

## تحلیل کرانه فوقانی اکستروژن مستقیم چرخ دنده های ساده با پروفیل دندانه اصلاح شده

### احسان خادمی<sup>۱</sup> و حشمت اله حقیقت<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> دانش آموخته کارشناسی ارشد گروه مهندسی مکانیک- دانشکده فنی و مهندسی- دانشگاه رازی کرمانشاه  
<sup>۲</sup> استادیار گروه مهندسی مکانیک- دانشکده فنی مهندسی- دانشگاه رازی کرمانشاه  
(تاریخ دریافت ۸۶/۴/۲، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۶/۱۲/۱۵، تاریخ تصویب ۸۷/۸/۶)

### چکیده

این مقاله به تحلیل کرانه فوقانی اکستروژن مستقیم چرخ دنده های ساده با پروفیل دندانه اصلاح شده می پردازد. با وارد کردن مشخصات هندسی چرخ دنده ساده شامل: مدول، تعداد دندانه، زاویه فشار، شعاع سوراخ مرکزی، شعاع و ضریب اصلاح دندانه به برنامه کامپیوتری نوشته شده به زبان Visual Basic، مدل سه بعدی آن در محیط نرم افزار SolidWorks ایجاد می شود. با استفاده از مدل ایجاد شده، ابعاد بیلت محاسبه و مدل سه بعدی بیلت و حفره قالب اکستروژن آن به طور خودکار ایجاد می گردند. تحلیل کرانه فوقانی فرآیند با در نظر گرفتن یک نیم دندانه و تقسیم آن به دوازده ناحیه تغییر شکل و با فرض متقارن محوری جریان فلز در هر ناحیه، انجام شده است. میزان نیروی شکل دهی محاسبه شده از روش کرانه فوقانی با نیروی شکل دهی به دست آمده از آزمایش های انجام شده توسط سایر محققین مقایسه و در انتها نیز تأثیر عوامل مختلف بر روی نیروی اکستروژن بررسی گردیده است.

**واژه های کلیدی:** چرخ دنده ساده، مدل سازی هندسی، اکستروژن مستقیم، کرانه فوقانی

### مقدمه

این مقاله به مدل سازی هندسه سه بعدی چرخ دنده های ساده با پروفیل دندانه اصلاح شده و تحلیل کرانه فوقانی<sup>۳</sup> فرآیند اکستروژن مستقیم آنها می پردازد. در قسمت اول این مقاله رابطه های ریاضی حاکم بر پروفیل دندانه اصلاح شده و مدل سازی هندسی سه بعدی بیان گردیده و در قسمت دوم به تحلیل فرآیند با روش کرانه فوقانی پرداخته است. در قسمت سوم مقدار نیروی اکستروژن به دست آمده از تحلیل کرانه فوقانی با نتایج آزمایش مقایسه شده و در پایان نیز اثر عوامل مختلف بر نیروی اکستروژن بررسی گردیده است.

شکل دهی چرخ دنده ها با روش اکستروژن مستقیم سبب کاهش اتلاف ماده خام، افزایش سرعت تولید، افزایش مقاومت به سایش و افزایش عمر خستگی گردیده لذا برای شکل دهی چرخ دنده های ساده از این فرآیند استفاده می شود. در این فرآیند، مدل سازی دقیق و سریع قالب و نیز آگاهی از میزان نیروی اکستروژن دارای اهمیت زیادی می باشد. تحقیقات انجام شده در زمینه اکستروژن مستقیم<sup>۱</sup> چرخ دنده های ساده بسیار اندک است. در سال ۲۰۰۴ سونگ و ایم سیستم طراحی به کمک کامپیوتری ارائه کردند که تأثیر عوامل مختلف مانند نسبت اکستروژن و هندسه چرخ دنده را توسط برنامه اجزای محدود سه بعدی مورد بررسی قرار می داد [۱]. آنها اخیراً آزمایش های عملی نیز بر پایه همان سیستم انجام داده اند [۲]. کن و همکاران با استفاده از روش کرانه فوقانی نیروی مورد نیاز شکل دهی قطعات شبه چرخ دنده با روش اکستروژن جانبی<sup>۲</sup> را محاسبه نمودند [۳]. آنها پروفیل دندانه را به صورت خطی فرض کردند. تا کنون هیچ گونه تحلیلی بر روی فرآیند اکستروژن مستقیم چرخ دنده های ساده با پروفیل دندانه اینولوت به روش کرانه فوقانی صورت پذیرفته است.

