

*

(تاریخ دریافت ۸۳/۹/۲۸، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۵/۳/۶، تاریخ تصوب ۸۵/۴/۳)

با استفاده از مدل سطح متوسط دریا^۱، بدست آمده از مشاهدات ارتفاع سنجی ماهواره‌ای، و ضرائب ژئوپتانسیلی بر حسب هارمونیک-های بیضوی، حاصل از ماموریت‌های ثقل سنجی ماهواره‌ای، پتانسیل ثقل بر روی شبکه‌ای $1^\circ \times 1^\circ$ متشکل از ۳۳۴۸۶ نقطه در سطح آب‌های جهان محاسبه و میانگین مقادیر این پتانسیل‌ها به عنوان پتانسیل ژئوئید^۲، ارائه گردیده است. از آنجائی که میانگین، یک برآورد کننده کمترین مربعات می‌باشد، پتانسیل حاصل از روش فوق الذکر منطبق بر تعریف ژئوئید به عنوان "سطح هم‌پتانسیلی که سطح متوسط آب‌های جهانی را به صورت کمترین مربعات تقریب می‌کند" بر مبنای پیشنهاد گوس و لیستینگ^۳ بوده و بدین ترتیب مقدار $W_0 = 62,636,855.78 \pm 0.1 \text{m}^2/\text{s}^2$ به عنوان برآورد جهانی پتانسیل ژئوئید و دستاورد اصلی این تحقیق ارائه شده است. در اختیار داشتن: ۱- نقاطی با مختصات معلوم بر روی سطح متوسط دریا، ۲- پتانسیل ژئوئید و ۳- پتانسیل محاسبه شده بر روی سطح متوسط دریا، امکان محاسبه اختلاف پتانسیل سطح متوسط دریا با پتانسیل ژئوئید را پدید آورده و فرمول برونز^۴ به عنوان ابزار تبدیل کننده اختلاف پتانسیل به اختلاف ارتفاع، مورد استفاده قرار گرفته و به این ترتیب توپوگرافی سطح دریا^۵، به "عنوان جدائی ژئوئید و سطح متوسط دریا" محاسبه گردیده است. بدین‌سان برآوردی جدید از توپوگرافی سطح دریا و ژئوئید در کل آب‌های جهان در زمره دستاوردهای جانبی این تحقیق قرار گرفته‌اند.

: پتانسیل ژئوئید - فرمول برونز- ژئوئید - سطح متوسط دریا - توپوگرافی سطح دریا - ارتفاع

سنجی ماهواره‌ای

متعامد یکه. ۲- تولید سطح متوسط با استفاده از مدل مرحله قبل بر روی شبکه‌ای منظم در محدوده آب‌های جهانی. ۳- تعیین پتانسیل شتاب ثقل در نقاط شبکه ذکر شده در مرحله قبل با استفاده از بسط هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ به اضافه پتانسیل گریز از مرکز در سیستم مختصات بیضوی. ۴- محاسبه میانگین پتانسیل شتاب ثقل در شبکه یاد شده، که طبق تعریف گوس-لیستینگ همان پتانسیل ژئوئید می‌باشد. در این تحقیق پس از تعیین پتانسیل ژئوئید، تعیین توپوگرافی سطح دریا (SST) و ژئوئید جهانی به صورت ذیل اقدام گردید: (الف) با تعیین اختلاف پتانسیل ثقل سطح متوسط دریا با پتانسیل ژئوئید و انتقال این اختلاف پتانسیل از فضای پتانسیل به فضای هندسی، با استفاده از فرمول برونز، توپوگرافی سطح دریا تعیین گردید. (ب) از مجموع

پتانسیل ژئوئید به عنوان یکی از کمیت‌های بنیادی ژئودزی همواره مورد توجه ژئودزین‌ها بوده و جهت تعیین مقدار عددی آن تلاش‌های بسیاری صورت گرفته که به عنوان نمونه‌هایی از فعالیت‌های اخیر می‌توان به منابع [۳-۹، ۱۷] اشاره نمود. نکته قابل توجه در این خصوص آن است که: پتانسیل جزء کمیت‌های قابل اندازه‌گیری نبوده و تنها محاسبه آن از طریق حل مسائل مقدار مرزی میدان ثقل زمین بر اساس کمیت‌های ثقلی قابل مشاهده امکان‌پذیر است. بدین خاطر در کلیه مقالات ذکر شده پتانسیل ژئوئید بر اساس کمیت‌های دیگر محاسبه گردیده است. روش ما با توجه به تعریف گوس-لیستینگ [۱۶، ۱۱] مبتنی بر مراحل ذیل است: ۱- محاسبه یک مدل جهانی جدید برای سطح متوسط آب‌های جهانی با استفاده از مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای و بر اساس توابع پایه

استفاده را مشخص، و در ادامه نتایج عددی حاصل را ارائه خواهیم نمود.

