بررسي شرط پيكارد در مسأله انتقال به سمت پائين در تعيين ژئوئيد بدون استفاده از روش استوكس

عبدالرضا صفري*[۱] و يحيي ا توكلي[۲]
[۱]استاديار گروه مهندسی نقشه‌برداري - پرديس دانشكده های فني - دانشگاه تهران
[۲]دانش آموخته كارشناسي ارشد ژئودزي نقشه‌برداري - پرديس دانشكده های فني - دانشگاه تهران

(تاريخ دريافت ۸۵/۱۱/۷ , تاريخ دريافت روايت اصلاح شده ۸۶/۹/۱۱ , تاريخ تصويب ۸۶/۱۲/۲۰)

چكيده

مسئله تعيين ژئوئيد از طريق حل يک مسئله مقدار مرزي مستلزم انتقال به سمت پايين مشاهدات از سطح زمين به روي بيضوي مقايسه مي‌باشد. يكي از روش‌هاي انتقال به سمت پايين ميدان ثقل زمين از طريق انتگرال آبل-پواسن و مشتقات آن انجام مي شود. مسئله انتقال به سمت پايين پيوسته يک مسئله بد وضع مي‌باشد. نظير هر مسئله‌اي در رياضي بايستي ابتدا در خصوص وجود جواب تحقيق گردد. وجود جواب براي انتگرال آبل-پواسن از طريق بررسي شرط پيكارد انجام گرفته و هدف اين مقاله بررسي وجود جواب مسئله انتقال به سمت پايين از طريق بررسي شرط پيكارد است

واژه‌هاي كليدي: محک پيكارد - مسئله انتقال به سمت پايين - تعيين ژئوئيد - مسئله بد وضع

مقدمه

مسئله تعيين ژئوئيد بعنوان سطح مبناي ارتفاعي يكي از مسائل مهم در جامعه ژئودزي به شمار می رود. يكي از روش‌هاي تعيين ژئوئيد استفاده از مسائل مقدار مرزي با داده‌هاي مرزي حاصل از مشاهدات ثقلي زميني، هوائي و دريائي مي‌باشد. بيشتر از نيم قرن است كه ژئودزين ها و رياضيدانان سعي كرده اند مسائل مقدار مرزي ژئودتيک[۱] را بر حسب تابعک‌هاي ميدان ثقل زمين پايه گذاري نمايند. تاريخچه مسئله مقدار مرزي تعيين ژئوئيد به استوكس باز ميگردد هنگاميكه او در سال ۱۸۴۹ موفق گرديد فرمولي براي تبديل آنامولي‌هاي جاذبه تعريف شده بر روي سطح كره $\mathbb{S}^2_{\mathrm{R}}$ به آنامولي پتانسيل ارائه نمايد [۱]. اين مسئلة مقدار مرزي با تغييرات و اصلاحاتي، هنوز بصورت گسترده توسط جامعة ژئودزي مورد استفاده قرار مي‌گيرد. مولدنسكي[۲] در سال ۱۹۵۸، مسئلة مقدار مرزي ديگري را براي تعيين سطحي رياضي جايگزين ژئوئيد، كه اصطلاحا "كوازي ژئوئيد[۳] ناميده مي‌شود، ارائه نمود [۱]. اين روش در بسياري از كشورهاي جهان كه داراي سيستم ارتفاعي نرمال[۳] مي‌باشند، مورد استفاده قرار گرفته است. اخيراً مسئلة مقدار مرزي متفاوتي با مسائل مقدار مرزي قبلي، توسط اردلان و گرافارند براي تعيين ژئوئيد ارائه گرديده كه از آن تحت عنوان "مسئله مقدار مرزي تعيين ژئوئيد بدون استفاده از فرمول استوكس" نام برده مي‌شود [۲]. در اين روش، ژئوئيد بر اساس حل يک مسئله مقدار دو مرزي غير خطي با مرزهاي ثابت و آزاد تعيين مي‌گردد. مسئله مقدار دو مرزي غيرخطي در جدول (۱) آورده شده است.

در اينجا براي تعيين ژئوئيد فرض بر استفاده از دادة مرزي اندازة شتاب ثقل مشاهده شده بر روي سطح زمين است. بعلاوه فرض مي‌گردد كه مختصات GPS كليه نقاط ثقلي معلوم است. بنابراين سطح زمين $\mathbb{M}^2_h$ با در اختيار داشتن مختصات GPS بعنوان يک مرز ثابت فرض مي‌گردد. مقدار پتانسيل w_0 بر روي ژئوئيد $\mathbb{M}^2_g$، معلوم است. لذا از ژئوئيد بعنوان مرز آزاد نام برده مي‌شود.

اين مسئله، يک مسئلة مقدار مرزي غير خطي و مايل[۴] مي‌باشد. غير خطي بودن مسئله به دليل غير خطي بودن ارتباط بين مشاهدة اندازة شتاب ثقل با پتانسيل و مايل بودن مسئله بدليل مايل بودن امتداد بردار ثقل در حالت كلي بر سطح زمين است[۲].

در جدول (۱)، $\operatorname{div}\operatorname{grad}$ تركيب دو اپراتور گراديان و ديورژانس است كه اپراتور لاپلاس را توليد مي‌كند. $E\{\}$ اپراتور اميد رياضي، $\langle\cdot|\cdot\rangle$ اپراتور ضرب داخلي، $\|\cdot\|_2$ اپراتور نرم ۲ در فضاي هيلبرت، w پتانسيل ثقل، γ اندازة بردار شتاب ثقل، σ دانسيتة زمين، ω

* نويسنده مسئول : تلفن : ۶۱۱۱۴۲۵۱ , فاكس : ۸۸۰۰۸۸۳۷ , Email: asafari@ut.ac.ir

جدول ۱: مسئله مقدار دومرزي غيرخطي با مرزهاي ثابت و آزاد.

1. $\text{div grad } w(\mathbf{x}) = 2\omega^2$ (outside the Earth's masses)	$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3/\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{G}_e^+$
2. $\text{div grad } w(\mathbf{x}) = -4\pi G\sigma(\mathbf{x}) + 2\omega^2$ (inside the surface of the Earth)	$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{G}_e^-$
3. $\mathrm{E}\left\{\left\|\text{grad}\, w(\mathbf{x})\right\|_2\right\} = \mu_\gamma$ (boundary data of the type modulus of gravity from gravimetry)	$\forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{G}_e = \mathbb{M}_g^2$
4. $w(\mathbf{x}) = w_0$ (Boundary data at the fixed boundary of the type geoid potential)	$\forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{G}_e = \mathbb{M}_g^2$
5. $\lim_{\|\mathbf{x}\|_2 \to \infty} w(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\,\omega^2 \left\|\mathbf{x}-\langle \mathbf{x} \mid \mathrm{e}_\omega \rangle \mathrm{e}_\omega\right\|_2^2 + \frac{GM}{\|\mathbf{x}\|_2} + \mathcal{O}_w\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2^3}\right)$ (regularity condition at infinity)	

جدول ۲: تقسيم كميتهاي واقعي به دو بخش كميت رفرانس و كميت تفاضلي بر اساس تئوري اغتشاشات.

$w = W + \delta W$ $\sigma = \Sigma + \delta\Sigma$	$\gamma = \Gamma + \delta\Gamma$ $\omega^2 = \Omega^2 + 2\langle \boldsymbol{\Omega} \mid \delta\boldsymbol{\Omega}\rangle + \delta\Omega^2$

جدول ۳: مسئله مقدار دومرزي خطي با مرزهاي ثابت و آزاد.

$\text{div grad}\, \delta W(\mathbf{x}) = 0$ $\text{div grad}\, \delta W(\mathbf{x}) = -4\pi\delta\Sigma(\mathbf{x})$	$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{G}_g$ $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{G}_g$	Field Diff. Equ.
$\delta\Gamma(\mathbf{x}) = \left\|\nabla_{\mathbf{e}_\Gamma}\delta W(\mathbf{x})\right\|_2$ $\delta w_0(\mathbf{x}) = \delta W_0$	$\forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{G}_e := \mathbb{M}_g^2$ $\forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{G}_i := \mathbb{M}_g^2$	Boundary Value
$\lim_{\|\mathbf{x}\|_2 \to \infty} \delta W(\mathbf{x}) = \mathcal{O}_{\delta\omega}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2^{L+1}}\right)$		Regularity condition at Infinity

سرعت دوران زمين، μ_γ اميد اندازة بردار شتاب ثقل، G ثابت جهاني جاذبه، w_0 پتانسيل ژئوئيد، $\mathbf{x}$ بردار موقعيت، e_ω بردار يكة در امتداد محور دوران زمين، M جرم زمين، $\mathcal{D}$ فضاي دروني زمين، $\partial\mathcal{G}_e^+$ مرز خارجي پوستة زمين، $\partial\mathcal{G}_e^-$ مرز دروني پوستة زمين و $\mathbb{M}_g^2$ بيانگر رويه‌هاي در بر گيرندة داده‌هاي مرزي است.

رابطة اول در اين جدول معادلة ميدان در خارج سطح زمين و معادلة دوم معادلة ميدان در درون زمين بوده كه هر دو از نوع معادلات ديفرانسيل پواسن هستند. رابطة سوم نشان‌دهندة مقدار مرزي از نوع اندازة شتاب ثقل بر روي مرز معلوم (سطح زمين)، معادلة چهارم بيانگر مقدار مرزي از نوع پتانسيل (پتانسيل ژئوئيد) بر روي مرز آزاد (سطح ژئوئيد) و رابطة پنجم شرط ميل مقدار پتانسيل ثقل به سمت صفر با سرعت همگرائي عكس فاصله است كه شرط پايداري جواب در بينهايت محسوب مي‌گردد.