### مدل سازی هندسی

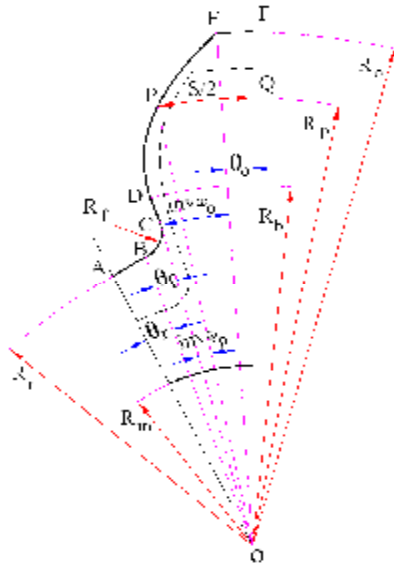
#### مدل سازی چرخ دنده های ساده

به دلیل تقارن، برای مدل سازی یک چرخ دنده ساده کافی است که یک نیم دندانه آن مدل شود. پروفیل یک نیم دندانه در شکل (۱) ارائه گردیده است. در این شکل، پروفیل دندانه استاندارد ( $x = 0$ ) به صورت خط چین و پروفیل دندانه اصلاح شده ( $0 < x < 1$ ) با خط پیوسته نشان داده شده است. اصلاح پروفیل دندانه در بعضی از چرخ دنده ها به دلیل مسائل طراحی آنها می باشد. برای

$$\text{angle } POQ = \frac{S/2}{R_p} \quad (10)$$

$$S/2 = \frac{m\pi}{4} + xm \tan \varphi_p \quad (11)$$

در روابط فوق، S ضخامت محیطی دندانه<sup>۱</sup> در محل دایره گام می باشد.



شکل ۱: پروفیل نیم دندانه استاندارد (خط چین) و اصلاح شده (خط پیوسته) و مشخصه های هندسی آن.

• کمان AB کمان پای دندانه است. این کمان قسمتی از یک دایره به مرکز O و به شعاع  $R_r$  می باشد، اندازه این کمان،  $\theta_r$ ، از رابطه زیر به دست می آید:

$$\theta_r = \frac{\pi}{n} - \text{inv} \varphi_o - \theta_o - \theta_f \quad (12)$$

پس از ایجاد مدل نیم دندانه، تقارن دادن نیم دندانه و سپس چیدمان زاویه ای<sup>۹</sup> به تعداد دندانه ها انجام می شود. با انجام مراحل فوق مدل سازی دو بعدی مقطع چرخ دنده به اتمام می رسد. با حجم دادن<sup>۱۰</sup> به مقطع دو بعدی به اندازه طول چرخ دنده مدل سه بعدی آن ایجاد می گردد. در مورد چرخ دنده هایی که دارای سوراخ مرکزی هستند، باید استوانه ای با شعاع سوراخ مرکزی از چرخ دنده کم شود.

### مدل سازی بیلت، حفره قالب و پانچ

بیلت به شکل استوانه با شعاع خارجی،  $R_{bi}$ ، و شعاع داخلی،  $R_m$ ، می باشد. شعاع خارجی بیلت به دلیل اطمینان از پر شدن قالب بایستی بزرگ تر از  $R_o$  باشد [۱]. شعاع داخلی بیلت برابر با شعاع سوراخ مرکزی چرخ دنده

مدل سازی نیم دندانه، باید مشخصه های لازم مانند تعداد دندانه ها،  $n$ ، مدول،  $m$ ، زاویه فشار،  $\varphi_p$ ، ضریب اصلاح دندانه<sup>۴</sup>،  $x$ ، مشخص گردند، آنگاه شعاع دایره سر،  $R_o$ ، شعاع دایره گام،  $R_p$ ، شعاع دایره مبنا،  $R_b$  و شعاع دایره ریشه،  $R_r$ ، از رابطه های ذیل محاسبه می شوند [۳]:

$$R_o = \frac{nm}{2} + (x+1)m \quad (1)$$

$$R_p = \frac{nm}{2} \quad (2)$$

$$R_b = R_p \cos \varphi_p \quad (3)$$

$$R_r = \frac{nm}{2} - (1-x)m \quad (4)$$

پروفیل دندانه اصلاح شده از چهار قسمت تشکیل شده است: کمان AB، کمان BC، پاره خط CD، منحنی DE و کمان EF تشکیل شده است.

• منحنی DE قسمت اینولوت<sup>۵</sup> دندانه بوده و از دایره مبنا تا دایره سر دندانه امتداد دارد. برای رسم این قسمت از منحنی اسپیلاین<sup>۶</sup> استفاده می شود. کل زاویه اینولوت، (زاویه DOE در شکل ۱) از رابطه زیر به دست می آید [۳]:

$$\text{inv} \varphi_o = \tan \varphi_o - \varphi_o \quad (5)$$

در رابطه مذکور،  $\text{inv}$  تابع اینولوت بوده و زاویه  $\varphi_o$  از رابطه زیر به دست می آید:

$$\varphi_o = \tan^{-1} \frac{\sqrt{R_o^2 - R_b^2}}{R_b} \quad (6)$$

• پاره خط CD یک پاره خط شعاعی با طول  $R_b - \sqrt{(R_r + R_f)^2 - R_f^2}$  بوده که انتهای قسمت گرد شده<sup>۷</sup> پای دندانه را به ابتدای منحنی اینولوت متصل می سازد.

