

## جواب معادله پواسون غیر خطی با شرایط مرزی مخلوط به روش اجزاء محدود

غلامرضا شهريار حشمتی<sup>۱\*</sup> و بهمن مهري<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>دانشیار گروه علوم پایه مهندسی - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

<sup>۲</sup>استاد دانشکده ریاضی - دانشگاه صنعتی شریف

(تاریخ دریافت ۸۶/۹/۱۲، تاریخ تصویب ۸۷/۲/۲۹)

### چکیده

در این مقاله، معادله پواسون را که مدل ریاضی بسیاری از مسائل فیزیکی و مهندسی مانند انتقال حرارت و غیره می باشد در نظر گرفته و با استفاده از روش اجزاء محدود، معادله را به صورت عددی حل نموده و در حالات خاصی که بتوان جواب معادله انتقال حرارت را به صورت تحلیلی به دست آورد با جواب عددی مقایسه می نماییم. جالب توجه است که بسیاری از این مسائل که در مهندسی کاربرد فراوان دارند به طور کامل حل نشده است. مثلاً اگر بخواهیم انتقال حرارت روغن ماشین را در یک مخزن کروی شکل  $S$  تحت تاثیر حرارت به دست آوریم به معادله  $\Delta u = f = u^\alpha$  با شرط مرزی  $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial S} = g = 0$  می رسیم که تاکنون به طور کامل حل نشده است. در این مقاله ادعا نمی کنیم که تمام مسائل پواسون<sup>۱</sup> با شرایط مرزی را حل می نماییم، بلکه روشی برای روشن شدن مطلب ارائه می دهیم.

**واژه های کلیدی:** معادله پواسون - روش اجزاء محدود - روش گالرکین<sup>۲</sup> - روش گاوس<sup>۳</sup>

### مقدمه

در مورد مسئله پواسون به خاطر کاربردهای فراوان آن تحقیقات بسیاری انجام گرفته است. یادآوری می شود که مسائلی مانند:

$$-\Delta u = F(u), \quad u \in \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = f \quad (1)$$

$$u \Big|_{\Gamma_2} = \bar{u}$$

که در آن  $\Omega$  ناحیه ای کراندار در فضای  $\mathbf{R}^n$  و  $\Gamma = \partial\Omega$ ، مرز  $\Omega$  است که تشکیل شده از  $\Gamma_1$  و  $\Gamma_2$  که دارای کاربردهای فراوانی در بسیاری از مسائل مهندسی، مانند انتقال حرارت، پیچش یک میله و غیره می باشد. در ادامه به حل نوع خاصی از این مسئله می پردازیم.

### پایه ریاضی

معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر را همراه با شرایط مرزی آن در نظر می گیریم:

$$-\Delta u = u^\alpha, \quad u \in \Omega, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = f \quad (3)$$

$$u \Big|_{\Gamma_2} = \bar{u} \quad (4)$$

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma = \partial\Omega \quad (5)$$

که در آن  $\Omega$  یک ناحیه کراندار  $\mathbf{R}^n$  است،  $\Gamma = \partial\Omega$  مرز  $\Omega$  که جز در گوشه ها هموار فرض می شود،  $\mathbf{n}$  بردار قائم

یکه خارجی  $\Gamma$  و  $\Delta = \nabla^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  اپراتور لاپلاس

می باشد.

یک فرمول بندی ضعیف معادله (۱) به صورت

$$-\int_{\Omega} \Delta u v d\Omega = \int_{\Omega} u^\alpha v d\Omega, \quad \forall v \in H^1 \quad (6)$$

می باشد که در آن تابع وزن یا تابع تست  $v$  در فضای سوبولو  $H^1(\Omega)$  فرض می شود. با استفاده از فرمول گرین<sup>۵</sup>،

$$-\int_{\Omega} v \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \quad (7)$$

معادله به صورت

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} v u^\alpha d\Omega \quad (8)$$

نوشته می شود.