براي خطي نمودن اين مسئله كلية كميت هاي فيزيكي بكار رفته در اين مسئله را مي‌توان به دو مؤلفة (۱) رفرانس و (۲) تفاضلي يا باقيمانده تفكيك نمود [٤-۲]. جدول (۲)، نشان دهندة اين تفكيك براي چهار كميت پتانسيل ثقل، اندازة بردار شتاب ثقل، دانسيتة زمين و سرعت دوران زمين، به دو مؤلفة رفرانس (نشان داده شده با حروف يوناني بزرگ) و تفاضلي يا باقيمانده (مشخص شده با پيشوند يوناني دلتا) است.

پس از حذف بخش رفرانس از مشاهدات، مسئله مقدار دو مرزي غير خطي با مرزهاي ثابت و آزاد خطي مي‌گردد. در اين مسئله از مجموع بسط هارمونيک‌هاي بيضوي تا درجه و مرتبه ۳۶۰، ميدان گريز از مركز و اثر جرم‌هاي در فاصله نزديک نقطه مورد محاسبه بعنوان ميدان رفرانس استفاده مىشود. هم چنين بدين ترتيب مسئلة مقدار دو مرزي، به مسئلة مقدار دو مرزي خطي براي كميت هاي تفاضلي تبديل مي‌گردد. جدول (۳) ارائة دهندة اين مسئلة مقدار مرزي براي كميتهاي تفاضلي است. كميت تفاضلي $\delta W(\mathbf{x})$ در فضاي بيروني زمين در

معادله لاپلاس صدق نموده و لذا در فضاي بيروني زمين هارمونيک هستند.

در جدول (٣)، $\nabla_{\mathbf{e}_\Gamma}$ نشان دهندة مشتق امتدادي در امتداد بردار يکة $\mathbf{e}_\Gamma$ است که در امتداد بردار شتاب ثقل رفرانس Γ مي‌باشد. L درجه و مرتبة بسط ميدان ثقل جهاني است.

براي بخش بدون جرم فضاي بيروني زمين مقادير مرزي $\delta\Gamma(\mathbf{x})$ در انتگرال آبل- پواسن بيضوي صدق مي‌کنند. انتگرال آبل- پواسن بيضوي مي‌تواند به عنوان يک معادله مشاهده بکار رود به گونه‌اي که با داشتن مقادير تفاضلي شتاب ثقل مي‌توان از طريق انتگرال آبل- پواسن بيضوي، پتانسيل ثقل تفاضلي $\delta W(\boldsymbol{X})$ را بر روي بيضوي رفرانس $\mathbb{E}^2_{a,b}$ بدست آورد. در جدول (۴) انتگرال آبل- پواسن بيضوي پيوسته براي اندازة شتاب ثقل تفاضلي ارائه گرديده است. بنابراين مسئله تعيين ژئوئيد از طريق حل يک مسئله مقدار مرزي مستلزم انتقال بسمت پايين مشاهدات ثقل تفاضلي از سطح زمين به روي بيضوي مقايسه مي‌باشد. مسئله انتقال بسمت پايين توسط انتگرال آبل-پواسن و مشتقات آن انجام مي‌پذيرد [۴-۲]. در اين مقاله فرض مي‌شود که شتاب ثقل بر روي سطح زمين اندازه‌گيري شده و هدف تعيين پتانسيل ثقل تفاضلي بر روي سطح بيضوي است. بعد از هارمونيک سازي مشاهدات شتاب ثقل، کميت شتاب ثقل تفاضلي $\delta\Gamma(\mathbf{x})$ به دست مي‌آيد. در فضاي خارج بيضوي رفرانس مقادير مرزي $\delta\Gamma(\mathbf{x})$ در انتگرال آبل- پواسن صدق مي‌کنند.

با توجه به اين که مشاهدات شتاب ثقل به صورت گسسته در اختيار هستند بنابراين معادله انتگرال بيان شده در جدول (۱) بايد به شکل گسسته در آيد. شکل گسسته معادله انتگرال آبل-پواسن در جدول (۵) داده شده است:

در روابط فوق، $\{\Gamma_\lambda,\Gamma_\phi,\Gamma_\eta\}$ سه مولفة بردار شتاب ثقل رفرانس $\boldsymbol{\Gamma}$ بر حسب سيستم مختصات منحني‌الخط بيضوي ژاکوبي با مولفه‌هاي $\mathbf{x}=\{\lambda,\phi,\eta\}$ بوده، $\varpi(\phi')$ تابع وزن بوده که موجب متعامد شدن هارمونيک هاي بيضوي بر روي بيضوي رفرانس مي‌گردد. $S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}$ مساحت سطح بيضوي رفرانس $\mathbf{E}^2_{a,b}$، و $\{g_{\lambda\lambda},g_{\phi\phi},g_{\eta\eta}\}$ مولفه‌هاي تنسور متريک سيستم مختصات منحني‌الخط بيضوي ژاکوبي است. K^L کرنل تغيير يافتة انتگرال آبل-پواسن پس از حذف ميدان رفرانس است. انديس بالاي L در اينجا نشان دهندة درجة و مرتبة ماکزيمم بسط هارمونيک‌هاي بيضوي بکار رفته در ميدان رفرانس است که با توجه به حذف آن از روي مشاهدات لازم است اين اثر از روي کرنل نيز حذف گردد. بدين طريق کرنل تغيير شکل يافتة K^L حاصل مي شود. براي جزئيات بيشتر به [۳] مراجعه نمائيد. $\{a,b,\varepsilon\}$ به ترتيب نيم‌قطر اطول، نيم قطر اقصر و خروج از مرکز خطي بيضوي رفرانس $\mathbb{E}^2_{a,b}$ مي‌باشد. $\Delta\lambda'\Delta\phi'$ المان سطحي انتگرال آبل پواسن پس از گسسته سازي بوده که بيانگر قدرت تفکيک انتگرال‌گيري نيز مي‌باشد. $i\max$ و $j\max$ نيز حد بالاي شبکة انتگرال‌گيري پس از گسسته‌سازي را روي بيضوي رفرانس نشان مي‌دهند.

شکل کلي اپراتور انتگرال آبل-پواسن در ناحيه J با متغير $\mathbf{t}$ به صورت ذيل است [۵] :

$$\int_J k(\mathbf{s},\mathbf{t})f(\mathbf{t})d\mathbf{t}=g(\mathbf{s}) \qquad ,\mathbf{s}\in I \tag{۱}$$

که در آن I و J فواصلي حقيقي بر روي خط حقيقي مي‌باشند. يا به صورت کلي‌تر مي‌توان تابع g را حاصل اعمال اپراتور انتگرالي K بر روي تابع f به صورت ذيل در نظر گرفت:

$$K(f)=g \tag{۲}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}&K:L_2(I)\to L_2(J)\\&(Kf)(\mathbf{s})=\langle k(\mathbf{s},t)|f\rangle\\&\langle u|v\rangle=\int_J u(\mathbf{t})v(\mathbf{t})d\mathbf{t},\ \ \mathbf{t}\in J\end{aligned} \tag{۳}$$

تابع g و کرنل k توابعي معلوم هستند، در حالي که f مجهول و هدف نيز يافتن آن است. اپراتور K (اپراتور انتگرال القا شده توسط کرنل k) را خوش وضع گوييم چنانچه شرايط ذيل برقرار باشد [٦]:

- مسأله داراي جواب باشد (شرط وجود).
- مسأله داراي حداکثر يک جواب باشد (شرط يکتايي).
- جواب مسأله به طور تابع پيوسته‌اي از داده‌ها باشد (شرط پايداري).

اگر براي معادله فوق يکي از شروط فوق برقرار نگردد، آن گاه آن مسأله را بد وضع[5] مي ناميم. بر روي خوش وضع بودن مسئله انتقال بسمت پايين توسط ژئودزين‌ها به طور گسترده‌اي مطالعه گرديده است که از آن جمله مي‌توان به کارهاي انجام شده توسط [١٦-٧] اشاره نمود.

جدول ۴: انتگرال آبل-پواسن بيضوي براي شتاب ثقل تفاضلي.

معادله انتگرال در شکل پيوسته:

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma(\mathbf{x}) &= \left\langle \mathbf{e}_\Gamma \mid \delta\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x})\right\rangle + \mathcal{O}\left(\delta\Gamma^2(\mathbf{x})\right)\\
\delta\Gamma(\mathbf{x}) &= \frac{\Gamma_\lambda}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|_2}\delta\Gamma_\lambda + \frac{\Gamma_\phi}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|_2}\delta\Gamma_\phi + \frac{\Gamma_\eta}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|_2}\delta\Gamma_\eta + \mathcal{O}\left(\delta\Gamma^2(\mathbf{x})\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}}\frac{\Gamma_\lambda}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|_2}\frac{1}{S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}}\oiint_{\mathbb{E}^2_{a,b}} ds'\varpi(\phi')\frac{\partial K^L(\lambda,\phi,\eta;\lambda',\phi',\eta_0)}{\partial\lambda}\delta W^L(\lambda',\phi')\\
&+\frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}\frac{\Gamma_\phi}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|_2}\frac{1}{S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}}\oiint_{\mathbb{E}^2_{a,b}} ds'\varpi(\phi')\frac{\partial K^L(\lambda,\phi,\eta;\lambda',\phi',\eta_0)}{\partial\phi}\delta W^L(\lambda',\phi')\\
&+\frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}}\frac{\Gamma_\eta}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|_2}\frac{1}{S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}}\oiint_{\mathbb{E}^2_{a,b}} ds'\varpi(\phi')\frac{\partial K^L(\lambda,\phi,\eta;\lambda',\phi',\eta_0)}{\partial\eta}\delta W^L(\lambda',\phi') + \mathcal{O}\left(\delta\Gamma^2(\mathbf{x})\right)
\end{aligned} \tag{۴}$$

جدول ۵: انتگرال آبل-پواسن بيضوي گسسته براي شتاب ثقل تفاضلي.