تحت شرایط ویژه^۶ پتانسیل جاذبه زمین را می‌توان به عنوان جواب ویژه^۷ معادله دیفرانسیل لاپلاس بر حسب مختصات بیضوی ژاکوبی^۸ $\{\lambda, \phi, u\}$ به صورت ذیل بدست آورد [۱۸ - ۲۰]:

$$U(\lambda, \phi, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n u_{nm} \frac{Q_{n|m}^*(\frac{u}{\varepsilon})}{Q_{n|m}^*(\frac{b}{\varepsilon})} e_{nm}(\lambda, \phi) \quad (1)$$

در رابطه (۱) ضرائب هارمونیکهای بیضوی، $e_{nm}(\lambda, \phi)$ توابع نرمالیزه شده لژاندر نوع دوم، $Q_{n|m}^*(\frac{u}{\varepsilon})$ هارمونیکهای سطحی بیضوی با تعریف ذیل

$$e_{nm}(\lambda, \phi) = p_{n|m}^*(\sin \phi) \begin{cases} \cos m\lambda & \forall m \geq 0 \\ \sin |m|\lambda & \forall m < 0 \end{cases} \quad (2)$$

و $\{\lambda, \phi, u\}$ مختصات بیضوی ژاکوبی بوده که با مختصات کارتزین دارای روابط مستقیم و معکوس به صورت ذیل می‌باشند:

"روابط مستقیم"

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \cos \phi \cos \lambda \\ y &= \sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \cos \phi \sin \lambda \\ z &= u \sin \phi \end{aligned} \quad (3)$$

"روابط معکوس"

$$\lambda = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{for } x > 0 \text{ and } y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{for } x < 0 \text{ and } y \neq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & \text{for } x > 0 \text{ and } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{for } x = 0 \text{ and } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{for } x = 0 \text{ and } y < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\phi = (\operatorname{sgn} z) \arcsin \left\{ \frac{1}{2\varepsilon^2} \left[\varepsilon^2 - (x^2 + y^2 + z^2) + \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - \varepsilon^2)^2 + 4\varepsilon^2 z^2} \right] \right\}^{1/2} \quad (5)$$

$$u = \left\{ \frac{1}{2} \left[x^2 + y^2 + z^2 - \varepsilon^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - \varepsilon^2)^2 + 4\varepsilon^2 z^2} \right] \right\}^{1/2} \quad (6)$$

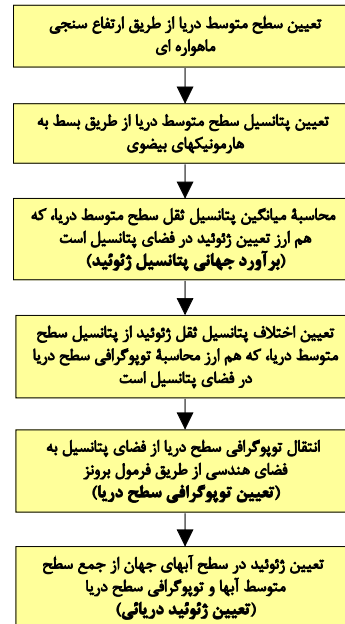
در رابطه (۲)، $p_{n|m}^*(\sin \phi)$ توابع نرمالیزه شده لژاندر نوع اول و در رابطه (۳) $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}$ با تعریف تابع ساینیوم^۹ $\operatorname{sgn} z$ تابع ساینیوم^۹ با مرکز خطی است. در رابطه (۵) $\operatorname{sgn} z$ تابع ساینیوم^۹ با تعریف ذیل می‌باشد:

$$\operatorname{sgn} z = \begin{cases} -1 & z < 0 \\ 0 & z = 0 \\ 1 & z > 0 \end{cases} \quad (7)$$

با افزودن پتانسیل گریز از مرکز بر حسب مختصات بیضوی ژاکوبی $\{\lambda, \phi, u\}$

$$V(\lambda, \phi) = \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi \quad (8)$$

توپوگرافی سطح دریا و سطح متوسط دریا، یک ژئوئید جهانی برای سطح آبهای جهان محاسبه شد. برای تشریح بهتر روش تحقیق، به نمودار جعبه ای شکل (۱) رجوع می‌نمائیم.