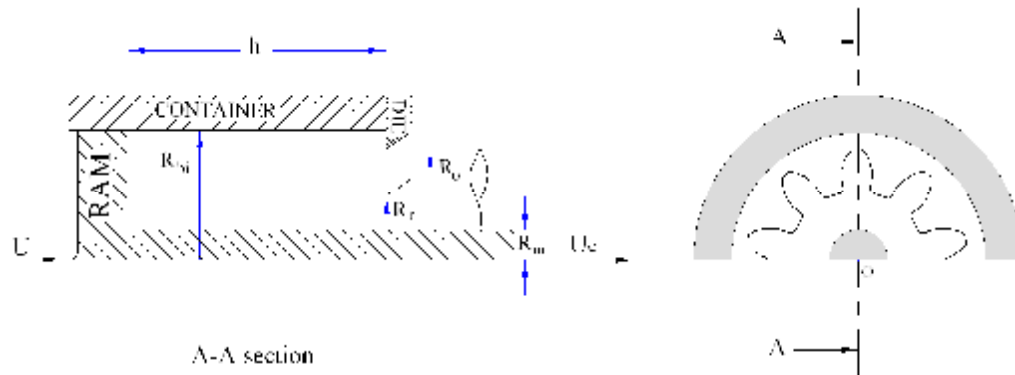
کمان BC قسمت گرد شده پای دندانه است که به پاره خط شعاعی و دایره ریشه دندانه مماس بوده و شعاع آن برابر  $R_f = 0.25m$  می باشد [۴]. اندازه زاویه این کمان،  $\theta_f$ ، نیز از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\theta_f = \sin^{-1} \frac{R_f}{R_r + R_f} \quad (7)$$

• کمان EF کمان سر دندانه است که قسمتی از یک دایره به مرکز O و به شعاع  $R_o$  می باشد، اندازه این کمان،  $\theta_o$ ، با استفاده از روابط زیر به دست می آید [۴]:

$$\theta_o = \text{inv} \varphi_p + \text{angle } POQ - \text{inv} \varphi_o \quad (8)$$

$$\text{inv} \varphi_p = \tan \varphi_p - \varphi_p \quad (9)$$



شکل ۲: فرآیند اکستروژن مستقیم چرخ دنده.

اولین عبارت سمت راست رابطه (۱۳) توان داخلی تغییر شکل<sup>۱۲</sup> در کل حجم ماده، عبارت دوم اتلاف توان برشی<sup>۱۳</sup> و عبارت سوم اتلاف توان اصطکاکی<sup>۱۴</sup> را در سطوح تماسی میان قطعه کار و قالب بیان می دارد، ضمن این که  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  نرخ کرنش،  $|\Delta V|$  ناپیوستگی سرعت و  $m_f$  ثابت اصطکاک برشی<sup>۱۵</sup> می باشد.

با توجه به این که چرخ دنده با  $n$  دندانه را می توان به  $2n$  قسمت یکسان (نیم دندانه) تقسیم نمود، تحلیل فرآیند بر اساس یک نیم دندانه انجام شده است. نیم دندانه به دوازده ناحیه تغییر شکل تقسیم و فرض شده که جریان ماده در هر ناحیه متقارن محوری می باشد<sup>۱۶</sup> (شکل ۳). در واقع هر ناحیه قطاعی از اکستروژن مقطع گرد به گرد است که در آن بیلت با شعاع  $R_{bi}$  به شعاع  $R_{eqj}$  تبدیل می شود. قطاع ها، زاویه هر قطاع و  $R_{eqj}$  هر ناحیه به شرح زیر قابل محاسبه می باشد:

- قطاع KOL ناحیه اول ( $j=1$ ) با زاویه  $\theta_o$  و شعاع دایره سر دندانه می باشد ( $R_{eq1} = R_o$ ).
- قطاع LOM (قسمت اینولوت) که ناحیه ۲ تا ۱۱ را شامل است ( $j=2,3,\dots,11$ ) به ده قسمت که دارای زوایای مساوی هستند، تقسیم شده است. شعاع هر ناحیه به نحوی محاسبه شده که منحنی اینولوت را دنبال نماید. زاویه و شعاع معادل هر ناحیه از روابط زیر به دست می آیند:

$$R_{eqj} = \frac{R_b \sqrt{\varphi_{j-2}^2 + 1} + R_b \sqrt{\varphi_{j-1}^2 + 1}}{2}, \quad j = 2, \dots, 11$$

$$\theta_{2,3,\dots,11} = \frac{1}{10} \text{inv} \varphi_o \quad (14)$$

ضمن این که  $\varphi$  ها نیز از رابطه زیر حاصل می گردند:

بوده و طول بیلت از تقسیم حجم چرخ دنده بر سطح مقطع آن به دست می آید. حفره قالب اکستروژن نیز به شکل مادگی قسمت دندانه ای چرخ دنده می باشد. پانچ که وظیفه انتقال نیرو به بیلت را بر عهده دارد، استوانه ای به شعاع خارجی بیلت بوده و چنانچه بیلت سوراخ مرکزی داشته باشد، اضافه می گردد که مندرل<sup>۱۱</sup> نامیده می شود. در اکستروژن توپر، شعاع داخلی بیلت صفر است ( $R_m = 0$ ).