معادله انتگرال در شکل گسسته:

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma(\mathbf{x}) &= \gamma(\mathbf{x}) - \Gamma(\mathbf{x}) = \left\langle \boldsymbol{e}_\Gamma \mid \delta\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x})\right\rangle\\
&= \Bigg(\frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}}\frac{\Gamma_\lambda}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|}\frac{1}{S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}}\sum_{i=1}^{i\max}\sum_{j=1}^{j\max} a\sqrt{b^2+\varepsilon^2\sin^2\phi_{ij}}\cos\phi_{ij}\\
&\quad\times\Delta\lambda'\Delta\phi'\varpi(\phi')\frac{\partial K^L(\lambda,\phi,\eta;\lambda',\phi',\eta_0)}{\partial\lambda}\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}\frac{\Gamma_\lambda}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|}\frac{1}{S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}}\sum_{i=1}^{i\max}\sum_{j=1}^{j\max} a\sqrt{b^2+\varepsilon^2\sin^2\phi_{ij}}\cos\phi_{ij}\\
&\quad\times\Delta\lambda'\Delta\phi'\varpi(\phi')\frac{\partial K^L(\lambda,\phi,\eta;\lambda',\phi',\eta_0)}{\partial\phi}\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}\frac{\Gamma_\lambda}{\|\boldsymbol{\Gamma}\|}\frac{1}{S_{\mathbb{E}^2_{a,b}}}\sum_{i=1}^{i\max}\sum_{j=1}^{j\max} a\sqrt{b^2+\varepsilon^2\sin^2\phi_{ij}}\cos\phi_{ij}\\
&\quad\times\Delta\lambda'\Delta\phi'\varpi(\phi')\frac{\partial K^L(\lambda,\phi,\eta;\lambda',\phi',\eta_0)}{\partial\eta}\Bigg)\delta W^L(\lambda',\phi')
\end{aligned} \tag{۵}$$

از آن جائي كـه اپراتـور آبـل-پواسـن يـک اپراتـور فشرده بوده و با توجه به غيرصفر بودن مقـادير منفـرد آن، يک اپراتور يک به يک و معکوس‌پذير نيز مي‌باشـد، قضـيه ذيل براي آن برقرار است [۱۸-۱۷]:

قضيه: اگر K يک اپراتور کراندار فشرده و معکوس پـذير باشد و روي يک فضاي با بعد نامتناهي تعريف شده باشـد، در آن صورت معکوس آن، يعني K^{-1} ، غيرکراندار است.

بنابر اين معکوس اپراتور آبل-پواسن (و اپراتورهاي حاصـل از مشتقات جزئي آن)، يک اپراتور غير کرانـدار و ناپيوسـته مي‌باشد، لذا نمي‌توان انتظار داشت که جواب مسأله انتقال به سمت پائين در تعيـين ژئوئيـد بـدون اسـتفاده از روش استوکس، حاصل از حل معادله انتگرالي آبل-پواسـن يـک تابع پيوسته از داده‌هاي ورودي باشد، از اين رو اين امکـان نيز وجود دارد که يک خطاي کوچک در داده‌هـاي ورودي به علت ناپيوستگي معکوس اپراتور آبل-پواسن سبب ايجاد خطاي بزرگي در جواب مسأله گردد. بنابراين مسأله انتقال به سمت پائين با استفاده از انتگرال آبل-پواسن در تعيـين ژئوئيد بدون استفاده از روش استوکس يک مسأله ناپايـدار محسوب مى شود. هنگام مواجـه شـدن بـا مسـئله انتقـال بسمت پايين ابتدا مسئله به فرم طيفي (فرم سري تـواني) ثبت مى گـردد. شـرط پيکـارد تکنيکـي اسـت کـه نشـان مـي‌دهـد کـه آيـا دنبالـه نسـبت (نسـبت ضـرايب فوريـه مشاهدات به مقادير سينگولار اپراتور) همگرا خواهد شد يا خير. به عبارت ديگر به منظور تضمين وجود يـک جـواب، مسئله بايستي در شرط موسـوم بـه شـرط پيکـارد صـدق نمايد. همان طوري که قبلاً نيز اشاره شد داده‌هاي شـتاب

ثقل به طور پیوسته در اختیـار مـا قـرار نـدارد و تنهـا بـه صورت گسسته در دسترس هستند. بنابراين در اين مقالـه به مسئله گسسته اكتفا شده است. گرچه در حالت گسسته شرط پيكارد از نقطه نظـر رياضـي محـض همـواره صـادق است و نبايستي نگراني در خصوص پايداري جـواب وجـود داشته باشد ولي مسئله گسسته تحت تاثير خطاها انـدازه-گيري، خطاي گرد كردن و خطاهاي گسسته سازي بوده و لذا جواب مسئله ممكن است به ايـن خطـا حسـاس باشـد بنابراين در عمل بايد قبـل از حـل مسـئله انتقـال بسـمت پايين بايستي مطمئن گرديد كه ضرايب فوريـه مشـاهدات در بسط طيفي بـه طـور متوسـط از مقـادير سـينگولار در فركانس‌هاي بالاتر سريع تر به سـمت صـفر ميـل خواهـد نمود [۱۹]. بنابراين از شرط پيكـارد تحـت عنـوان شـرط پيكارد گسسته ياد شـده و از شـرط پيكـارد گسسـته كـه توسـط [۲۱-۲۰] توسـعه يافتـه بـراي نشـان دادن وجـود جواب مسئله انتقال به سمت پايين اسـتفاده خواهـد شـد. هدف از اين مقاله بررسي پايـداري مسـئله انتقـال بسـمت پايين و وجود جواب در محاسبه ژئوئيـد بـدون اسـتفاده از روش استوكس با استفاده از شرط پيكارد مي‌باشد.

بسط مقادير منفرد انتگرال آبل-پواسن

معادلـه انتگـرال بيـان شـده توسـط رابطـه (۱) را مجدداً در نظر مي‌گيريم:

$$\int_J k(\mathbf{s},\mathbf{t})f(\mathbf{t})d\mathbf{t} = g(\mathbf{s}) \qquad ,\mathbf{s}\in I \tag{۶}$$

براي حل معادلات انتگرالي فردهولم نوع اول روش بسط مقادير منفرد ممتازترين ابزار تحليلي مي‌باشـد[۲۱]. اگر كرنل k، عضوي از فضاي هيلبرت $L_2(I\times J)$ بـوده و مجموعه‌هاي $\{\mathbf{u}_i\}$ و $\{\mathbf{v}_i\}$، هريک پايه‌اي به ترتيب براي فضاهاي هيلبرت $L_2(I)$ و $L_2(J)$ باشـد، آنگـاه مـي‌تـوان كرنل k را به صورت مجموع ذيل نوشت [۲۱]:

$$k(\mathbf{s},\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i\mathbf{u}_i(\mathbf{s})\mathbf{v}_i(\mathbf{t}) \tag{۷}$$

در رابطه فوق اگر دو پايه $\{\mathbf{u}_i\}$ و $\{\mathbf{v}_i\}$ با توجـه به ضرب داخلي در رابطه (۳)، به نحوي تعريـف گـردد كـه بردارهاي دو پايه‌ي مذكور، متعامد يكه بوده و مقـادير σ_i، نيز غير منفي و به صورت نزولي ذيل مرتب شده باشد:

$$\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_i \ge \cdots \tag{۸}$$

آن گاه توابع $\mathbf{u}_i$ و $\mathbf{v}_i$ را به ترتيـب توابـع منفـرد چپ و توابع منفرد راست اپراتور K و هم چنـين ضـرايب σ_i را مقادير منفرد اپراتور K مي‌نامند. چنان چه اپراتـور الحاقي اپراتور K با K^* نشان داده شود، با در نظر گرفتن روابـط (۳) و (۷) دوتـائي $\{\sigma_i^2,\mathbf{v}_i\}$ تجزيـه مقـادير ويـژه اپراتورمتقارن K^*K و همچنين دوتايي $\{\sigma_i^2,\mathbf{u}_i\}$ تجزيـه مقادير ويژه اپراتورمتقارن KK^* مي‌باشـد. از ايـن ارتبـاط بين تجزيه مقادير ويژه و تجزية مقادير منفرد در مي‌يـابيم كه سه تايي $\{\sigma_i,\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_i\}$ مشخصه يكتـا و لاينفـک كرنـل داده شده k است. از طرفي مهمترين رابطـه بـين مقـادير منفرد و توابع منفرد به صورت ذيل مي‌باشد:

$$\begin{aligned} K(\mathbf{v}_i) &= \sigma_i\mathbf{u}_i \\ K^*(\mathbf{u}_i) &= \sigma_i\mathbf{v}_i \end{aligned} \tag{۹}$$

اين رابطه نشان مي‌دهد كه توابع منفرد $\mathbf{v}_i$ و $\mathbf{u}_i$ به وسيله اپراتورهاي K و K^* به يكديگر نگاشته شـده و مقادير منفرد σ_i مقيـاس ايـن نگاشـت هـا مـي‌باشـد. در حالتي كه اپراتـور K يـک اپراتـور متقـارن باشـد، بسـط مقادير منفرد اپراتور K همـان بسـط مقـادير ويـژه‌ي آن است و توابع منفرد همان توابع ويژه اپراتور K مي‌باشد.

يـک اپراتـور انتگرالـي ماننـد اپراتـور انتگرالـي در معادله (٦)، "هيلبرت-اشميت" خوانده مي‌شود، اگـر كرنـل آن متعلق به فضاي هيلبرت $L_2(I\times J)$ بوده و به عبـارت ديگر يک كرنل مربع-انتگرال‌پذير باشـد [۵]. كرنـل آبـل-پواسن نيز يک كرنل مربع انتگرال-پذير بـوده [۲]، از ايـن رو اپراتور انتگرالي آبل-پواسن در شرط ذكرشدۀ موسوم به هيلبرت-اشميت صدق مي‌نمايد.