با توجه به نمودار جعبه ای شکل (۱) نکته اصلی در این روش در استفاده از بسط به هارمونیکهای بیضوی برای انتقال سطح متوسط دریا از فضای هندسی به فضای پتانسیل و تعیین ژئوئید در فضای پتانسیل، تحت میانگین پتانسیل سطح متوسط دریا است که محصول اصلی این تحقیق به شمار می‌رود. در اختیار داشتن پتانسیل سطح متوسط دریا و پتانسیل ژئوئید این امکان را پدید آورده تا در فضای پتانسیل بتوانیم توپوگرافی سطح دریا را محاسبه و سپس از طریق فرمول برونز این اختلاف پتانسیل را به فضای هندسی منتقل و بدین ترتیب توپوگرافی سطح دریا را در فضای هندسی بدست آوریم. این خروجی اولین محصول جانبی تحقیق حاضر می‌باشد. در نهایت محاسبه ژئوئید جهانی با در اختیار داشتن سطح متوسط دریا و توپوگرافی سطح دریا در فضای هندسی صورت گرفته که محصول جانبی دوم را ایجاد کرده است. انجام محاسبات تعیین پتانسیل ژئوئید در فضای پتانسیل و نیز استفاده از اطلاعات ارتفاع سطحی ماهواره‌ای برای تعیین سطح متوسط دریا در کل آبهای جهان از نوآوری‌های این تحقیق نسبت به مرجع [۳] محسوب می‌گردد. با این مقدمه به بخش آتی رفته و جزئیات ریاضی روش مورد

طول و عرض جغرافیائی و ارتفاع بیضوی سطح متوسط دریا در ۳۳۴۸۶ نقطه یاد شده به کمک رابطه ذیل به مختصات کارتزین تبدیل شده‌اند:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N+h) \cos b \cos l \\ (N+h) \cos b \sin l \\ (N(1-e^2)+h) \sin b \end{pmatrix} \quad (11)$$

در رابطه (۱۱) $e = \sqrt{a^2 - b^2} / a$ فشردگی اول، N شعاع انحنای مقطع قائم اولیه با تعریف $N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 b}$ و $\{l, b, h\}$ مختصات جغرافیائی (مختصات بیضوی گوسی) می‌باشند. با به دست آوردن مختصات کارتزین، می‌توان مختصات بیضوی ژاکوبی را از روابط (۴)، (۵)، (۶) و (۷) محاسبه نموده و بدین ترتیب راه برای بکارگیری رابطه (۹) به منظور محاسبه پتانسیل ثقل در ۳۳۴۸۶ نقطه شکل (۲) مهیا می‌گردد. پس از محاسبه پتانسیل در نقاط یاد شده می‌توان پتانسیل ژئوئید را از طریق میانگین پتانسیل‌های محاسبه شده در نقاط واقع بر سطح متوسط دریا به دست آورد. نتیجه محاسبات این تحقیق در این مورد مقدار $W_0 = 62636855.78 \text{ m}^2/\text{s}^2$ برای پتانسیل ژئوئید با انحراف معیار $\sigma_{W_0} = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}^2$ است که در انجام این محاسبات از مقادیر بنیادی جدول (۱) استفاده شده است. جدول (۲) نتیجه محاسبات برای پتانسیل ژئوئید را در مقابل نتایج دیگران نشان می‌دهد.

پس از تعیین پتانسیل ژئوئید می‌توان اختلاف این پتانسیل را از پتانسیل محاسبه شده برای نقاط بر روی سطح متوسط دریا محاسبه نموده و بدین ترتیب توپوگرافی سطح آب دریا را در فضای پتانسیل به دست آورد.

$$\Delta W_i(SST) = W_i(MSL) - W_0 \quad (12)$$

این اختلاف پتانسیل ناشی از فاصله بین ژئوئید و سطح متوسط دریا است که از طریق فرمول برونز بیضوی قابل انتقال به فضای هندسی و تعیین توپوگرافی سطح دریا (SST) است.

به پتانسیل ثقل خواهیم رسید.

$$W(\lambda, \phi, u) = U(\lambda, \phi, u) + V(\lambda, \phi, u) \quad (9)$$

در رابطه (۸) ω سرعت دورانی زمین است.

بسط پتانسیل جاذبه تا درجه و مرتبه بینهایت نیازمند مشاهدات ثقلی با تراکم بینهایت بوده و بدین لحاظ عملاً می‌بایست به این بسط تا درجه و مرتبه محدودی قناعت کرد. در دریاها از آن جایی که جرم‌های خارج بیضوی بسیار اندک و قابل اغماض‌اند، بسط تا درجه و مرتبه ۳۶۰ می‌تواند میدان جاذبه دریائی را به خوبی بیان نماید. ضرائب هارمونیک‌های بیضوی به کار برده شده در این جا حاصل محاسبات اردلان و گرافارد [۲] بر اساس روابط ترانسفرماسیون ضرائب هارمونیک‌های کروی به هارمونیک‌های بیضوی [۱۲، ۱۳، ۱۵] می‌باشد.

