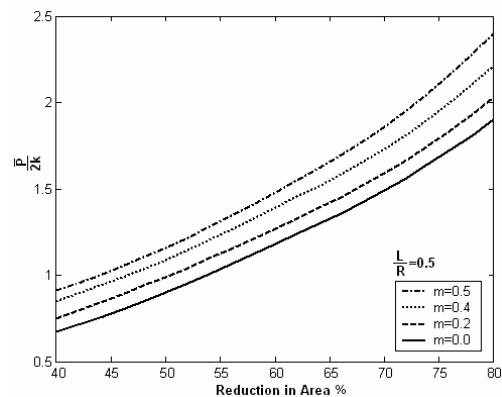
نکته قابل توجه دیگری که در این گونه نمودارها (نمودارهای فشار نسبی اکستروژن نسبت به طول نسبی قالب) با افزایش اصطکاک شکل منحنی برای طول نسبی قالب بزرگتر کاملاً تغییر کرده و فشار نسبی اکستروژن با افزایش طول نسبی قالب با شیب بیشتری افزایش می یابد. دلیل این امر این است که افزایش طول قالب با زبری بیشتر سبب کاهش سرعت مواد و در نتیجه افزایش انرژی اصطکاکی شده و لذا فشار نسبی اکستروژن را برای یک مقدار ثابت درصد کاهش سطح مقطع افزایش می دهد.



%

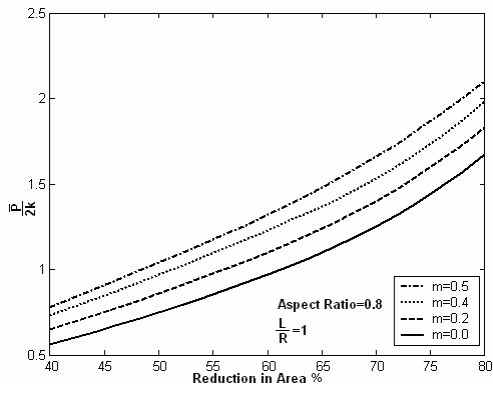
نتایج مربوط به اکستروژن بیلت دایره ای به مقاطع مستطیل شکل در نمودار شکل (۹) ملاحظه می شود. در اینجا مقادیر فشار نسبی اکستروژن نسبت به طول نسبی قالب رسم شده اند. از این نمودار ها نیز برای تحلیل اکستروژن با قالب های تخت و هم برای قالب های همگرای خطی دوگانه می توان استفاده نمود. همانطور که ملاحظه می گردد تاثیر شرایط اصطکاکی برای کاهش سطح مقطع ۷۰ درصد و نسبت ظاهری (نسبت عرض به طول مستطیل) ۰/۸ اعمال شده است. رفتاری شبیه به اکستروژن مقاطع مربعی در اینجا نیز مشاهده می گردد با

هم طول بهینه قالب همگرای دوگانه خطی استفاده نمود. برای مثال برای اصطکاک ۰/۲ طول نسبی بهینه قالب برابر با ۱/۰ می باشد. در واقع حداقل مقدار برای هر منحنی همان طول بهینه قالب محسوب می شود. البته می توان قالب را با طول های بزرگتر و یا کوچک تر از این مقدار ساخت. البته باید توجه نمود که بخاطر ماهیت سطوح جریانی که در تئوری استفاده شده این قالب ها دارای سطوح دوگانه خطی همگرا می باشند.