با توجه به مربع-انتگـرال‌پـذير بـودن كرنـل آبـل-پواسن(يعني $k\in L_2\left(\mathbb{E}^2_{\eta_0,\varepsilon}\times\mathbb{E}^2_{\eta,\varepsilon}\right)$) همان گونه كه اشاره گرديد، بسط مقادير منفرد براي آن وجود خواهد داشت. با استفاده از ابزار بسط مقادير منفرد كه در اين بخش ارائه گرديد، در بخش بعد به بررسي شرط وجود جـواب (شـرط پيكارد) و يكتاي جواب در معادلـه انتگرالـي آبـل-پواسـن خواهيم پرداخت.

شـرط پيكـارد و يكتـايي جـواب در معادلـه انتگرالي آبل-پواسن

تعريـف: اپراتـور $K: L_2(J)\rightarrow L_2(I)$ تعريـف شـده بـه صورت زير:

$$(Kf)(\mathbf{s}) = \int_J k(\mathbf{s},\mathbf{t})f(\mathbf{t})d\mathbf{t} \tag{۱۰}$$

يک اپراتور با "كرنل جدايي‌پذير" است، اگر:

$$k_N(\mathbf{s},\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i(\mathbf{s})\,\mathbf{q}_i(\mathbf{t}) \tag{۱۱}$$

که در رابطه فوق $\{\mathbf{p}_i(\mathbf{s})\} \subset L_2(I)$ و $\{\mathbf{q}_i(\mathbf{t})\} \subset L_2(J)$ می‌باشند.

اپراتور آبل-پواسن K در رابطه (۱۰)، به ترتیب حد دنباله اپراتورهاي $\{K_N\}$ با کرنل‌هاي جدايي‌پذير $\{k_N\}$، به صورت زير مي‌باشد:

$$\begin{aligned} &K_N : L_2\left(\mathbb{E}^2_{\eta_0,\varepsilon}\right) \to L_2\left(\mathbb{E}^2_{\eta,\varepsilon}\right)\\ &(K_N f)(\lambda,\phi,\eta) = \frac{1}{S}\iint_{\mathbb{E}^2_{\eta_0,\varepsilon}} k_N(\lambda,\phi,\eta,\lambda',\phi',\eta_0)\\ &\qquad \times f(\lambda',\phi')\omega(\phi')dS\\ &k_N(\lambda,\phi,\eta,\lambda',\phi',\eta_0) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} q_{n|m|} e_{nm}(\lambda',\phi')\\ &\qquad \times e_{nm}(\lambda,\phi). \end{aligned} \tag{۱۲}$$

در خصوص اپراتورهاي با کرنل جدايي پذير لم ذيل وجود دارد [۲۲]:

لم: يک اپراتور با کرنل جدايي‌پذير، يک اپراتور فشرده مي‌باشد.

با توجه به لم فوق دنباله اپراتورهاي $\{K_N\}$ داراي کرنل‌هاي جدايي‌پذير در رابطه (۱۲)، اپراتورهايي فشرده بوده اين که در خصوص دنباله اپراتورهاي فشرده قضيه ذيل موسوم به "حد اپراتورهاي فشرده" را داريم [۲۲]:

قضيه: اگر دنباله اپراتورهاي $A_1, A_2, A_3 \ldots,$، اپراتورهاي فشرده‌ي تعريف شده از فضاي نرم‌پذير N به فضاي باناخ M بوده و اپراتور A حد اين دنباله اپراتورها باشد($\lim_{n\to\infty} A_n = A$)، آنگاه اپراتور A نيز يک اپراتور فشرده است.

پس، حد اپراتورهاي فشره‌ي $\{K_N\}$ يعني اپراتور انتگرالي آبل-پواسن (با توجه به نرم پذير بودن و باناخ بودن فضاهاي هيلبرت $L_2\left(E^2_{\eta_0,\varepsilon}\right), L_2\left(E^2_{\eta,\varepsilon}\right)$)، يک اپراتور فشرده خواهد بود. همچنين در معادلات انتگرالي حاصل از مشتقات جزئي پتانسيل جاذبه تفاضلي، در رابطه (۴)، کرنل‌هاي به وجود آمده حاصل از مشتقات جزئي همانند کرنل آبل-پواسن، حد دنباله‌اي از کرنل‌هايي جدايي‌پذير مي‌باشد، از اين رو با توجه به لم و قضيه فوق‌الذکر، اپراتورهاي انتگرالي حاصل از مشتقات جزئي از اپراتور آبل-پواسن در رابطه (۴)، نيز اپراتورهاي فشرده خواهد بود.

در خصوص شرط وجود جواب معادلات انتگرالي با اپراتورهاي فشرده قضيه ذيل موسوم به شرط پيکارد فشرده وجود دارد. اين قضيه در سال۱۹۰۹ توسط دانشمند فرانسوي پيکارد ارائه گرديده است [۲۳،۲۱،۱۸]:

قضيه : اگر اپراتور $K : L_2 \to L_2$ يک اپراتور فشرده‌ي خطي با بسط مقادير منفرد به صورت $(\sigma_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i)$ باشد، آنگاه دستگاه معادله $K(f) = g$، داراي جواب است، اگر و تنها اگر:

$$\begin{aligned} &(1)\ \sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{\langle g|\mathbf{u}_i\rangle}{\sigma_i}\right|^2 < \infty\\ &(2)\ g \in \mathcal{N}(K^*)^{\perp} \end{aligned} \tag{۱۳}$$

در اين صورت يکي از جواب‌هاي دستگاه $K(f) = g$ به صورت ذيل است:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\langle g|\mathbf{u}_i\rangle}{\sigma_i}\mathbf{v}_i \tag{۱۴}$$

هم چنين شرط پيکارد نشان مي‌دهد که شرط لازم براي وجود جواب آن است که ضرايب فوريه $\langle g|\mathbf{u}_i\rangle$، سريعتر از مقادير منفرد متناظر آن σ_i، به سمت صفر ميل نمايد. از طرفي با توجه به متقارن بودن و يک به يک بودن اپراتور انتگرالي آبل=پواسن فضاي پوچي الحاقي اپراتور آبل-پواسن $K^*_{\text{Abel-Poisson}}$ برابر فضاي پوچي اپراتور آبل-پواسن بوده و فقط شامل تابع صفر مي‌باشد. از اين رو داريم:

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left(K^*_{\text{Abel-Poisson}}\right)^{\perp} &= \mathrm{N}\left(K_{\text{Abel-Poisson}}\right)^{\perp}\\ &= \{\mathbf{0}\}^{\perp} \end{aligned} \tag{۱۵}$$

که در رابطه فوق N نشان‌دهنده فضاي پوچي است. همچنين با توجه به يک به يک بودن اپراتور انتگرالي آبل-پواسن اگر معادله انتگرالي آبل-پواسن داراي جواب باشد، آنگاه جواب بدست آمده يکتا است. پس نهايتاً بنابر شرط پيکارد فشرده در مسأله انتقال به سمت پائين در تعيين ژئوئيد بدون استفاده از روش استوکس ذيل:

$$K_{\text{Abel-Poisson}}\left(\delta W^L_{\mathfrak{E}^2_{\eta_0,\varepsilon}}\right) = \delta W^L \tag{۱۶}$$

در برآورد مجهولات پتانسيل تفاضلي $\delta W^L_{E^2_{\eta_0,\varepsilon}}$، شرط لازم و کافي براي وجود جواب (شرط پيکارد فشرده) برروي بيضوي رفرنس $E^2_{\eta_0,\varepsilon}$، آن است که:

$$\begin{aligned} &(1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left|\frac{\langle \delta W^L(\lambda,\phi,\eta)|e_{nm}(\lambda,\phi)\rangle}{q_{n|m|}}\right|^2 < \infty\\ &(2)\ \iint_{\mathfrak{E}^2_{\eta_0,\varepsilon}}\left|\delta W^L(\lambda,\phi,\eta)\right|^2\omega(\phi)dS < \infty \end{aligned} \tag{۱۷}$$

پس از بررسي شرط پيکارد فشرده در حالت پيوسته در بخش بعدي به بررسي در حالت گسسته

خواهیم پرداخت.

تجزیه مقادیر منفرد[۶]

همان طوري که قبلاً نیز بیان گردید امکان اندازه-گیري اندازه شتاب ثقل بصورت پیوسته وجود ندارد و به صورت گسسته اندازه‌گیري انجام مي‌گیرد لذا برای این منظور باید معادله آبل-پواسن بیان شده توسط رابطه (۴) به صورت گسسته در آید. شکل گسسته این معادله توسط رابطه (۵) بیان گردید. فرم ماتریسي معادله آبل-پواسن گسسته به شکل ذیل است:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}\ ,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n}\ ,\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m} \tag{۱۸}$$

در معادله گسسته شده‌ي (۱۸)، $\mathbf{x}$ بردار مجهولات از قرار ذیل:

$$\begin{cases} t = j + (i-1) \times jMax,\ 1 \le i \le iMax, 1 \le j \le jMax \\ x_t = \delta W^{L}_{\mathbb{E}^2_{\eta 0,\varepsilon}}\left(\lambda_{ij}, \phi_{ij}\right) \\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_t & \cdots & x_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad n = iMax \times jMax \end{cases} \tag{۱۹}$$

با فرض آن که m مشاهده تفاضلي(نرم بردار شتاب جاذبه تفاضلي در m نقطه) صورت پذیرفته باشد، $\mathbf{b}$ نیز بردار مشاهدات به صورت ذیل خواهد بود:

$$\begin{array}{l} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_s & \cdots & b_m \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ 1 \le s \le m, \\ b_s = \delta\Gamma^{L}\left(\lambda_s, \phi_s, \eta_s\right) \end{array} \tag{۲۰}$$