در مرجع [۲۱] اردلان و هاشمی مدلی برای تغییرات جزر و مدی و سطح متوسط دریا بر اساس مشاهدات ارتفاع سنجی ماهواره‌ای توپکس-پوزایدون بر مبنای توابع پایه متعامد در دریاها ارائه کرده‌اند، که در اینجا مدل سطح متوسط دریا، نقطه شروع محاسبات ما را تشکیل می‌دهد.

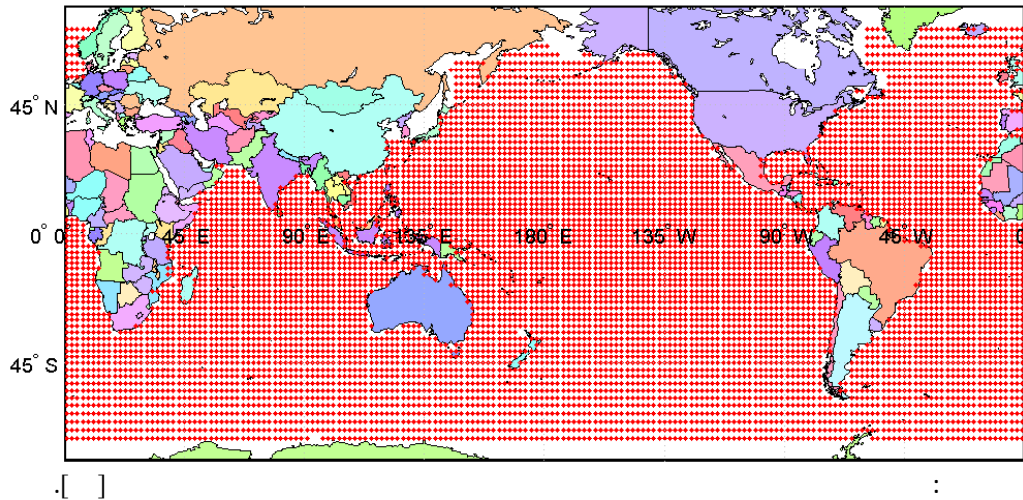
این مدل به فرم ذیل می‌باشد:

$$MSL(l, b) = U_0(l, b) \quad (10)$$

در رابطه (۱۰)، $U_0(l, b)$ بیانگر سطح متوسط دریا بر حسب طول جغرافیائی l و عرض جغرافیائی b است.

به کمک مدل (۱۰) مستخرج از مرجع [۲۱] بر روی شبکه‌ای منظم به فواصل $1^\circ \times 1^\circ$ در تعداد ۳۳۴۸۶ نقطه، ارتفاع بیضوی سطح متوسط دریا محاسبه گردید. شکل (۲) پراکنندگی این نقاط را در سطح کل آبهای جهان نشان می‌دهد.

[]	:	a	$6378136.701(m)$
[]	:	b	$6356751.661(m)$
[]	:	ω	$7.292115 \times 10^{-5} (rad / sec)$
[] ¹⁰	:	GM	$3986004.415 \times 10^8 (km^3 / s^2)$



محقق	پتانسیل ژئوئید W_0 (m^2/s^2)	منبع اطلاعات و روش محاسبه
نشورنی و شیمان ¹¹ [۱۷]	62636857.5 ± 1.0	ارتفاع سنجی ماهواره‌ای
بوشا ¹² و همکاران [۴]	62636855.72 ± 0.5	ارتفاع سنجی ماهواره‌ای و داده‌های جزر و مد سنج‌های ساحلی
بوشا و همکاران [۵]	62636855.80 ± 0.5	ارتفاع سنجی ماهواره‌ای و داده‌های جزر و مد سنج‌های ساحلی
گرافارند ¹³ و اردلان [۹]	62636855.8 ± 3.6	داده‌های جزر و مد سنج‌های ساحلی دریای بالتیک و مشاهدات GPS پروژه تعیین سطح تراز آب دریای بالتیک در اپوک دوم و بسط هارمونیک‌های بیضوی
بوشا و همکاران [۶]	62636855.611 ± 0.5	ارتفاع سنجی ماهواره‌ای توپکس-پوزایدن
بوشا و همکاران [۸]	62636856.0 ± 0.5	ارتفاع سنجی ماهواره‌ای توپکس-پوزایدن
اردلان و همکاران [۳]	62636855.75 ± 0.21	داده‌های جزر و مد سنج‌های ساحلی دریای بالتیک و مشاهدات GPS پروژه تعیین سطح تراز آب دریای بالتیک در اپوک‌های ۱، ۲ و ۳ و بسط هارمونیک‌های بیضوی
نگارندگان حاضر	62636855.78 ± 0.1	۱۱ سال اطلاعات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای توپکس-پوزایدن و بسط هارمونیک‌های بیضوی