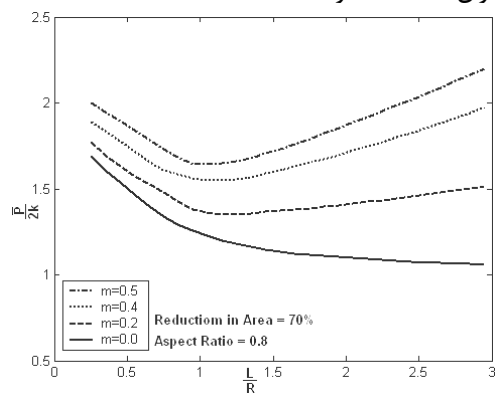


نکته قابل توجه در اینجا این است که از همین نمودار (شکل (۸)) میتوان برای یافتن منطقه مرده فلز در اکستروژن با قالب های تخت نیز استفاده نمود. برای قالب های تخت منطقه مرده فلز در اثر تجمع مواد ایجاد می شود و بین سطح منطقه مرده فلز و ماده ای که جریان دارد در واقع برش رخ می دهد و تنش های برشی حداکثر مقدار خود را دارا هستند لذا در چنین نقطه ای مقدار اصطکاک به حداکثر مقدار خود می رسد و m برابر با ۱/۰ می گردد. در چنین شرایطی از منحنی  $m=1$  (شکل (۸)) استفاده نموده و مقدار طول منطقه مرده فلز برای

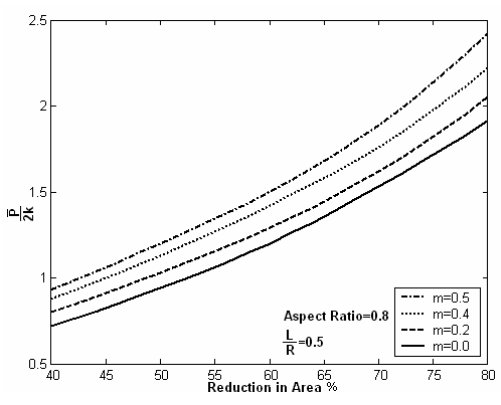
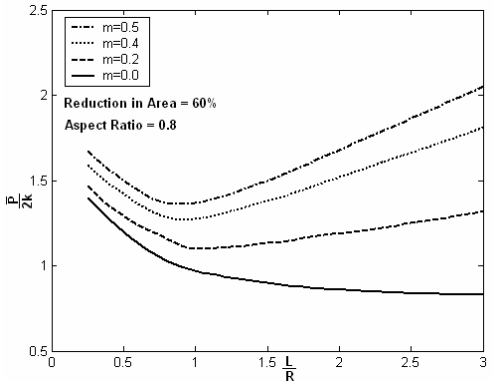




این تفاوت که در اینجا بخاطر پیچیدگی شکل مقادیر فشار نسبی اکستروژن افزایش یافته اند ( تفاوت مقادیر این نمودار را با نمودارهای (۶) و (۸) برای درصد کاهش سطح مقطع ۷۰، شرایط اصطکاکی متفاوت و طول نسبی ۱/۰ می توان مشاهده نمود).

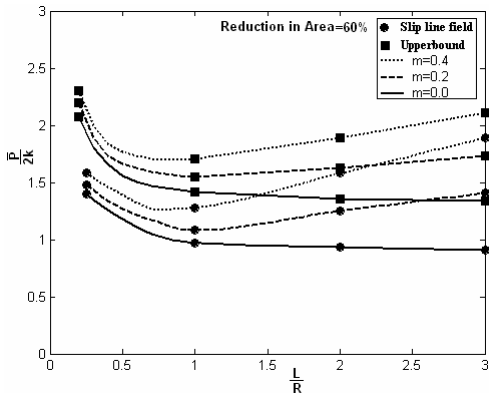
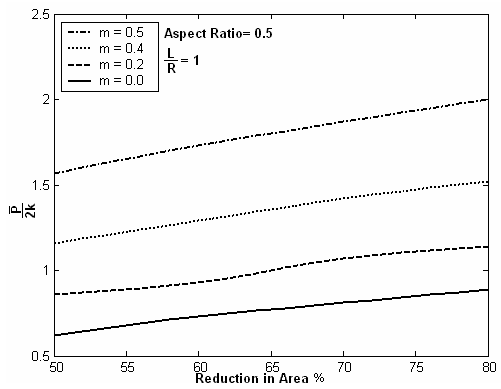
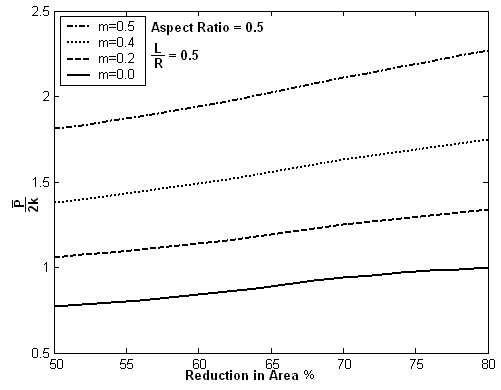
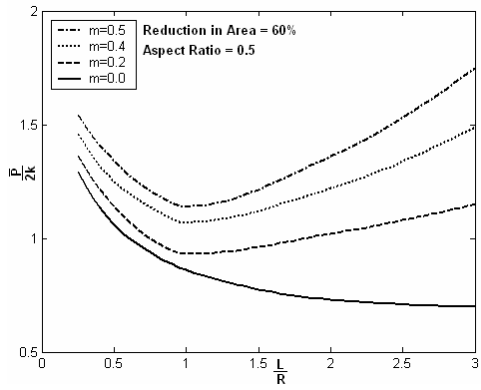