یکي از ابزارهاي کار با این مسأله، روش تجزیه مقادیر منفرد ماتریس $\mathbf{A}$ است. روش تجزیه مقادیر منفرد تمامي مشکلات مربوط به ماتریس بدوضع‌گسسته $\mathbf{A}$ را آشکار خواهد ساخت. برای این منظور چنان چه ماتریس مستطیلي یا مربعي $\mathbf{A}_{mn}$ را در نظر بگیرید و براي سهولت فرض کنید که $m \ge n$ باشد. در این صورت تجزیه مقادیر منفرد ماتریس $\mathbf{A}$ به صورت ذیل خواهد بود:

$$\mathbf{A}_{mn} = \mathbf{U}_{mm}\Sigma_{mn}\mathbf{V}_{nn}{}^{T} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^{T} \tag{۲۱}$$

که در معادله فوق $\mathbf{U}_{mm} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m)$ و $\mathbf{V}_{nn} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ماتریس‌هاي با ستون هاي ارتونرمال مي‌باشند،

$$\begin{array}{l} \mathbf{V}^{T}\mathbf{V} = \mathbf{I}_{nn} \\ \mathbf{U}^{T}\mathbf{U} = \mathbf{I}_{mm} \end{array} \tag{۲۲}$$

ستون هاي ماتریس‌هاي $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ را به ترتیب بردارهاي منفرد چپ و راست ماتریس $\mathbf{A}$ مي‌نامند [۲۱]. ماتریس $\Sigma_{mn} = \left[\delta_{ij}\sigma_i\right]$ که در آن δ_{ij} تابع کرونکر و $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$ است، یک ماتریس قطري با عناصر قطر اصلي غیر منفي بوده و عناصر آن داراي ترتیب ذیل می باشند:

$$\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \ldots \ge \sigma_n \ge 0 \tag{۲۳}$$

مقادیر قطر اصلي Σ، مقادیر منفرد ماتریس $\mathbf{A}$ و نسبت σ_1/σ_n عدد شرط ماتریس نامیده مي‌شود. از روابط $\mathbf{A}^{T}\mathbf{A} = \mathbf{V}\Sigma^{T}\Sigma\mathbf{V}^{T}$ و $\mathbf{AA}^{T} = \mathbf{U}\Sigma\Sigma^{T}\mathbf{U}^{T}$ مي‌توان نتیجه گرفت که ماتریس $\mathbf{A}$ به شدت به تجزیه مقادیر ویژه ماتریس‌هاي $\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}$ و $\mathbf{AA}^{T}$ وابسته است. این وابستگي، یکتایي تجزیه مقادیر منفرد را نشان داده که از یکتایي تجزیه مقادیر ویژه ماتریس هاي متقارن قابل استنتاج است.

مسائل بد وضع گسسته عموماً داراي دو مشخصه اصلي ذیل در ارتباط با تجزیه مقادیر منفرد هستند [۲۱]:

(۱) مقادیر منفرد به تدریج بدون گسستگي به سمت صفر میل کرده و افزایش ابعاد $\mathbf{A}$، تعداد مقادیر منفرد کوچک را افزایش مي‌دهد.

(۲) در حالي که σ_i با افزایش اندیس i کاهش مي‌یابد بردارهاي منفرد $\mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i$ با افزایش i مرتباً تغییر علامت مي‌دهند.

هم چنین با توجه به روابط (۲۱) و (۲۲) روابط ذیل حاصل مي‌گردند:

$$\begin{cases} \mathbf{Av}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i & \left\|\mathbf{Av}_i\right\|_2 = \sigma_i \\ \mathbf{A}^{T}\mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i & \left\|\mathbf{A}^{T}\mathbf{u}_i\right\|_2 = \sigma_i \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{۲۴}$$

با توجه به مطالب ذکر شده در این بخش، به بخش بعدي رفته و استفاده از تجزیه مقادیر منفرد در حل مسائل بد وضع را مرور خواهیم نمود.

مسئله بد وضع گسسته و شرط پیکارد گسسته

معادله (۱۸) حاصل گسسته‌سازي مسأله بد وضع پیوسته (۴)، یک مسأله بد وضع گسسته خواهد بود. از نقطه نظر ریاضي معادله گسسته‌شدۀ حاصل از گسسته-سازي مسأله بد وضع مي‌تواند، یک مسأله بد وضع محسوب نگردد، زیرا که اگر اطمینان از سازگاري دستگاه (۱۸) و یک به یک بودن ماتریس $\mathbf{A}$ حاصل آید، دستگاه داراي جواب یکتا بوده و به دلیل متناهي بودن اپراتور $\mathbf{A}$، معکوس آن نیز اپراتوري پیوسته(کراندار)، خواهد بود و از این رو از نقطه نظر تئوري ریاضي دستگاه جوابي یکتا و

پایدار است و دستگاه معادلات بد وضع گسسته‌شده یک مسأله خوش‌وضع محسوب مي‌گردد. اما به تجربه دیده شده است که دستگاه معادلات حاصل از گسسته‌سازي مسأله بد وضع هنوز یک سري مشخصه‌هاي مسأله بد وضع را به همراه دارد [۲۱] که از جمله آن ها مي‌توان به: روند روبه صفر مقادیر منفرد، رفتار نوساني بردارهاي منفرد چپ و راست که با افزایش اندیس به شدت آن نیز افزوده مي‌گردد و از نقطه نظر عددي بي‌کراني معکوس (یا شبه معکوس) ماتریس مسأله اشاره نمود. از این رو است که به مسائل حاصل از گسسته‌سازي مسائل بد وضع مسأئل بد وضع گسسته اطلاق مي‌گردد. روند روبه صفر مقادیر منفرد سبب اختلاف بزرگترین مقدار منفرد با کوچکترین مقدار منفرد (که از نقطه نظر عددي، عددي نزدیک به صفر مي-باشد)، گردیده و بزرگ شدن عدد شرط را به همراه خواهد داشت، لذا دستگاه هاي معادلات بد وضع گسسته از جرگۀ دستگاه هاي معادلات "بدشرایط" نیز به حساب مي‌آیند. در دستگاه معادلات (۱۸) با فرض عدم وجود هرگونه خطایي انتظار داریم دستگاه معادلات سازگار بوده و جواب دستگاه از معادله ذیل حاصل آید:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{b} \qquad (۲۵)$$

که در رابطه فوق $\mathbf{A}^{\dagger}$ شبه‌وارون ماتریس $\mathbf{A}$ بوده و با توجه به خواص شبه‌وارون‌ها و روابط مربوط به تجزیه مقادیر منفرد از رابطه ذیل به دست مي‌آید:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^{T} \Rightarrow \mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{V}\Sigma^{\dagger}\mathbf{U}^{T} \qquad (۲۶)$$

پس انتظار آن است که جواب دستگاه (۱۸) از رابطه ذیل حاصل گردد:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{u}_i^{T}\mathbf{b}}{\sigma_i}\mathbf{v}_i \qquad (۲۷)$$

در خصوص وجود جواب در دستگاه بدوضع گسسته مانند: دستگاه معادلات در رابطه (۱۸) شرط وجود جواب در دستگاه بد وضع گسسته موسوم به شرط پیکارد را به صورت ذیل ارائه مي‌نمائیم.

شرط پیکارد گسسته (شرط وجود جواب در مسأله بد وضع گسسته)

اگر در دستگاه معادلات بد وضع گسستۀ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ باشد، بردار مشاهدات $\mathbf{b}$، عاري از هرگونه خطایي بوده و مقادیر منفرد $\{\sigma_i\}$ پس از مقدار $\varepsilon_{\mathbf{A}}$ ($\varepsilon_{\mathbf{A}}$، در عمل همان "دقت اعشاري نسبي " ماشین حساب، موسوم به eps مي‌باشد به عنوان مثال: در نرم افزار فني "MATLAB-7"، ($eps = 2.22\times10^{-16}$)، روند رو به صفر خود را از دست داده و یک روند ثابت را داشته باشد، آنگاه شرط پیکارد گسسته برقرار است، اگر به ازاي مقادیر منفرد بزرگتر از $\varepsilon_{\mathbf{A}}$ ($\varepsilon_{\mathbf{A}} < \sigma_i$)، ضرایب فوریه $\{\mathbf{u}_i^{T}\mathbf{b}\}$ به طور متوسط سریعتر از مقادیر منفرد متناظرشان $\{\sigma_i \mid \sigma_i > \varepsilon_{\mathbf{A}}\}$ به صفر میل نماید. در این صورت دستگاه مفروض داراي جواب بوده و یکي از جواب هاي آن به صورت ذیل است:

$$\mathbf{x} = \sum_{\sigma_i > \varepsilon_{\mathbf{A}}} \frac{\mathbf{u}_i^{T}\mathbf{b}}{\sigma_i}\mathbf{v}_i \qquad (۲۸)$$

در عمل با انواع خطاها در ماتریس بدشرایط $\mathbf{A}$ و بردار $\mathbf{b}$ مواجه مي‌گردیم. که در این خصوص خطاهاي متداول عبارتند از: خطاي تقریب که هم برروي ماتریس $\mathbf{A}$ و هم بروي بردار $\mathbf{b}$ تأثیر دارد، خطاي اندازه-گیري که این خطا اغلب برروي طرف راست معادله یعني $\mathbf{b}$ اثر دارد و نهایتاً خطاي غیرقابل اجتناب "گردکردن" در محاسبات عددي ماتریس $\mathbf{A}$ و بردار $\mathbf{b}$.