بیضوی نقطه‌ای واقع بر سطح متوسط دریا، و h_{SST} فاصله بین ژئوئید و MSL یا همان SST است. شکل (۴) نشان دهنده ژئوئید محاسبه شده در این تحقیق نسبت به بیضوی رفرانس WGD2000 می‌باشد. جهت کنترل ژئوئید حاصل در این تحقیق مقایسه ای با ژئوئید حاصل از بسط به هارمونیک های بیضوی صورت گرفته است. شکل (۵) نشان دهنده ژئوئید حاصل از بسط به هارمونیک های بیضوی و شکل (۶) و جدول (۳) نشان دهنده اختلاف بین این دو ژئوئید است. همان گونه که در جدول (۳) ملاحظه می‌گردد، میانگین اختلاف بین دو ژئوئید ۰/۰۶۵ متر بوده که تقریباً در محدوده دقت مشاهدات ارتفاع سنجی ماهواره‌ای است. میانگین اختلاف بین دو ژئوئید می‌تواند کنترل خوبی بر دقت کل محاسبات به شمار رود.

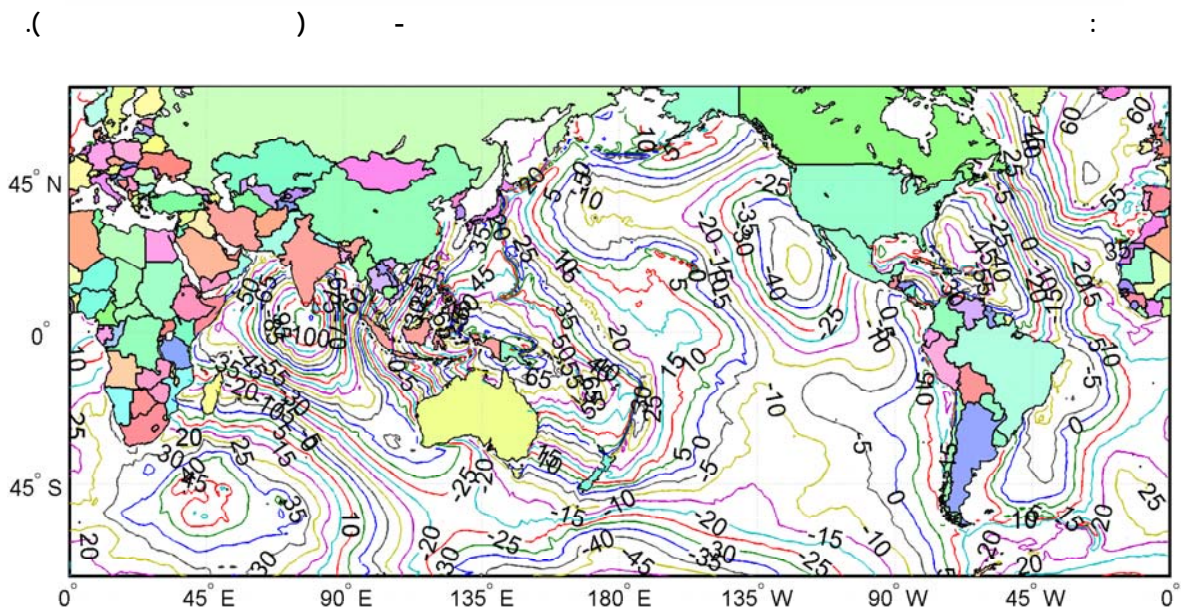
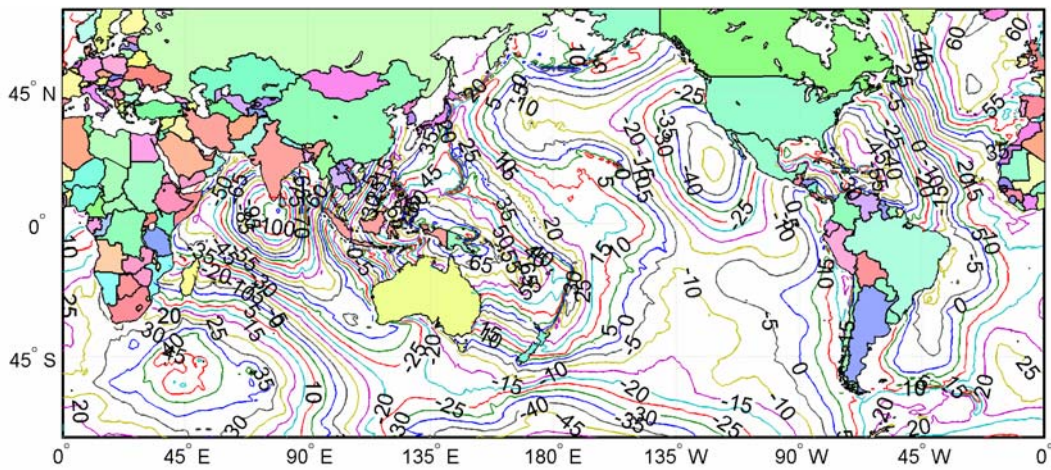
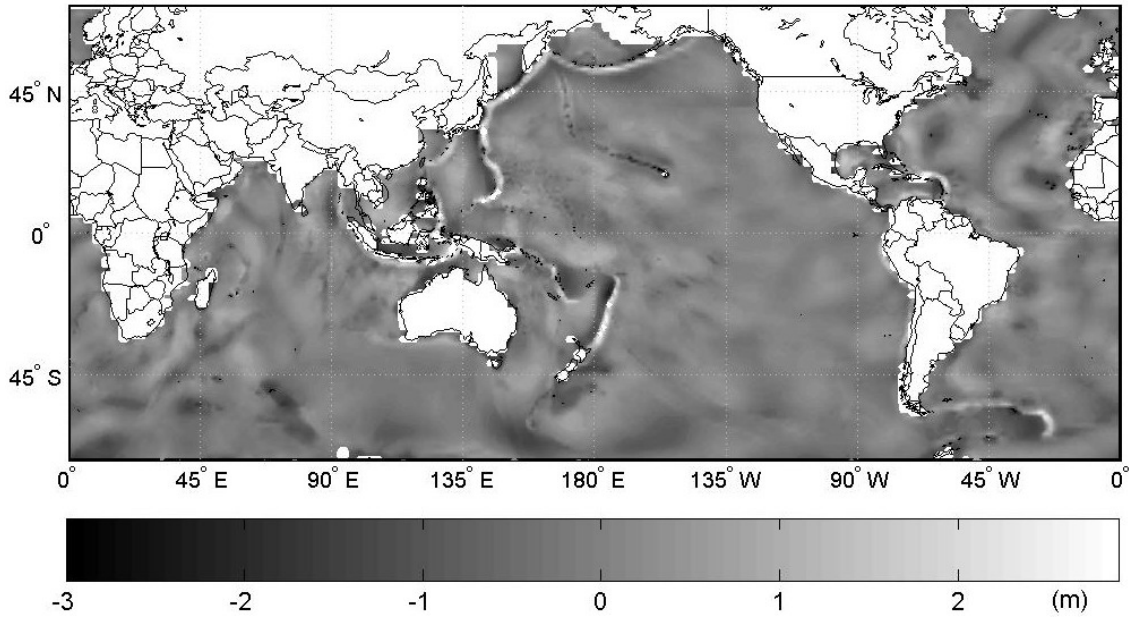
فرمول برونز بیضوی غیر خطی بر اساس مرجع [۱] به صورت ذیل قابل ارائه است.