کلیه موارد فوق به صورت یک برنامه کامپیوتری پارامتریک به زبان Visual Basic نوشته شده و قابل اجرا در محیط نرم افزار SolidWorks می باشند.

### فرآیند اکستروژن مستقیم چرخ دنده ساده

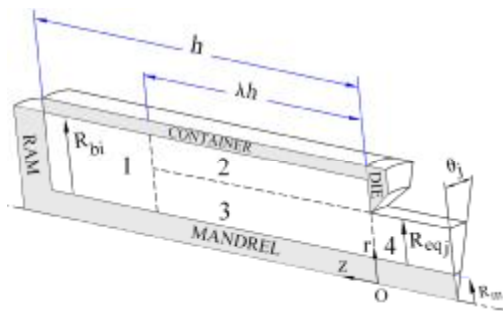
در شکل (۲) فرآیند اکستروژن مستقیم یک چرخ دنده ساده نشان داده شده است. در این فرآیند با اعمال نیروی فشاری به بیلت که داخل محفظه قالب قرار دارد، ماده از قالب (روزنه) که به شکل چرخ دنده ساده داخلی می باشد، عبور کرده و مقطع گرد بیلت به مقطع چرخ دنده ای تغییر شکل می یابد.

### تحلیل کرانه فوقانی

در تحلیل کرانه فوقانی فرض می گردد که ماده همگن و غیر قابل تراکم بوده و داری رفتار صلب-پلاستیک با تنش تسلیم  $\sigma_o$  می باشد. معادله کرانه فوقانی به صورت زیر است [۵]:

$$\dot{W} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_o \int_V \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}} dV + \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \int_{As} |\Delta V| dS$$

$$+ m_f \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \int_{Af} |\Delta V| dS \quad (15)$$



شکل ۴: شکل سه بعدی اکستروژن قطاع z ام.

$$U_z = -U, \quad U_r = 0 \tag{۱۷}$$

که U سرعت پانچ می باشد.

• ناحیه تغییر شکل دوم:  $0 \leq z \leq \lambda h, R_{eqj} \leq r \leq R_{bi}$  در این ناحیه، سرعت در راستای z خطی فرض شده و با در نظر گرفتن شرایط مرزی داریم:

$$U_z = -\frac{z}{\lambda h} U \tag{۱۸}$$

به دلیل تقارن محوری فرآیند، سرعت در راستای شعاع تابع زاویه  $\theta$  نمی باشد. از این شرط مرزی استفاده می شود که در  $R = R_{bi}$  مقدار  $U_r = 0$  می باشد. پس  $U_r$  از رابطه زیر به دست می آید:

$$U_r = \frac{U}{2\lambda h r} (r^2 - R_{bi}^2) \tag{۱۹}$$

• ناحیه تغییر شکل سوم:  $0 \leq z \leq \lambda h, R_m \leq r \leq R_{eqj}$  در این ناحیه تغییرات خطی و فقط تابعی از z فرض شده است. شرایط مرزی برای سرعت در راستای z به شکل زیر است:

$$U_z|_{z=\lambda h} = -U, \quad U_z|_{z=0} = -U \frac{R_{bi}^2 - R_m^2}{R_e^2 - R_m^2} \tag{۲۰}$$

که  $R_e$  شعاع دایره ای است که مساحت آن برابر مساحت مقطع چرخ دنده می باشد. در نتیجه:

$$U_z = U \frac{R_{bi}^2 - R_m^2}{R_e^2 - R_m^2} \left[ \frac{z}{\lambda h} - 1 \right] - \frac{Uz}{\lambda h} \tag{۲۱}$$

به دلیل تقارن محوری فرآیند، مؤلفه شعاعی سرعت که شرایط مرزی را نیز ارضاء کند از رابطه زیر به دست می آید:

$$U_r = \frac{U}{2\lambda h} \left( \frac{R_{bi}^2 - R_e^2}{R_e^2 - R_m^2} \right) \left( \frac{R_m^2}{r} - r \right) \tag{۲۲}$$

• ناحیه تغییر شکل چهارم:  $R_m \leq r \leq R_{eqj}$  این ناحیه صلب بوده و میدان سرعت آن به صورت ذیل می باشد:

$$\varphi_k = \tan^{-1} \frac{\sqrt{R_o^2 - R_b^2}}{R_b} - \frac{k}{10} \tan^{-1} \frac{\sqrt{R_o^2 - R_b^2}}{R_b} \tag{۱۵}$$

$k = 0, 2, \dots, 10$

• قطاع MON ناحیه ( $j=12$ ) می باشد که با صرف نظر کردن از پیلت پای دندانه، تا ابتدای منحنی اینولوت ادامه می یابد و در نتیجه مقدار زاویه آن  $\theta_r + \theta_f$  و شعاع معادل آن  $R_r = R_{eq12}$  می باشد. در شکل (۴) نمای سه بعدی اکستروژن ناحیه z ام نیم دندانه نشان داده شده که قطاعی از اکستروژن متقارن محوری است. شعاع ماده خروجی  $R_{eqj}$  و شعاع ماده ورودی  $R_{bi}$  می باشد.