عموماً خطاي اندازه‌گیري در بردار مشاهدات نسبت به سایر انواع خطاها بزرگتر بوده و همچنین خطاي نسبي در بردار مشاهدات ($\|\mathbf{b}-\mathbf{b}^{exact}\|_2 / \|\mathbf{b}^{exact}\|_2$، $\mathbf{b}^{exact}$:بردار مشاهدات دقیق) بزرگتر از خطاي نسبي در ماتریس ضرایب ($\|\mathbf{A}-\mathbf{A}^{exact}\|_2 / \|\mathbf{A}^{exact}\|_2$ $\mathbf{A}^{exact}$: ماتریس ضرایب دقیق) مي‌باشد [۲۱]. بردار خطاها نیز به صورت ذیل نشان داده می شود:

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= \mathbf{b} - \mathbf{b}^{exact} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{b}^{exact} + \mathbf{e}\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

با توجه به برقراري طرف راست مسأله بدوضع پیوسته در شرط پیکارد فشرده در معادله انتگرالي آبل-پواسن با فرض کوچک دانستن خطاي تقریب و بزرگ مقیاس بودن دستگاه معادلات بد وضع گسسته (که سبب مي‌شود دستگاه در معادلات گسسته‌شده ماتریس ضرایب رفتاري شبیه اپراتور انتگرالي داشته باشد) برقراري بردار مشاهدات واقعي(دقیق) $\mathbf{b}^{exact}$ در شرط پیکارد گسسته نیز انتظار مي‌رود، اما هیچ گونه انتظاري نمي‌توان داشت که بردار خطاها $\mathbf{e}$ عضوي از فضاي $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ (برد[7] اپراتور $\mathbf{A}$) بوده و در شرط پیکارد صدق نموده و متعاقباً بردار مشاهدات اندازه‌گیري شده $\mathbf{b}$ نیز در شرط پیکارد صدق نماید. به عنوان مثال اگر درایه‌هاي بردار خطاها $\mathbf{e}$، مستقل

آماري و داراي توزيع نرمال با اميد صفر و واريانس σ_0^2 باشد، آنگاه با توجه به اورتونرمال بودن ماتريس $\mathbf{U}$، هريک از ضرايب فوريه بردار خطاها($\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{e}$) يک متغير تصادفي نرمال با اميد صفر و واريانس σ_0^2 مي‌باشد، پس اميد قدر مطلق هر يک از ضرايب فوريه به قرار ذيل خواهد بود [۲۱]:

$$E(|\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{e}|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}m^{-\frac{1}{2}}\varepsilon \qquad (۳۰)$$

در رابطه فوق ε، نرم بردار خطاها بوده که با توجه به فرضيات فوق برابر $m\sigma_0^2$ مي‌باشد. در اين صورت احتمال آنکه قدرمطلق ضرايب فوريه يعني $|\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{e}|$ مقاديري نزديک به مقدار اميد آن($\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_0$) را اختيار نمايد، بيشتر از آن است که يک روند رو به کاهش و آن هم سريعتر از مقادير منفرد $\{\sigma_i\}$ را داشته باشد. از اين رو در اين حالت دليلي جهت برقراري شرط پيکارد وجود نخواهد داشت.

در عمل نيز ديده مي‌شود ابتدائاً که ضرايب فوريه بردار مشاهدات براي مقادير منفرد بزرگ با سرعت بيشتري نسبت به مقادير منفرد متناظرشان کاهش يافته و پس از مرتبه‌اي به بعد ديده خواهد شد که سرعت همگرايي قدر مطلق ضرايب فوريه‌ي بردار مشاهدات($\{|\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{e}|\}$) نسبت به مقادير منفرد($\{\sigma_i\}$) کمتر شده و شرط پيکارد گسسته صادق نخواهد بود. در اين حالت عدم برقراري شرط پيکارد گسسته را ناشي از خطاهاي موجود در مشاهدات و حساسيت ماتريس بد شرايط ايجاد شده به حضور خطاها در بردار مشاهدات فرض مي‌نمائيم.

پس در اين حالت از مرتبه‌اي به بعد سرعت همگرايي مقدير منفرد σ_i نسبت به سرعت رو به صفر ضرايب فوريه $\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ بيشتر شده و سبب بزرگ شدن ضرايب $\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{b}/\sigma_i$ مي گردد که متعاقباً بزرگ شدن نرم بردار مجهولات را به همراه خواهد داشت. لذا نمي‌توان انتظار داشت که جواب بدست آمده از رابطه **Error! Reference source not found.** (جواب روش کمترين مربعات)، که تا اين حد به حضور خطاها از خود حساسيت نشان مي‌دهد، جواب معقولي باشد. لذا همان گونه که در فصول آتي بدان پرداخته خواهد شد، لازم است که با استفاده از روش‌هاي که به مسأله بد وضع گسسته، يک جواب پايدار را نسبت مي‌دهد، موسوم به روش‌هاي پايدارسازي، استفاده نمود.

ميزان بد وضعي هر مسأله بد وضع گسسته به نرخ کاهش مقادير منفرد وابسته است، در مسائلي که نرخ همگرايي رو به صفر مقادير منفرد در آنها بيشتر باشد، به همان نحو سرعت بزرگ شدن ضرايب $\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{b}/\sigma_i$ بيشتر بوده و متعاقباً واگرايي سري در رابطه **Error! Reference source not found.** با سرعت بيشتري انجام خواهد پذيرفت. از اين رو با استفاده از نرخ کاهش مقادير منفرد کميتي به نام "درجه بدوضعي" به عنوان معياري جهت نشان دادن ميزان بدوضعي مسائل بدوضع گسسته، به صورت ذيل معرفي مي‌گردد.

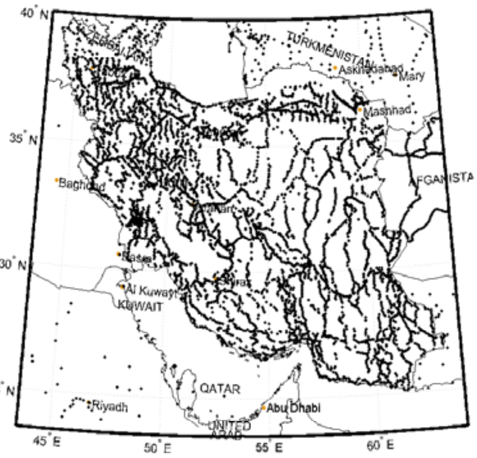
تعريف: اگر يک عدد حقيقي مثبت مانند α وجود داشته باشد، به طوري که تمامي مقادير منفرد در رابطه $\sigma_i = \mathcal{O}(i^{-\alpha})$ صدق نمايد، به عبارت ديگر به ازاي تمامي مقادير منفرد $\{\sigma_i\}$، عدد حقيقي مثبتي مانند c وجود داشته باشد، به طوري که داشته باشيم: $\sigma_i \le ci^{-\alpha}$، آنگاه به عدد α، "درجه بد وضعي" اطلاق مي‌گردد. در اين رابطه i نشان دهنده انديس مقادير منفرد مي‌باشد. اگر در مسأله‌اي درجه بد وضعي کوچکتر يا مساوي يک حاصل گردد ($\alpha \le 1$) مسأله را "بد وضع خفيف[۸]" ، اگر درجه بد وضعي بزرگتر از يک حاصل شود($\alpha > 1$)، مسأله را "بد وضع ملايم[۹]" و اگر درجه بد وضعي بسيار بزرگتر از يک بدست آيد ($\alpha \gg 1$)، مسأله را "بد وضع شديد[۱۰]" مي-نامند [۲۱].

مطالعه موردي

در مطالعه موردي انجام پذيرفته، هدف انجام مسأله انتقال به سمت پائين مشاهدات شتاب ثقل تفاضلي در تعيين ژئوئيد در منطقه جغرافيايي ايران($23.5 \le \phi \le 40$ و $43.5 \le \lambda \le 64$) بر روي بيضوي رفرانس WGD2000 بوده است [۲۴]. مبناي عمل در اين مطالعه موردي، استفاده از حل معکوس معادله انتگرالي آبل-پواسن گسسته‌شده، جهت برآورد مجهولات پتانسيل ثقل تفاضلي بوده که، بدين منظور از داده‌هاي ذيل استفاده گرديده است:

- داده‌هاي شتاب ثقل ۸۴۸۳ نقطه ثقلي بانک داده BGI در منطقه جغرافيايي ايران. در شکل(۱) نحوه توزيع اين نقاط در منطقه جغرافيايي ايران نشان داده شده است.

- ضرایب هارمونیک بیضوي تا درجه و مرتبه ۳۶۰ از مدل ژئوپتانسیل EGM96 [۲۵].
- مدل رقومي زمین $1^{km} \times 1^{km}$ در منطقه جغرافیایي ایران که توسطNIMA تهیه گردیده است [۲۶].
- ضرایب هارمونیک‌هاي مدل GTM3AR براي محاسبه طول موج هاي تا درجه و مرتبه۳۶۰ توپوگرافي در منطقه ایران [۲۷].



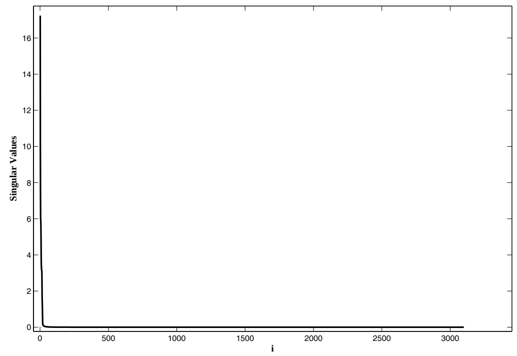
شکل ۱: موقعیت ایستگاههاي BGI درمنطقه ایران.