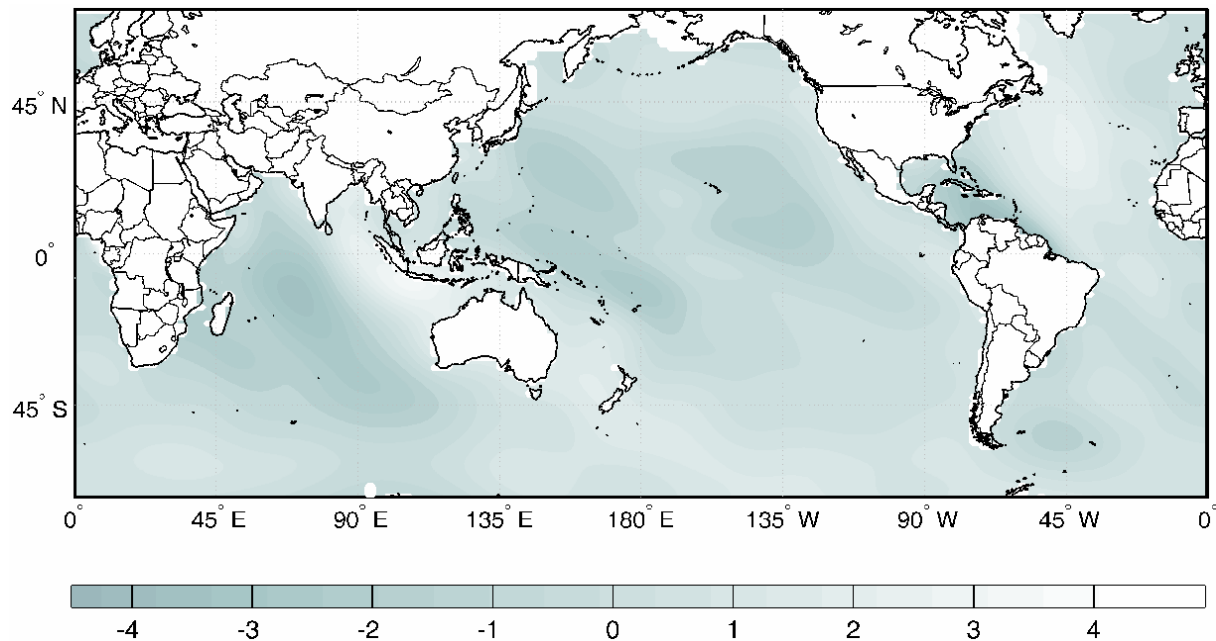
$$h = \frac{(u^2 + \varepsilon^2) \left(\frac{u^2 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} - \cos^2 \phi \right)}{gm} \Delta W - \frac{1}{2} \frac{(u^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} u [\varepsilon^2 \cos^2 \phi - 2u^2 - 2\varepsilon^2]}{(gm)^2 \left(\frac{u^2 + \varepsilon^2 - \varepsilon^2 \cos^2 \phi}{u^2 + \varepsilon^2} \right)} \Delta W^2 \quad (13)$$