### تابع تقریب

در معادله (۷) انتگرال ها روی تمام ناحیه  $\Omega$  و

$$[K]_{n \times n} \cdot \{u\}_{n \times 1} = \{f\}_{n \times 1} - \{E\}_{n \times 1} \quad (17)$$

$$[K] \cdot \{u\}^k = \{f\} - \{E\}^{k-1} \quad (18)$$

$$\{u\}^\circ = \{o\} \Rightarrow \{E\}^\circ = \{o\} \quad (19)$$

که در آن اندیس بالا تعداد تکرارها و اندیس پایین مرتبه ماتریس ها را نشان می دهد. معیارهای همگرایی مختلفی را می توان مانند رابطه زیر در نظر گرفت:

$$\frac{(\sum_{i=1}^n (u_i^k - u_i^{k-1})^2)^{0.5}}{(\sum_{i=1}^n (u_i^k)^2)^{0.5}} \leq \text{Tol} \quad (20)$$

که در آن n تعداد تکرارها و Tol یک تولرانس قابل قبول است.

همان طور که در معادلات (۱) دیده می شود، دو نوع از شرایط مرزی وجود دارند که یک قسمت از شرایط مرزی، مقادیر داده شده u و در بقیه، تغییرات u می باشد. بنابراین، معادله (۱۸) به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}^k = \begin{Bmatrix} \bar{f}_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} E_1 \\ \bar{E}_2 \end{Bmatrix}^{k-1} \quad (21)$$

که در آن  $\bar{u}_2$ ،  $\bar{f}_1$  و  $\bar{E}_2$  مقادیر معلومی می باشند. همان طور که ملاحظه می گردد، معادله (۲۱) به معادله تکراری زیر منجر می شود.

$$[k_{11}] \cdot \{u_1\}^k = \{\bar{f}_1\} - [K_{12}] \cdot \{\bar{u}_2\} - \{E_1\}^{k-1} \quad (22)$$

و در آخر تکرار، در صورت لزوم،  $f_2$  به سادگی محاسبه می شود.

### مثال های عددی

براساس بخش قبل می توان یک برنامه کامپیوتری برای حل معادله (۱) نوشت. برای افزایش ظرفیت برنامه از روش اسکایلاین استفاده شده است [۱]. در این بخش چند مثال عددی ارائه شده و در تمام آنها مقایسه ای بین جواب های عددی و تحلیلی انجام می گیرد.

**مثال ۱:** به ازای  $n = 1$  (حالت یک بعدی) و  $\alpha = 1$ ، مسئله با مقدار مرزی زیر را در نظر می گیریم.

$$y'' = y, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (23)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0,027778$$

جواب تحلیلی مسئله، عبارت است از

$$y = \frac{e^{1+x} - e^{1-x}}{36(1+e^2)} \quad (24)$$

مرز  $\Gamma$  آن داده شده اند. با استفاده از خاصیت انتگرال های معین و با تقسیم ناحیه  $\Omega$  به  $m$  زیر ناحیه یا جزء، معادله (۳) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\sum_{e=1}^m \int_{\Omega^e} (\nabla u \cdot \nabla v) d\Omega = \sum_{e=1}^m \int_{\Gamma^e} v \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma + \sum_{e=1}^m \int_{\Omega^e} v u^\alpha d\Omega \quad (9)$$

و ناحیه را طوری تقسیم می کنیم که دارای  $h$  گره باشد و تابع  $u$  را با تابع زیر تقریب می نمائیم:

$$u \approx \sum_{i=1}^8 \Psi_i u_i \quad (10)$$

که در آن  $u_i$  مقادیر گره ای  $u$  و  $\Psi_i$  "توابع شکل" می باشند.