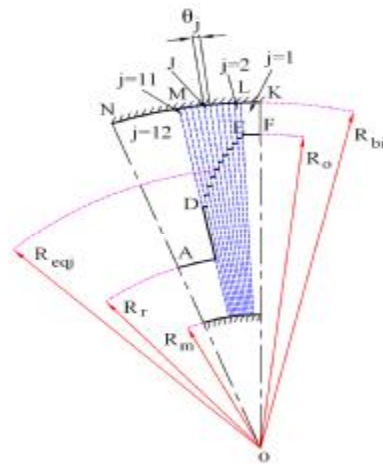
### میدان سرعت مجاز

در این تحلیل سیستم مختصات استوانه ای در  $(r, \theta, z)$  به کار گرفته شده است. میدان سرعت مجاز باید شرط ثابت بودن حجم ماده و شرایط مرزی را ارضاء نماید. شرط ثابت بودن حجم به صورت رابطه زیر است:

$$\dot{\epsilon}_{rr} + \dot{\epsilon}_{\theta\theta} + \dot{\epsilon}_{zz} = 0 \tag{۱۶}$$

همان گونه که در شکل (۴) نشان داده شده، فرآیند اکستروژن در قطاع z ام به چهار ناحیه تغییر شکل<sup>۱۷</sup> تقسیم شده است [۵]. به دلیل تقارن محوری فرآیند در تمام نواحی، سرعت محیطی برابر صفر می باشد ( $U_\theta = 0$ ). برای چهار ناحیه نشان شده، میدان سرعت مجاز به صورت زیر می باشد [۶]:

• ناحیه تغییر شکل اول:  $\lambda h \leq z \leq h, R_m \leq r \leq R_{bi}$  در این ناحیه سرعت ماده معادل سرعت پانچ و در راستای شعاع نیز سرعت ماده برابر صفر می باشد:



شکل ۳: نواحی تغییر شکل در اکستروژن یک نیم دندانه (دوازده ناحیه به صورت متقارن محوری).

$$\dot{W}_{S3-4} = \dot{W}_{S1-3} = \frac{\sigma_0 U \theta_j}{6\sqrt{3}\lambda h} \cdot \frac{R_{bi}^2 - R_e^2}{R_e^2 - R_m^2} \left\{ R_{eqj}^3 + 2R_m^3 - 3R_m^2 R_{eqj} \right\} \quad (۳۲)$$

### توان اصطکاکی

اتلاف توان اصطکاکی در ناحیه  $J$  ام از رابطه زیر به دست می آید:

$$\dot{W}_{f,j} = \dot{W}_{f1-container} + \dot{W}_{f2-container} + \dot{W}_{f2-die} + \dot{W}_{f3-mandrel} \quad (۳۳)$$

که

$$\dot{W}_{f1-container} = \frac{m_f \sigma_0 U R_{bi} \theta_j}{\sqrt{3}} h(1-\lambda) \quad (۳۴)$$

$$\dot{W}_{f2-container} = \frac{m_f \sigma_0 U R_{bi} \theta_j}{2\sqrt{3}} \lambda h \quad (۳۵)$$

$$\dot{W}_{f2-die} = \frac{m_f \sigma_0 U \theta_j}{6\sqrt{3}\lambda h} \cdot (2R_{bi}^3 - 3R_{bi}^2 R_{eqj} + R_{eqj}^3) \quad (۳۶)$$

$$\dot{W}_{f3-mandrel} = \frac{m_f \sigma_0 U \theta_j R_m \lambda h}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{R_{bi}^2 - R_e^2}{R_e^2 - R_m^2} \quad (۳۷)$$

### توان تغییر شکل کلی

مقدار توان برای یک نیم دندان از رابطه زیر قابل محاسبه می باشد:

$$\dot{W} = \sum_{j=1}^{12} \dot{W}_{i,j} + \sum_{j=1}^{12} \dot{W}_{s,j} + \sum_{j=1}^{12} \dot{W}_{f,j} \quad (۳۸)$$