در شکل (۱۲) نیز فشار نسبی اکستروژن بیلت مدور به مقطع بیضی شکل برای مقادیر طول نسبی گوناگون و کاهش مقطع ثابت ۶۰ درصد ونسبت ظاهری ۰/۸ برای شرایط گوناگون اصطکاکی ترسیم شده است. همانطور که ملاحظه می گردد طول منطقه مرده فلز برای قالب های تخت نیز از این نمودار قابل استخراج است که با استفاده از منحنی  $m=1.0$  برابر با ۰/۸۵ است.



برای بررسی تاثیر نسبت ظاهری بر فرایند اکستروژن بیلت مدور به مقطع بیضی شکل نمودارهای (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) برای نسبت های ظاهری ۰/۵ رسم شده اند. ملاحظه می گردد که مابقی پارامترها در این سه نمودار مشابه نمودارهای (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) هستند. با کاهش نسبت ظاهری در واقع پیچیدگی شکل بیشتر شده و با مقایسه نمودارها با هم می توان دریافت که فشار نسبی اکستروژن با کاهش نسبت ظاهری (افزایش پیچیدگی شکل) افزایش می یابد.

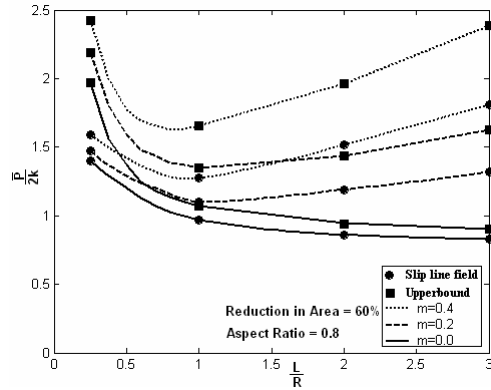
نمودار فشار نسبی اکستروژن بیلت مدور به مقطع بیضی برحسب درصد کاهش سطح مقطع برای نسبت ظاهری ۰/۸ و طول نسبی قالب ۰,۵ در شکل (۱۰) و طول نسبی قالب ۱/۰ در شکل (۱۱) مشاهده می شود. ملاحظه می گردد که با افزایش اصطکاک و برای یک درصد کاهش سطح مقطع ثابت، فشار اکستروژن افزایش می یابد. با افزایش طول نسبی قالب نیز اگر چه انرژی مربوط به اصطکاک افزایش می یابد اما انرژی مربوط به تغییر شکل داخلی کاهش می یابد و در مجموع باعث می شود تا میزان فشار نسبی اکستروژن کاهش یابد.