به وضوح در حالت کلی

$$\Psi_i(x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (11)$$

با استفاده از روش گالرکین، با قرار دادن  $v = \Psi_i$ ، معادله (۹) روی هر عنصر یا جزء به صورت زیر نوشته می شود:

$$\int_{\Omega^e} (\nabla \Psi_i \cdot \nabla (\sum_{j=1}^8 \Psi_j u_j)) d\Omega = \int_{\Gamma^e} \Psi_i \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega^e} (\Psi_j (\sum_{j=1}^8 \Psi_j u_j)^\alpha) d\Omega \quad (12)$$

که در آن  $i = 1, 2, \dots, 8$

بالاخره معادله (۱۲) به صورت زیر نوشته می شود.

$$[K^e]_{8 \times 8} \cdot \{u^e\}_{8 \times 1} = \{f^e\}_{8 \times 1} - \{E^e\}_{8 \times 1} \quad (13)$$

یا  $K_{ij}^e u_j^e = f_i^e - E_i^e$

که در آن

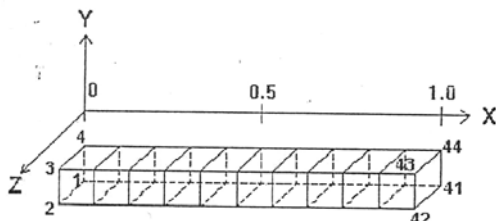
$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} (\nabla \Psi_i \cdot \nabla \Psi_j) d\Omega \quad (14)$$

$$f_i^e = \int_{\Gamma^e} \Psi_i \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \quad (15)$$

$$E_i^e = \int_{\Omega^e} (\Psi_i (\sum_{j=1}^8 \Psi_j u_j)^\alpha) d\Omega \quad (16)$$

بوده و در تمام آنها  $i = 1, 2, \dots, 8$  می باشد. این انتگرال ها را با هر تعداد دلخواه از نقاط انتگرال گیری به روش گاوس که شرح آن در پیوست داده خواهد شد، محاسبه می کنیم.

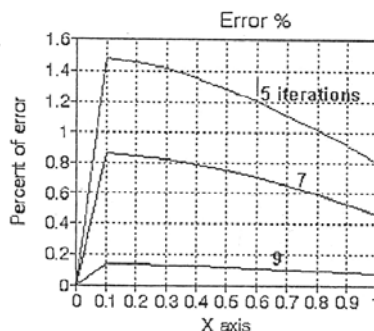
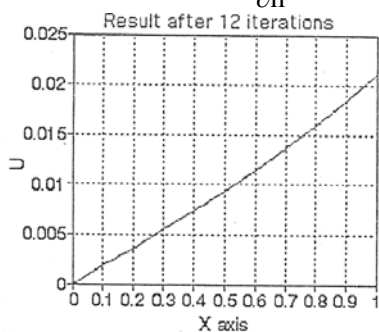
پس از محاسبه ماتریس های هر جزء، با جمع آنها حاصل را روی تمام ناحیه به دست می آوریم. معادله (۱۵) عبارت غیرخطی دستگاه را نشان می دهد و با روش تکراری نقطه ثابت دستگاه را به صورت زیر حل می نمائیم:



شکل ۱: عناصر محدود برای شرایط مرزی مثال ۱.

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x=1} = y'(1) = 0,0277778$$



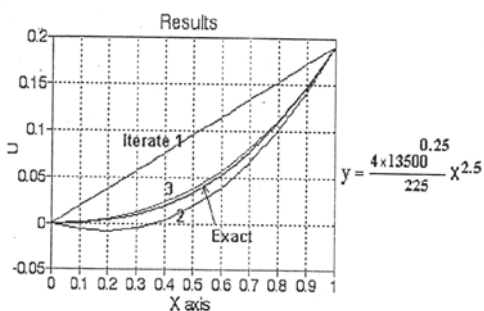
شکل ۲: جواب مسئله بعد از ۱۲ تکرار و خطای محاسبه.

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$$

(۲۷)

$$u_{41} = u_{42} = u_{43} = u_{44} = 0.191629$$

این بار نیز همان طور که در شکل (۳) نشان داده شده است. از ۸ نقطه گاوسی استفاده شده است.



شکل ۳: مقایسه جواب تقریبی با جواب اصلی.