و توان کل از ضرب توان تغییر شکل یک نیم دندان در دو برابر تعداد دندانها محاسبه می شود:

$$\dot{W}_{total} = 2n \dot{W} \quad (۳۹)$$

توان کل، تابعی از مشخصه  $\lambda$  (که مقداری بین صفر و یک دارد) می باشد، که بر اساس آن باید حداقل گردد. نیروی اکستروژن نیز از رابطه زیر به دست می آید:

$$F = \frac{\dot{W}_{total}}{U} \quad (۴۰)$$

### اجرای برنامه برای یک نمونه

با اجرای برنامه مدل سازی هندسی چرخ دنده ساده، فرم نشان داده شده در شکل (۵) ظاهر شده و طراح باید مشخصه های هندسی چرخ دنده را وارد نماید. برای ورودی های نشان داده شده در این شکل، با اجرای دستورات Spur Gear Modeling و Billet Modeling به

$$U_r = 0, \quad U_z = -U \frac{R_{bi}^2 - R_m^2}{R_e^2 - R_m^2} \quad (۲۳)$$

در مختصات استوانه ای، نرخ کرنش ها از روابط زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr} &= \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r \right), \quad \dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z} \\ \dot{\varepsilon}_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right), \quad \dot{\varepsilon}_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} \right) \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (۲۴)$$

در ادامه  $\dot{W}_i, \dot{W}_s, \dot{W}_f$  ناحیه  $J$  ام محاسبه شده اند.

### توان داخلی

توان داخلی تغییر شکل در ناحیه  $J$  ام از رابطه زیر به دست می آید:

$$\dot{W}_{i,j} = \dot{W}_{i1} + \dot{W}_{i2} + \dot{W}_{i3} + \dot{W}_{i4} \quad (۲۵)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{i2} &= \frac{\sigma_0 U \theta_j}{4\sqrt{3}} \left\{ -R_{bi}^2 \ln(\sqrt{R_{bi}^4 + 3R_{eqj}^4} - R_{bi}^2) \right. \\ &\quad + R_{bi}^2 \ln(\sqrt{R_{bi}^4 + 3R_{eqj}^4} + R_{bi}^2) + 4R_{bi}^2 \\ &\quad + R_{bi}^2 \ln(R_{bi}^2) - R_{bi}^2 \ln(3R_{bi}^2) \\ &\quad \left. - 2\sqrt{R_{bi}^4 + 3R_{eqj}^4} \right\} \end{aligned} \quad (۲۶)$$

$$\begin{aligned} \dot{W}_{i3} &= \frac{\sigma_0 U \theta_j}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{R_{bi}^2 - R_e^2}{R_e^2 - R_m^2} \left\{ 2\sqrt{R_m^4 + 3R_{eqj}^4} \right. \\ &\quad - 4R_m^2 - R_m^2 \ln(R_m^2) + R_m^2 \ln(3R_m^2) \\ &\quad - R_m^2 \ln(\sqrt{R_m^4 + 3R_{eqj}^4} + R_m^2) \\ &\quad \left. + R_m^2 \ln(\sqrt{R_m^4 + 3R_{eqj}^4} - R_m^2) \right\} \end{aligned} \quad (۲۷)$$

و

$$\dot{W}_{i1} = 0, \quad \dot{W}_{i4} = 0 \quad (۲۸)$$

### توان برشی

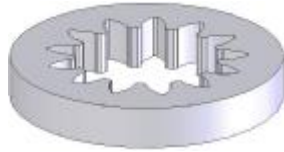
این توان که در سطوح نا پیوستگی سرعت و در مرز مشترک نواحی به وجود می آید، برای ناحیه  $J$  ام از طریق رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\dot{W}_{S,j} = \dot{W}_{S1-2} + \dot{W}_{S2-3} + \dot{W}_{S3-4} + \dot{W}_{S1-3} \quad (۲۹)$$

که

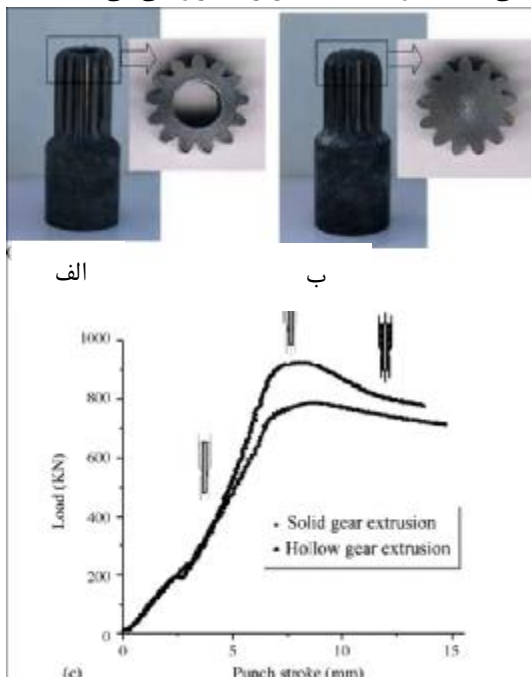
$$\dot{W}_{S1-2} = \frac{\sigma_0 U \theta_j}{6\sqrt{3}\lambda h} (2R_{bi}^3 + R_{eqj}^3 - 3R_{bi}^2 R_{eqj}) \quad (۳۰)$$

$$\dot{W}_{S2-3} = \frac{\sigma_0 U \lambda h \theta_j R_{eqj}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{R_{bi}^2 - R_m^2}{R_e^2 - R_m^2} \quad (۳۱)$$



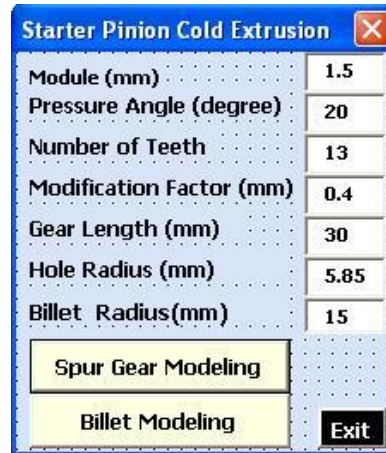
شکل ۸: مدل سه بعدی قالب (روزنه).