شکل (۳) نشان دهنده SST حاصل از محاسبات این تحقیق می‌باشد. با معلوم بودن SST و MSL می‌توان طبق رابطه ذیل به ارتفاع ژئوئید رسید.

$$N = h_{MSL} + h_{SST} \quad (14)$$

در رابطه (۱۴) N ارتفاع ژئوئید، h_{MSL} ارتفاع





۱۴۰۳۴	تعداد نقاط
۴/۵۰۴- متر	مینیمم اختلاف
۴/۹۲۷ متر	ماکزیمم اختلاف
۰/۰۶۵ متر	میانگین اختلاف
۰/۳۶۸ متر	انحراف معیار اختلافات

بدست آورده و سپس از طریق فرمول برونز این اختلاف پتانسیل را به فضای هندسی منتقل و بدین ترتیب توپوگرافی سطح دریا را در فضای هندسی بدست آوریم که در این تحقیق اولین محصول جانبی است. نهایتاً محاسبه ژئوئید جهانی با در اختیار داشتن سطح متوسط دریا و توپوگرافی سطح دریا در فضای هندسی صورت گرفته است و بدین طریق محصول جانبی دوم این تحقیق حاصل گردیده است. انجام محاسبات تعیین پتانسیل ژئوئید در فضای پتانسیل و نیز استفاده از اطلاعات ارتفاع سنجی ماهواره‌ای برای تعیین سطح متوسط دریا برای کل آبهای جهان از نوآوری‌های این تحقیق است.

این پژوهش با استفاده از اعتبارات دانشگاه تهران و به عنوان طرح شماره ۶۲۱/۳/۱۲۰۶ انجام شده است که بدین وسیله مراتب تشکر و قدرانی نویسندگان از دانشگاه

در این مقاله با استفاده از ۱۱ سال مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای توپکس-پوزایدون پتانسیل ژئوئید محاسبه گردیده است. با توجه به دقت روش و تطابق کامل آن بر تعریف ژئوئید، روش ارائه شده به عنوان راه حلی برای برآورد جهانی پتانسیل ژئوئید پیشنهاد می‌گردد. مقدار برآورد شده برای پتانسیل بر اساس جدیدترین پارامترهای بنیادی [۱۴] و محاسبات انجام شده مقدار $62636855.78 \pm 0.1 \text{m}^2/\text{s}^2$ می‌باشد. نکته اصلی در این روش در استفاده از بسط به هارمونیک‌های بیضوی برای انتقال سطح متوسط دریا از فضای هندسی به فضای پتانسیل و تعیین ژئوئید در فضای پتانسیل، تحت میانگین پتانسیل سطح متوسط دریا است که محصول اصلی این تحقیق به شمار می‌رود. در اختیار داشتن پتانسیل سطح متوسط دریا و پتانسیل ژئوئید این امکان را پدید می‌آورد تا در فضای پتانسیل بتوانیم توپوگرافی سطح دریا را