جهت ایجاد داده‌هاي تفاضلي ابتدا از شتاب ثقل ۸۴۸۳ نقطه ثقلي بانک دادهBGI در منطقه جغرافیایي ایران میدان شتاب ثقل رفرانس تا درجه و مرتبه۳۶۰ کسر گردید. سپس باید جهت هارمونیک سازي مشاهدات شتاب ثقل تفاضلي اثر توپوگرافي باقي مانده ناشي از جرم‌هاي بالاي بیضوي نیز از مشاهدات شتاب ثقل کسر شود لذا بدین منظور، در مرحله بعد با استفاده از انتگرال نیوتن بیضوي در سیستم تصویر هم‌مساحت چند استوانه‌اي اثر جرم‌هاي تا فاصله ۵۵ کیلومتر برروي نقاط ثقلي محاسبه نموده و این اثر را نیز از مشاهدات شتاب ثقل کم مي-نمائیم [۲۸]. بدین ترتیب کمیت‌هایي هارمونیک موسوم به مشاهدات "شتاب ثقل تفاضلي جهت استفاده در مسأله انتقال به سمت پائین با استفاده از انتگرال آبل-پواسن در رابطه (۴) حاصل مي‌آید. سپس معادله انتگرالي آبل-پواسن در رابطه (۴)، بر روي یک شبکه $20' \times 20'$ برروي بیضوي رفرانس در منطقه جغرافیایي ایران به شکل گسسته‌شدهٔ انتگرال آبل-پواسن در رابطه (۵) تبدیل می گردد. بدین ترتیب یک دستگاه معادلات بد وضع گسسته با تعداد مجهولات ۳۱۰۰ و تعداد معادلات۸۴۸۳ حاصل می آید که مشخصات آن ازجمله: رتبهٔ عددي ماتریس ضرایب ($r_\varepsilon(\mathbf{A})$)، نرم اپراتور بد وضع (یا بزرگترین مقدار منفرد: $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_{Max}$)، کوچکترین مقدار منفرد($\sigma_{Min}$) عدد شرط ماتریس ضرایب($Cond(\mathbf{A})$) و درجه بد وضعي($\alpha$) در جدول(۳) گنجانده شده است.

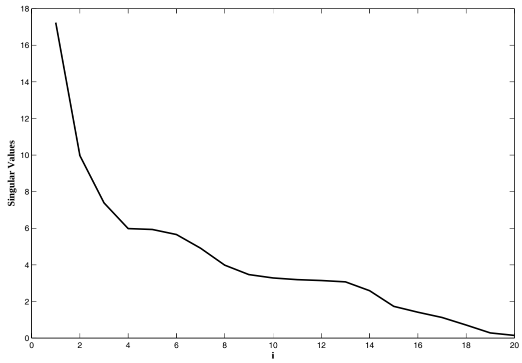
جدول ۳: مشخصات مسأله بد وضع ایجاد شده در مسأله انتقال به سمت پائین در مطالعه موردي صورت پذیرفته.

α	$Cond(\mathbf{A})$	σ_{Min}	σ_{Max}	$r_\varepsilon(\mathbf{A})$
0.62	1.11×10^{15}	1.55×10^{-14}	17.24	2572

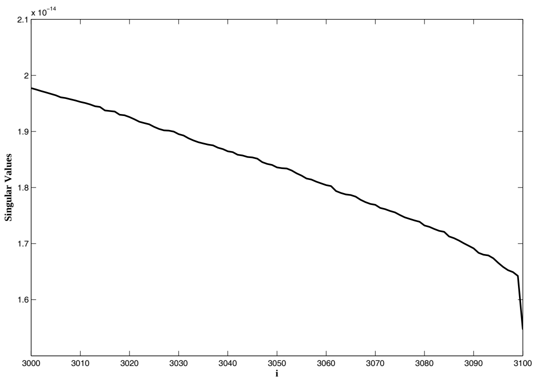
هم چنین روند کلي رو به صفر مقادیر منفرد، سیر نزولي مقادیر منفرد بزرگ و مقادیر منفرد کوچک به ترتیب در اشکال(۲)، (۳) و (۴) آورده شده است.



شکل ۲: تغییرات مقادیر منفرد.

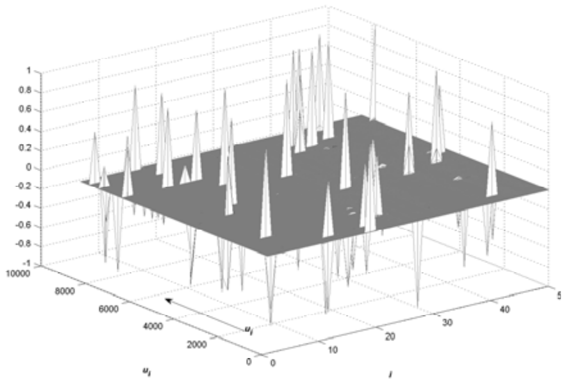


شکل۳: تغییرات نزولي مقادیر منفرد در ابتداي شکل ۳.

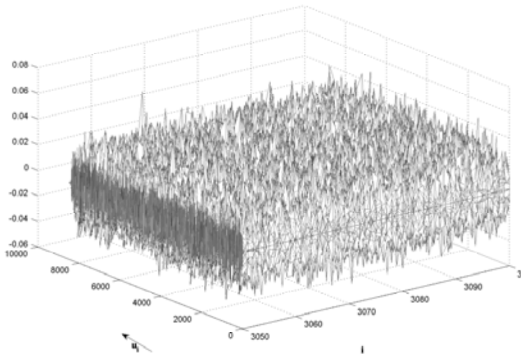


شکل٤: تغییرات نزولي مقادیر منفرد در انتها شکل ۳.

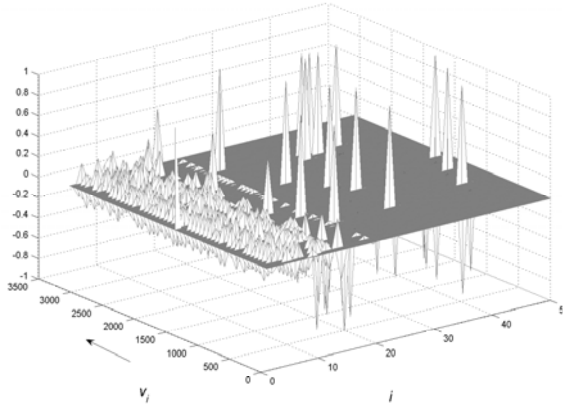
اشکال(۵) و (۶) نیز رفتار نوساني بردارهاي منفـرد چپ را به ترتیب براي مقادیر منفرد بزرگ و مقادیر منفـرد کوچک نشان داده و به صورت مشـابه در اشـکال(۷) و (۸) نیز رفتار نوساني بردارهاي منفرد راست، بـه ترتیـب بـراي مقادیر منفرد بزرگ و مقـادیر منفـرد کوچـک نشـان داده شده است. همان گونه کـه مشـاهده مـي‌شـود، بردارهـاي منفرد چپ و راست در ابتدا(بـراي مقـادیر منفـرد بـزرگ) داراي رفتار نوساني کمتر و در انتهـا بـراي مقـادیر منفـرد کوچک داراي رفتار نوساني شدیدتري مي‌باشند.



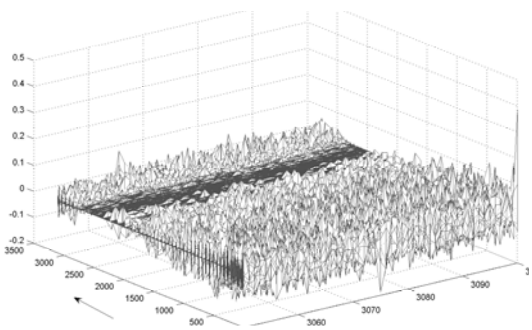
شکل ۵: رفتار نوساني بردارهاي منفرد u_i براي مقادیر منفرد بزرگ.



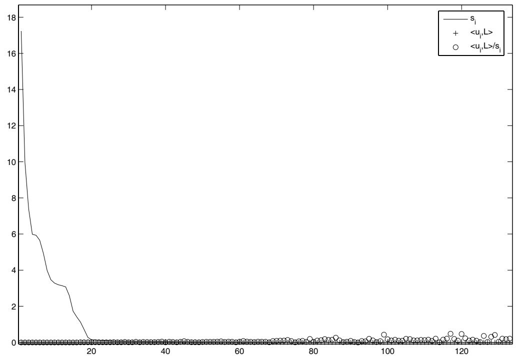
شکل ٦: رفتار نوساني بردار منفرد u_i براي مقادیر منفرد کوچک.



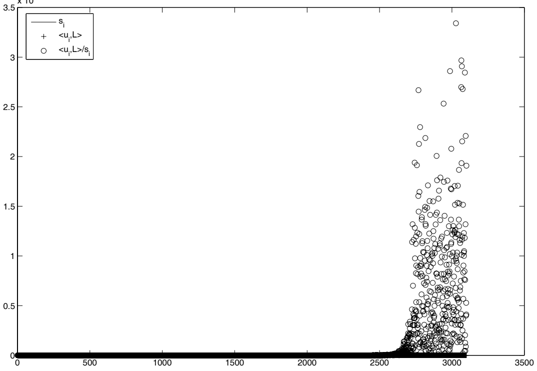
شکل ۷: رفتار نوساني بردار منفرد v_i براي مقادیر منفرد بزرگ.



شکل ۸: رفتار نوساني بردار منفرد v_i براي مقادیر منفرد کوچک.



شکل ۹: برقراري شرط پیکارد براي مقادیر منفرد بزرگ.



شکل ۱۰: عدم برقراري شرط پیکارد براي مقادیر منفرد کوچک.

در اشكال (۹) و (۱۰) نیز شرط پیکارد به ترتیب براي مقادير منفرد بزرگ و مقادير منفرد كوچک بررسي گرديده است و مشاهده گرديد كه تا انديس 205ام قدرمطلق ضرايب فوريه بردار مشاهدات(يعني $|\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{b}|$)، كوچكتر از مقادير منفرد متناظر آن σ_i مي‌باشد.