بیلته از جنس CK15 با معادله تنش سیلان  $\bar{\sigma} = 660.28\bar{\epsilon}^{0.122}$  و تنش تسلیم  $370 \text{ MPa}$  می باشد [۷]. ثابت اصطکاک برشی  $0.2$  در سطوح اصطکاکی لحاظ شده است. مقدار نیروی اکستروژن حاصل از تحلیل برای شکل دهی چرخ دنده با مشخصات نشان داده شده در شکل (۵)،  $991.7 \text{ KN}$  و برای چرخ دنده توپر ( $R_m = 0$ )،  $850.6 \text{ KN}$  محاسبه گردیده است. در شکل (۹) نمودار نیروی اکستروژن بر حسب پیشروی پانچ نشان داده شده که از آزمایش اکستروژن مستقیم چرخ دنده ساده با مشخصات شکل (۵) و بیلته از جنس CK15 و ثابت اصطکاک برشی  $0.2$  به دست آمده است. مقدار نیروی اکستروژن حاصل از آزمایش برای چرخ دنده با مشخصات نشان داده شده در شکل (۵)،  $900 \text{ KN}$  و برای چرخ دنده توپر  $800 \text{ KN}$  می باشد [۲]. مقایسه نتایج تحلیل با نتایج آزمایش نشان می دهد که مقدار نیروی اکستروژن پیش بینی شده حدوداً  $10\%$  بیشتر از مقدار واقعی می باشد.

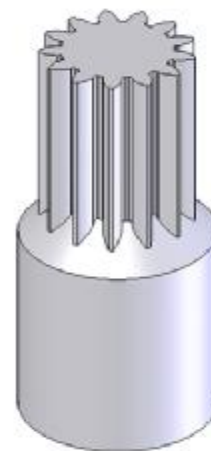


شکل ۹: نتایج آزمایش انجام شده برای الف: چرخ دنده ساده توخالی و ب: توپر با مشخصات شکل (۵) [۲].

ترتیب مدل سه بعدی چرخ دنده و بیلته ایجاد می شوند. مدل سه بعدی چرخ دنده در شکل (۶) و مدل سه بعدی بیلته در شکل (۷) نشان داده شده اند. در شکل (۸) نیز مدل سه بعدی قالب نشان داده شده است.



شکل ۵: فرم وارد کردن مشخصه های هندسی چرخ دنده.



شکل ۶: مدل سه بعدی چرخ دنده (اجرای دستور Spur Gear Modeling).



شکل ۷: مدل سه بعدی بیلته (اجرای دستور Billet Modeling).

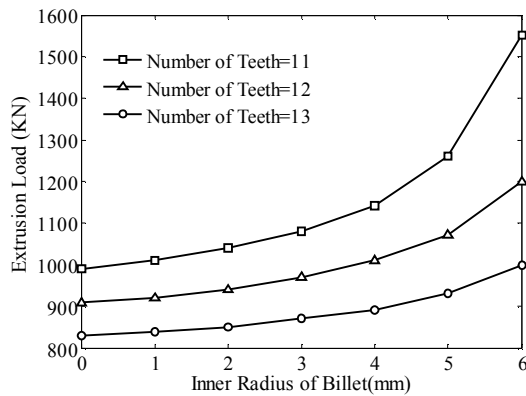
## تأثیر عوامل مختلف بر نیروی اکستروژن و بحث

در شکل (۱۰) تأثیر شعاع مندرل (شعاع داخلی بیلت) بر نیروی اکستروژن برای تعداد دندانه های مختلف نشان داده شده است، سایر عوامل مطابق شکل (۵) می باشد. همان طور که نشان داده شده با افزایش شعاع مندرل، نیروی اکستروژن افزایش می یابد، زیرا با ثابت ماندن شعاع خارجی بیلت، توان تغییر شکل داخلی در ناحیه سوم، توان برشی بین نواحی دوم و سوم و توان اصطکاکی میان مندرل و ناحیه سوم افزایش می یابد که تأثیر این افزایش ها بسیار بیشتر از کاهش توان برشی میان نواحی اول و چهارم با ناحیه سوم می باشد که نهایتاً منجر به افزایش نیروی اکستروژن می گردد. با زیاد شدن تعداد دندانه ها،  $R_{eq}$  ها به شعاع خارجی بیلت نزدیک شده و از میزان توان های داخلی و برشی و اصطکاکی کاسته خواهد شد، در نتیجه نیروی اکستروژن کاهش می یابد.