**مثال ۳:** این مثال که آخرین مثال یک بعدی، به ازای

$$\alpha = 0.5 \text{ می باشد، مسئله زیر را در نظر می گیریم.}$$

$$y'' = y^{0.5}, \quad 1 \leq x \leq 2 \quad (28)$$

$$y(1) = 0.0069444, \quad y'(2) = 0.222222$$

جواب تحلیلی مسئله عبارت است از

$$y = \frac{x^4}{144} \quad (29)$$

شکل (۱) نشان می دهد که چگونه می توان این مسئله یک بعدی را با برنامه ای که در اصل برای مسائل سه بعدی نوشته شده است حل کرد. ابتدا، بازه  $[0,1]$  را با استفاده از ۱۰ جزء فضائی با اضلاع موازی تقسیم می کنیم. دو بعد دیگر را می توان به دلخواه انتخاب کرد. تمام انتگرال گیری ها با ۸ نقطه گاوسی انجام گرفته است. در این مثال که بعد از ۱۲ تکرار برنامه همگرا می شود، قابل ذکر است که تنها برای ۸ نقطه گاوسی و ۱۰ تقسیم محور  $X$ ، جواب مناسب بوده و شکل (۲) نتیجه و هم چنین اثر تعداد تکرارها را روی نتیجه نشان می دهد.

**مثال ۲:** مسئله ای یک بعدی با  $\alpha = 0.2$  را با شرایط زیر در نظر می گیریم.

$$y'' = y^{0.2}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (25)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.191629$$

جواب تحلیلی مسئله عبارت است از

$$y = \frac{(4.13500)^{0.25}}{225} x^{2.5} \quad (26)$$

هندسده مسئله دقیقاً مانند شکل (۱) بوده جز برای شرایط مرزی که به صورت زیر می باشند:

در این مثال  $\alpha$  برابر ۱ بوده و جواب تحلیلی مسئله عبارت است از

$$u = 4 \cosh(2x) \cos(y\sqrt{3}) \quad (31)$$

در کوشش اول، ضمن این که از ۱۶ جزء فضائی با ۸ نقطه گاوسی استفاده شده است، استحکام اجسام از اهمیتی برخوردار نیستند. شکل (۵) گسسته سازی فضائی مسئله و مقایسه جواب دقیق و جواب عددی را بعد از ۶ تکرار نشان می دهد. از آن جایی که برنامه تنها ثابت  $\frac{\delta u}{\delta n}$  را در سطوح جسم قبول می کند، از یک میزان متوسط برای آن استفاده شده است.

همان طور که مشاهده می شود تعداد نقاط گاوس تاثیر کمی روی جواب دارند. شکل (۶) نتیجه یک گسسته سازی کوچک تر مسئله (۶۴ عنصر یا جزء) را بعد از ۹ تکرار و مقایسه جواب دقیق با جواب عددی را نشان می دهد و جواب بسیار بهتر است.

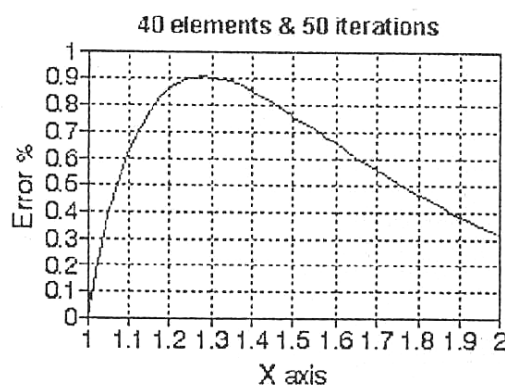
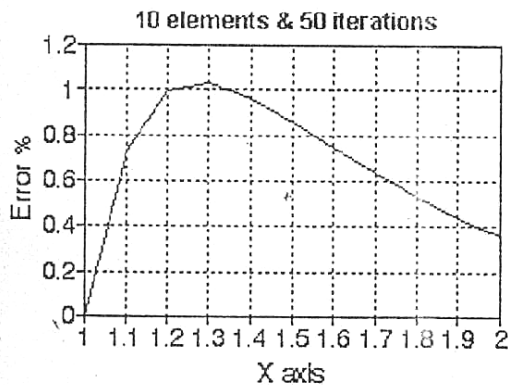
که در آن از دو گسسته سازی مختلف اولی با ۱۰ جزء و دومی با ۴۰ جزء برای  $X$  بین ۱ و ۲ استفاده شده است. در هر دو مورد ۵۰ تکرار و ۸ نقطه گاوسی منظور گردیده است. شکل (۴) درصد خطا را در این حالات نشان می دهد. همان طور که دیده می شود، تقسیم ۱۰ جزء دقت کافی را به دست می دهد.