بحث و نتيجه

با توجه به اطلاعات جدول (۳) در خصوص مسأله بد وضع ايجاد شده ناشي از گسسته‌سازي انتگرال آبل-پواسن، در مسأله انتقال به سمت پائين، ماتريس حاصله، با توجه به اختلاف زياد بزرگترين مقدار منفرد σ_{Max} و كوچكترين مقدار منفرد σ_{Min} يعني $\sigma_{Max} \gg \sigma_{Min}$ و يا به عبارت ديگر بزرگ بودن عدد شرط نسبت به عدد يک ($1.11\times10^{15} \gg 1$)، يک ماتريس بدشرايط به حساب مي‌آيد. از نقطه نظر تئوري رياضي به دليل مخالف صفر بودن كوچک‌ترين مقدار منفرد، ماتريس ضرايب يک ماتريس با رتبه كامل محسوب مي‌گردد ($r_\varepsilon(\mathbf{A}) = n = 3100$).

در خصوص بد وضعي مسأله بدوضع گسسته در مسأله انتقال به سمت پايين در مطالعه موردي انجام پذيرفته، "درجه بد وضعي برابر 0.62 حاصل گرديد كه عددي كوچک تر از يک است و از اين رو اين مسأله بدوضع با توجه به آن چه كه پيشتر در مورد بد وضعي مسائل بدان اشاره گرديد، يک مسأله بد وضع خفيف محسوب مي‌گردد. هم چنين در خصوص بدوضعي مسأله بد وضع گسستهٔ مفروض، رفتار مقادير منفرد و بردارهاي منفرد نيز در اين مطالعه موردي بررسي قرارگرفت، كه با توجه به آن چه كه از مسائل بد وضع گسسته انتظار مي‌رفت، اين مسأله هنوز يک سري از مشخصه‌هاي مسأله بدوضع پيوسته از جمله: روند رو به صفر مقادير منفرد، (شكل۲، ۳ و ۴) و رفتار نوساني بردارهاي منفرد (شكل ۵،۶،۷ و ۸)، را به همراه دارد.

شرط پيكارد گسسته نيز به عنوان شرط وجود جواب در مسئله بد وضع گسسته بررسي گرديد، نتايج حاكي از برقراري شرط پيكارد براي مقادير منفرد بزرگ (شكل۹) و عدم برقراري شرط پيكارد براي مقادير منفرد كوچک (شكل۱۰) مي‌باشد. همان گونه كه پيشتر بدان اشاره گرديد، عدم برقراري شرط پيكارد ناشي از حضور خطاهاي غير قابل اجتناب در بردار مشاهدات است. با توجه مطالب ذكر شده مسئله اصلي انتقال سمت پايين در شرط پيكارد صدق مي نمايد. لذا مسئله انتقال به سمت پايين با استفاده از انتگرال آبل-پواسن داراي جواب بوده، بنابراين براي بدست آوردن يک جواب با معني بايستي سهم جواب متناظر با مقادير منفرد كوچك كاسته يا حذف گردد كه هدف روش‌هاي پايدارسازي است.

تقدير و تشكر

از معاونت پژوهشي دانشگاه تهران و پرديس دانشكده‌هاي فني به سبب حمايت مالي از اين تحقيق در قالب طرح پژوهشي شماره ۸۱۰۳۹۱۸/۱/۰۱ تشكر و قدرداني مي‌شود.

مراجع

1 - Grafarend, E. W. (2001). "The spherical horizontal and spherical vertical boundary value problem-vertical deflections and geoidal undulations- the completed Meissl diagram." *Journal of Geodesy*, Vol. 75, PP. 363-390.

2 - Ardalan, A. A., Grafarend, E. W. (2004). "High-resolution regional geoid computation without applying Stokes's formula: a case study of the Iranian geoid." *Journal of Geodesy*, Vol. 78, PP. 138–156.

3 - Safari, A. (2004). *Ellipsoidal boundary value problem for geoid computations via modulus of gravity, astronomical longitude, astronomical latitude, and satellite altimetry observations*. Ph.D. Thesis. Department of Surveying and Geomatics Engineering University of Tehran (In Persian).

4 - Safari, A., Ardalan, A. A. and Grafarend, E. W. (2005). "A new ellipsoidal gravimetric, satellite altimetry and astronomic boundary value problem, a case study: The geoid of Iran." *Journal of Geodynamics*, Vol. 39, PP. 545-568.

5 - Rasmussen, J. M. (2001). *Compact linear operators and Krylov subspace methods*. Master Thesis. IMM-EKS-2001-9.

6 - Hadamard, J. (1902). *Sur les Problems aux derives particles et leur signification physique*. Princeton University Bulletin, Vol. 13, PP. 49-52.

7 - Moritz, H. (1966a). *Linear Solutions of the geodetic boundary-value problem*. Rep. 79, Department of geodetic science and surveying, the Ohio state university, Columbus, USA.

8 - Krarup, T. (1969). *A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy*. Rep. 44, Geodaetisk Institu, Kobenhavn.

9 - Schwartz, K. P. (1971). *Numerical Untersuchungen zur Schwerefortsetzung*. Deutshe Geodatische Kommission, Rrihe C, Heft Nr. 171, Munchen.

10 - Schwartz, K. P. (1978). "Geodetic improperly posed problems and their regularization." *Lecture Notes of the Second International School od Advanced Geodesy*, Erice.

11 - Grafarend, E. K. (1972). "Inverse potential problems of improperly posed type in physical geodesy and geophysics." *Contribution Presented to the International Symposium on Earth Gravity Models and Related Problems*, Saint Louis, Missouri, August 16-18.

12 - Sjoberg, L. (1975). "On the discrete boundary value problem of physical geodesy with harmonic reductions to an internal sphere." *The Royal Institue of Technology, Division of Geodesy*, Stockholm.

13 - Engl, H. W. (1982) "On least-squares collocation for solving linear integral eq uations of the first kind with noisy right-hand side." *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini,* Vol. 41, PP. 291-313.

14 - Ilk, K. H. (1987). "On the regularization of ill-posed problems." In: Figure and Dynamics of the Earth, Moon, and Planets, ed. P. Holota, *Research Inst. Of Geodesy, Topography and Cartography*, Prague, PP. 365-383.

15 - Ilk, K. H. (1993). *Regularization for high resolution gravity field recovery by future satellite techniques: In: Inverse Problems: Principles and applications in Geophysics, Technology, and Medicine*, eds. G. Anger, R. Gorenflo., H. Jochmann, H. Moritz and W. Webers, PP. 189-214.

16 - Engels, J., Grafarend, W. Keller, Z. Martinec, F. and Sanso, P. Vanicek. (1993). *The geoid as inverse problem to be regularized. In: Inverse Problems: Principles and Applications in Geophysics, Technology, and Medicine*, eds. G. Anger, R. Gorenflo, H. Jochmann, H. Moritz, W. Webers, Akademic Verlag GmbH, Berlin.

17 - Chavent, G., Panicolaou G., Sacks P. and Symes, W. (1997). "Inverse problems in wave propagation." *The IMA volumes in mathematics and its application*, Vol. 90, Springer-Verlag Newyork, INC.

18 - Kirsch, A. (1996). "An introduction to the mathematical theory of inverse problems." *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 120, Springer-Verlag, New York.

19 - Martinec, Z. (1996). *Boundary value problems for gravimetric determination of a precise geoid*. PhD. Thesis. Department of Geophysics Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, Czech Republic.

20 - Hansen, P. C. (1996). Rank-Deficient and Discrete Ill-posed problems. PhD Dissertation. Department of mathematical modeling building 305, technical university of Denmark, Dk-2800 Lyngby, Denmark.

21 - Hansen, P. C. (1998). *Regularization tools; A MATLAB package for analysis and solution of discrete ill-posed problems*. Department of masthematical modeling building 305, technical university of Denmark, Dk-2800 Lyngby, Denmark.

22 - Griffel, D. H. (1988). *Applied Functional Analysis*. Ellis Horwood Limited Publishers.

23 - Huang, J. (2002). *Computational methods for the discrete downward continuation of the Earth gravity and effects of lateral topographical mass density variations on gravity and the geoid*. PhD thesis, Department of Geodesy and`Geomatics Engineering, the university of New Brunsweick, Fredericton, New Brunsweick.

24 - Grafarend, E. W. and Ardalan, A. A. (1999). "World Geodetic Datum 2000." *Journal of Geodesy*, Vol. 73, PP. 611-623.

25 - Lemoine, F. G., Smith, D. E., Kunz, L., Smith, R., Pavlis, E. C., Pavlis, N. K., Klosko, S. M., Chinn, D. S., Torrence, M. H., Williamson, R. G., Cox, C. M., Rachlin, K. E., Wang, Y. M. Kenyon, S. C., Salman, R., Trimmer, R., Rapp, R. H., and Nerem, R. S. (1996). *The development of the NASA GSFC and NIMA joint geopotential model. In: J. Segawa, H. Fujimoto, and S. Okubo (eds), Gravity, Geoid and Marine Geodesy, International Association of Geodesy Symposia*, Vol. 117, Springer, Berlin Heidelberg, PP. 461-469.

26 - Nima. (2003). http://docs.lib.duke.edu/maps/guides/govt.html.

27 - Wenzel Georg Home page (2005). http://www1.gik.uni-karlsruhe.de/~wenzel/geopmods.htm

28 - Ardalan, A. A. and Safari, A. (2004). "Terrain correction on the multi-cylindrical equal area map projection of the surface of the reference ellipsoid." *Journal of Geodesy*, Vol. 78, PP. 114-123.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1 - Molodensky
2 - Quasi Geoid
3 - Normal height Systems
4 - Oblique
5 - Ill-posed
6 - Singular Value Decomposition
7 - Range
8 - Mildly Ill-posed
9 - Moderately Ill-posed
10 - Severely Ill-posed