در نمودار های شکل های (۱۰) تا (۱۲) مقدار خطای زاویه ای میانگین ۴/۱ درجه است. با توجه به محدوده در نظر گرفته شده در نمودار های ۱۰ تا ۱۲ مقدار خطای طولی میانگین  $\bar{E}_L$  کمتر از ۱٪ است. در صورتی که نسبت ظاهری کاهش یابد خطای زاویه ای افزایش می یابد نمودار های ارائه شده در اشکال (۱۳) تا (۱۵) مربوط به حالتی است که در آن نسبت ظاهری برابر ۰/۵ است. مقدار  $\bar{E}_\theta$  در این نمودار ها برابر ۱۲/۳ درجه است. حداکثر خطای طولی میانگین در نمودار های شکل های (۱۳) و (۱۴) به ترتیب ۵/۹٪ و ۱/۹٪ است. این مقدار در نمودار شکل (۱۵) ۹/۹٪ است که در  $L/R = 0.25$  رخ می دهد. در این نمودار با افزایش  $L/R$  مقدار  $\bar{E}_L$  کاهش می یابد به نحوی که در  $L/R = 0.5$  به ۴/۸٪ و در  $L/R = 1$  به ۱/۶٪ می رسد.

( ) ( )

( ) ( )



[ ]

( ) ( )

)

( ) ([ ] [ ] [ ]

فشار اکستروژن (MPa)	روش اندازه گیری
۳۰۶	مرجع [۱۸] تجربی
۳۲۵	مرجع [۲۰] تئوری
۳۱۷	مرجع [۱۸] تئوری
۲۹۸	نویسنده (تئوری)

طول نسبی قالب=۲، نسبت کاهش سطح مقطع=۶۰٪، نسبت ظاهری=۰،۶۷،  $m = 0.12$

( ) % )

فشار اکستروژن (MPa)	روش اندازه گیری
۳۱۷	مرجع [۱۸] تجربی
۴۰۷	مرجع [۲۰] تئوری
۴۱۷	مرجع [۲۱] تئوری
۴۰۱	نویسنده (تئوری)

	: P	همچنین نزدیکی نتایج بدست آمده با نتایج آزمایش دلیل
	: k	دیگری بر دقت نتایج است. از آنجا که روش میدان خطوط
	: $r, \varphi, z$	لغزش خود حد بالایی از فشار نسبی اکستروژن را بدست
$\varphi$	: $\theta$	می دهد، اثر جایگزینی سطوح جریان تاب خورده با سطوح
	: u, q, t	تخت که موجب کاهش فشار نسبی اکستروژن می شود به
	: $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_3$	نوعی جبران می شود. از قابلیت‌های روش ارائه شده در این
	: f, g, h	مقاله می توان به قابلیت اعمال آن برای تمام مسائل
	: L	اکستروژن با سطوح جریان خطی صرفنظر از شکل مقطع
	: a, b	خروجی اشاره کرد. عمده ترین کاستی این روش نیز
	: $R, R'$	افزایش خطا برای نسبت های ظاهری کوچک است.
	: n	موارد ذیل در جهت توسعه و بهبود روش ارائه شده در این
	: $E_\theta$	مقاله پیشنهاد می شود:
	: $E_L$	انجام پژوهشی آزمایشگاهی جهت تعیین محدوده قابل
	: $\eta$	قبول خطاهای زاویه ای و طولی.
(Friction Factor)	: m	- اعمال روش فوق برای سطوح جریان تشکیل یافته از
		منحنی های غیر خطی.
		- استفاده از روش ارائه شده در این مقاله برای سایر
		فرآیند های شکل دهی فلزات.