- 1 - Ardalan, A. A. (1999). *High Resolution Regional Geoid Computation in the World Geodetic Datum 2000 based upon collocation of linearized observational functionals of the type GPS, gravity potential and gravity intensity*, Ph.D. thesis, Stuttgart University. <http://opus.uni-stuttgart.de/opus/volltexte/2000/665/>
- 2 - Ardalan, A. A. and Grafarend, E. W. (2000). Reference ellipsoidal gravity potential field and gravity intensity field of degree/order 360/360 (Manual of using ellipsoidal harmonic coefficients "ellipfree.dat" and ellipmean.dat"). <http://www.uni-stuttgart.de/gi/research/index.html#Projects>.
- 3 - Ardalan, A. A., Grafarend, E. W. and Kakkuri, J. (2002). "National height datum, the Gauss-Listing geoid level value W_0 and its time variation \dot{W}_0 ." *Journal of Geodesy*, Vol. 76, PP. 1-28.
- 4 - Burša, M., Kouba, J., Raděj, K., True, S. A., Vátrt, V. and Vojtíšková, M. (1997a). "Monitoring geoidal potential on the basis of TOPEX/POSEIDON altimeter data and EGM96." *Paper presented at scientific assembly of IAG*, Rio de Janeiro 1997
- 5 - Burša, M., Raděj, K., Šíma, Z., True, S. A. and Vátrt, V. (1997b). "Determination of the geopotential scale factor from TOPEX/POSEIDON satellite altimetry." *Stud Geoph et Geod*, Vol. 14, PP. 203-216.
- 6 - Burša, M., Kouba, J., Raděj, K., True, S. A., Vátrt, V. and Vojtíšková, M. (1998). "Mean earth's equipotential surface from TOPEX/POSEIDON altimetry." *Studia geoph Et geod*, Vol. 42, PP. 459-466.
- 7 - Burša, M., Kouba, J., Müller, A., Raděj, K., True, S. A., Vátrt, V. and Vojtíšková, M. (1999). "Differences between mean sea levels for the pacific, Atlantic and Indian oceans from TOPEX/POSEIDON altimetry." *Studia geoph. et geod*, Vol. 43, PP. 1-6.
- 8 - Burša, M., Kouba, J., Muneendra, K., Müller, A., Raděj, K., True, S. A., Vátrt, V. and Vojtíšková, M. (2000). "Geoidal geopotential and world height system." *Studia geoph. et geod*, Vol. 43, PP. 327-337.
- 9 - Grafarend, E. W. and Ardalan, A. A. (1997). " W_0 : an estimate in the Finnish Height Datum N60, epoch 1993.4, from twenty-five GPS points of the Baltic Sea Level Project." *Journal of Geodesy*, Vol. 71, PP. 673-679.
- 10 - Grafarend, E. W. and Ardalan, A. A. (2002). *Time evolution of a World Geodetic Datum*. In: F. Sanso, *Vista for Geodesy in the New Millennium*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- 11 - Gauss, C. F. (1828). *Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona*. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen.
- 12 - Gleason, D. M. (1988). "Comparing corrections to the transformation between the geopotential's spherical and ellipsoidal spectrum." *Manuscripta Geodaetica*, Vol. 13, PP. 114-129.
- 13 - Gleason, D. M. (1989). "Some notes on the evaluation of ellipsoidal and spheroidal harmonic expansions." *manuscripta geodaetica*, Vol. 14, PP. 110-116.
- 14 - Groten, E. (2004). "Fundamental parameters and current (2004) best estimates of the parameters of common relevance to astronomy, geodesy, and geodynamics." *Journal of Geodesy*, Vol. 77, PP. 724 - 797.
- 15 - Jekeli, C. (1981). *The downward continuation to the Earth's surface of truncated spherical and ellipsoidal harmonic series of the gravity and height anomalies*. Report 323, Ohio State University Department of Geodetic Science and Surveying, Columbus Ohio.

-
- 16 - Listing, J. B. (1873). *Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Größe der Erde*. Dietrichsche Verlagsbuchhandlung, Göttingen.
- 17 - Nesvorný, D. and Šíma, Z. (1994). "Refinement of the Geopotential scale factor R_0 , on the satellite altimetry basis." *Earth Moon, and Planets*, Vol. 65, PP. 79-88.
- 18 - Sona, G. (1996). "Numerical problems in the computation of ellipsoidal harmonics." *J. Geodesy*, Vol. 70, PP.117-126.
- 20 - Thong, N. C. and Grafarend, E. W. (1989). "A spheroidal model of the terrestrial gravitational field." *Manuscr Geod*, Vol. 14, PP. 285-304.
- 20 - Yu, J. and Cao, H. (1996). "Elliptic harmonic series and original Stokes problem with the boundary of the reference ellipsoid." *J. Geodesy*, Vol. 70, PP. 431-439.
- 21 - Ardalan A. A. and Hashemi-Farahani H. (2007). "A new global ocean tide analysis and computation of Mean Sea Level model based on orthonormal base functions using 11 years of Topex/Poseidon satellite altimetry observations." *Journal of University College of Engineering*, University of Tehran, Vol. 40, PP. 1031-1019.

- 1 - Mean Sea Level (MSL)
2 - Geoid
3 - Gauss-Listing
4 - Bruns Formula
5 - Sea Surface Topography (SST)
6 - Eigen-Conditions
7 - Eigen-Solution
8 - Jacobi Ellipsoidal Coordinates
9 - Signum Function
10 - Geocentric Gravitational Constant
11 - D. Nesvorný, and Z. Šíma
12 - Burša
13 - Grafarend
-