**مثال ۴:** مسئله ۲ بعدی زیر را در یک ناحیه مربعی شکل در نظر می گیریم.

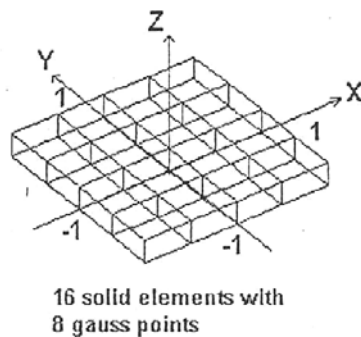
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u, \quad -1 \leq x, y \leq 1$$

$$u|_{x=\pm 1} = 4 \cosh 2 \cos(y\sqrt{3}) \quad (30)$$

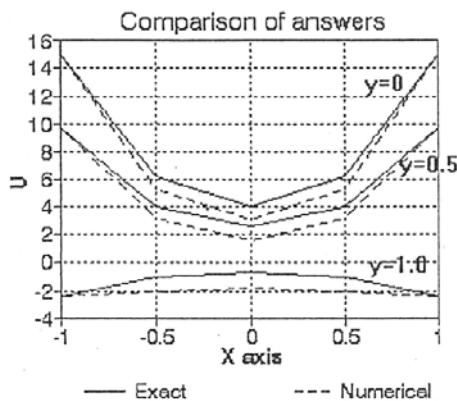
$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{y=\pm 1} = -4\sqrt{3} \sin \sqrt{3} \cosh(2x)$$



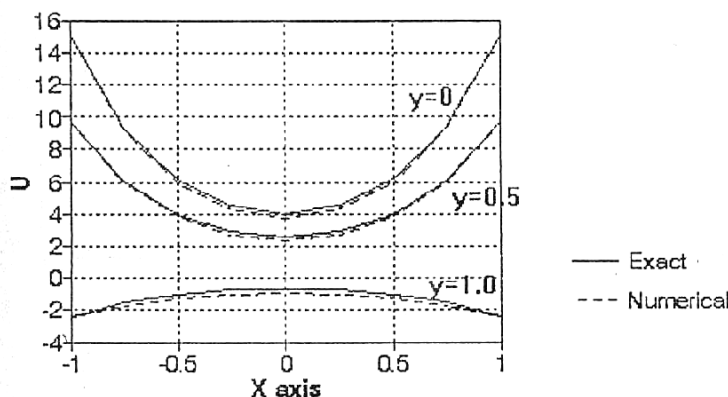
شکل ۴: الف - ۴۰ عنصر با ۵۰ تکرار ب - ۱۰ عنصر با ۵۰ تکرار.



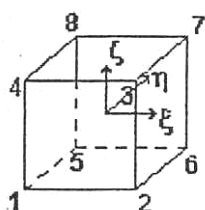
16 solid elements with 8 gauss points



شکل ۵: ۱۶ عناصر صلب با ۸ نقاط گاوسی.



شکل ۶: ۶۴ عنصر صلب با ۸ نقاط گوسی.



شکل ۷: مختصات نرمالیزه.

تمام ابعاد مکعب در شکل (۷) برابر ۲ می باشند. در این مختصات، توابع شکل عبارتند از

$$\psi_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) / 8$$

$$\psi_8 = (1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) / 8$$

که در آن اجزای فضائی مورد استفاده هم پیرامون می باشند. برای محاسبه گرادیان و توابع شکل، داریم:

$$\nabla \psi_i = \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x}, \frac{\partial \psi_i}{\partial y}, \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right) \quad (2)$$

$$\{\nabla \psi_i\} = [J]^{-1} \{\nabla_{\xi} \psi_i\} \quad (3)$$

که در آن زیر نویس  $\xi$  به معنی آن است که مشتق گیری نسبت به مختصات نرمال شده انجام گرفته است و  $J$  ماتریس ژاکوبی می باشد. بنابراین معادله (۲۲) در مختصات نرمال شده به صورت زیر نوشته می شود:

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} (\nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\nabla_{\xi} \psi_i) \cdot J^{-1T} \cdot J^{-1} \cdot \{\nabla_{\xi} \psi_j\} |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (4)$$

### نتیجه گیری

روش اجزای محدود برای حل یک مسئله پواسون غیر خطی به طور مشروح شرح داده شد. دستگاه معادلاتی که نتیجه می شوند به طور طبیعی غیرخطی بوده و با روش تکرار ساده حل گردد و یک برنامه کامپیوتری غیر خطی جزء محدود بنا شده روی آن نوشته می شود.

هرچند که مثال های ارائه شده ناحیه های بسیار منظم می باشند ولی نتایج به خوبی نشان می دهد که می توان روش را برای نواحی مشکل تر نیز مورد استفاده قرار داد.

### تقدیر و تشکر

این مقاله مستخرج از طرح پژوهشی شماره ۶۱۱/۲/۱۰۵۷ با پشتیبانی مالی و معنوی پردیس دانشکده های فنی دانشگاه تهران میسر گردید، لذا لازم می دانیم از مسئولین محترم پردیس دانشکده های فنی و معاونت محترم پژوهشی دانشگاه تهران تشکر و قدردانی نمائیم.

### پیوست

مناسب است که برای سادگی محاسبات مختصات نرمال شده مانند آنچه در شکل (۷) نشان داده شده است در نظر گرفته شود و توابع شکل در این مختصات دانسته فرض شده باشند.

$$E_i^e = \int_{\Omega^e} (\psi_i (\sum_{j=1}^8 \psi_j u_j)^{\alpha}) d\Omega = \quad (6)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\psi_i (\sum_{j=1}^8 \psi_j u_j)^{\alpha}) |J| d\xi d\eta d\zeta$$

ذکر این نکته ضروری است که در تمام انتگرال‌ها از انتگرال گیری گاوس استفاده گردیده و اثر تعداد نقاط انتگرال گیری روی مثال‌ها نشان داده شده است.

برای محاسبه انتگرال (۲۳) فرض می‌شود که تغییر  $u$  روی سطح ثابت و برابر  $f$  می‌باشد و در صورت نیاز انتگرال گیری روی هر وجه جزء سطح انجام می‌گیرد.

$$f_i^e = \int_{A^e} \psi_i \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\psi_i f}{|\cos \gamma|} |J| d\xi d\eta \quad (5)$$

که در آن  $\gamma$  زاویه بین محور  $Z$  و قائم بر وجه با فرض آنکه سطح موازی با محور  $Z$  نباشد بوده و در نهایت برای محاسبه انتگرال (۲۴) از روابط زیر استفاده می‌گردد:

## مراجع

- 1 - Bathe, J. K. (1982). *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hill, Englewood Cliffs, New Jersey.
- 2 - Brezis, H. and Nierenberg, L. (1983). "Positive solutions of nonlinear ellip. Eq. involving critical sobolev exponents." *Com. Pure Appl. Math.* Vol. 36, No. 4, PP. 437-477.
- 3 - Brezis, H. and Peletier, L. A. (2006). "Elliptic equations with critical exponent on spherical caps of  $S^3$ ." *J. Anal. Math.*, Vol. 98, PP. 279-316.
- 4 - Chabrowski, J. and Yan S. (1999). "Concentrations of solutions for a nonlinear ellip., Problem with nearly crical exponent." *Topol. Methods Nonlin. Anal.* Vol. 13, No. 2, PP. 199-233.
- 5 - Pohozaev, S. I. (195). *Eigenfunctions of the equation -  $\delta u + \lambda f(u) = 0$* , *Soviet Math. Dokl.* Vol. 6, PP. 1408-1411.
- 6 - Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. (1991). *The finite element method*, MacGraw-Hill, New York, Vol. 2.

## واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 - Poisson
- 2 - Galerkin
- 3 - Gauss
- 4 - Sobolev
- 5 - Green