:  $\vec{r}$

:  $\vec{r}_0 \vec{r}_1 \vec{r}_2 \vec{r}_3$

## مراجع

- 1 - Chitkara, N. R. and Butt, M. A. (1992). "A general numerical method of construction of axisymmetric slip-line-field." *Int.J.Mech.Sci.* Vol. 34, Issue11, PP 833-848.
- 2 - Prandtl, L. (1923). "On the penetration hardness of plastic materials and the hardness of indenters." *Z.Angew.Math.Mech.* Vol. 3, No. 15, PP 153-162.
- 3 - Hencky, H. (1923). "Concerning a few statically determinant cases in plastic bodies." *Z.Angew.Math.Mech.*, Vol. 3, PP. 241.
- 4 - Geiringer, H. (1930). "Complete solution to the plane plasticity problems." *Proc. 3<sup>rd</sup>. Int. Congers. Appl. Mech.* Vol. 2, No.185, PP 292-317.
- 5 - Hill, R. (1950). *Mathematical theory of plasticity*, Oxford University Press.
- 6 - Prager, W. and Hodge, P. G. (1951). *Theory of perfectly plastic solids*, Wiley, New York.
- 7 - Johnson, W., Sowerby, R. and Venter, R. D. (1982). *Plane strain slip-line fields for metal deformation processes*, Pergamon Press.
- 8 - Dewhrst, P. and Collins, F. (1973). "A matrix technique for constructing slip-line field solution to a class of plane strain plasticity problems." *Int.J.Numer.Math. Engng*, Vol. 7, No. 357, PP 437-445.
- 9 - Green, A. P. (1945). "A theory of plastic yielding due to the bending of cantilever and fix ended beams. –Part I." *J. Mech. Phys. Solids*. Vol. 3, No. 1, PP 216-222 .

- 
- 10 - Green, A. P. (1945). "A theory of plastic yielding due to the bending of cantilever and fix ended beams. – Part II." *J. Mech. Phys. Solids*. Vol. 3, No. 143. PP 321-330.
- 11 - Ranshi, A. S., Chitkara, N. R. and Johnson, W. (1974). "Plane stress-plastic collapse loads for tapered cantilevers and hunched beams." *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 16, No. 867, PP329-343.
- 12 - Shield, R. T. (1955). "On the plastic flow of metals under the conditions of axial symmetry." *Proc. R. Soc. A* Vol. 233, No. 267. PP 455-469.
- 13 - Lippmann, H. (1962). "Principal line theory of axially symmetric plastic deformation." *J. Mech. Phys. Solids*. Vol. 10, Issue2, PP 111-122.
- 14 - Lippmann, H. (1965). "Statics and dynamics of axially-symmetric plastic flow." *J. Mech. Phys. Solids*. Vol. 13, Issue 1, PP 29-39.
- 15 - Chitkara, N. R. and Butt, M. A. (1992). "Numerical construction of axisymmetric slip-line fields for indentation of thick block by rigid conical indenters and friction at the tool-metal interface." *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 34, No. 849. PP 849-862.
- 16 - Chitkara, N. R. and Butt, M. A. (1992). "General numerical method of construction of axisymmetric slip-line fields " *Int.J.Mech.Sci.*34 (11), pp. 833-848.
- 17 - Chitkara, N. R. and Butt, M. A. (1997). "Axi-symmetric tube extrusion through a flat-faced circular die: Numerical construction of slip-line fields and associated velocity fields" *Int.J.Mech.Sci.*39 (3), pp. 341-366.
- 18 - Abrinia, K. (1991). *A general upper solution for three-dimensional extrusion of shaped section using CAD-CAM bilinear and advance surface dies*, Ph.D. Thesis, University of Manchester.
- 19 - Seweryn, A. (1992). "Analysis of axisymmetric steady-state extrusion through dies of large cone angle by the slip-line method." *Int. J. Mech. Sci.* Vol 34, Issue 11, PP.891, 900.
- 20 - Yang, Y. D. and Han, H. C. (1986). "A generalized method for analysis of three dimensional extrusion of arbitrarily shape section." *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 28, Issue 8, PP 517-534.
- 21 - Abrinia, K. and Bloorbar, H. (2000). *A new improved upper bound solution for the extrusion of shaped sections using CAD techniques*. COMPLAS VI Conference- Barcelona Spain.

## واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 - Extrusion
  - 2 - Indentation
  - 3 - Plane strain
  - 4 - Rigid Perfectly Plastic
  - 5 - Isotropic
  - 6 - Von mises
  - 7 - St-Venant
-