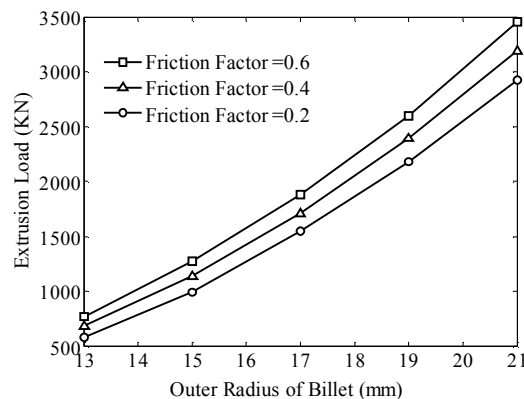
اثر افزایش شعاع خارجی بیلت بر نیروی شکل دهی در شکل (۱۱) بر اساس مشخصات شکل (۵) رسم شده است. همان گونه که نشان داده شده با افزایش شعاع خارجی بیلت، نیروی اکستروژن به شدت افزایش می یابد که به علت وابستگی شدید روابط به دست آمده در تحلیل کرانه فوقانی برای محاسبه توان ها می باشد. تغییرات با زیاد شدن ضریب اصطکاک نیز به دلیل افزایش توان اصطکاکی اتلافی در سطوح تماس قطعه و ابزار، نیروی اکستروژن افزایش می یابد.

شکل (۱۲) تأثیر ضریب اصلاح دندانه بر نیروی اکستروژن را نشان می دهد. این نمودار که بر اساس مشخصات شکل (۵) رسم شده، کاهش نیروی اکستروژن با افزایش ضریب اصلاح دندانه را نشان می دهد که علت آن افزایش شعاع دایره های سر و ریشه با افزایش ضریب اصلاح دندانه می باشد.

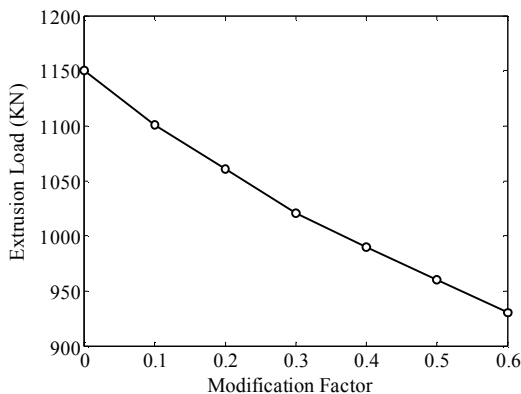
به این ترتیب با افزایش ضریب اصلاح دندانه،  $R_{eq}$  در هر ناحیه به شعاع خارجی بیلت نزدیک شده و از میزان توان داخلی، توان اصطکاکی و توان برشی میان نواحی دوم و سوم و توان برشی میان نواحی اول و چهارم با ناحیه سوم کاسته می شود که منجر به کاهش نیروی اکستروژن می گردد.



شکل ۱۰: تأثیر شعاع مندرل بر نیروی اکستروژن در تعداد دندانه های مختلف ( $m_f = 0.2$ ) و چرخ دنده با مشخصات مطابق شکل (۵).



شکل ۱۱: تأثیر شعاع خارجی بیلت بر نیروی اکستروژن در ثابتهای اصطکاک متفاوت (برای چرخ دنده با مشخصات شکل (۵)).



شکل ۱۲: تأثیر ضریب اصلاح دندانه بر نیروی اکستروژن ( $m_f = 0.2$ ) و چرخ دنده با مشخصات شکل (۵).

### نتیجه گیری

- مدل سازی هندسی سه بعدی و پارامتریک چرخ دنده ساده سبب ایجاد سریع و خودکار اطلاعات دقیق لازم برای ساخت اجزاء قالب با کامپیوتر می شود.

$R_r$  : شعاع دایره ریشه  
 $U$  : سرعت پانچ  
 $U_r$  : مؤلفه شعاعی سرعت  
 $U_\theta$  : مؤلفه محیطی سرعت  
 $U_z$  : مؤلفه محوری سرعت  
 $V$  : حجم  
 $\dot{W}_i, \dot{W}_s, \dot{W}_f$  : توان تغییر شکل داخلی، توان برشی و توان اصطکاکی  
 $\dot{W}_{S1,2}$  : توان برشی در سطح مشترک نواحی اول و دوم  
 $\dot{W}_{S1,3}$  : توان برشی در سطح مشترک نواحی اول و سوم  
 $\dot{W}_{S2,3}$  : توان برشی در سطح مشترک نواحی دوم و سوم  
 $\dot{W}_{S3,4}$  : توان برشی در سطح مشترک نواحی سوم و چهارم  
 $\dot{W}_{f1-container}$  : توان اصطکاکی در سطح تماس ناحیه اول و دیواره قالب  
 $\dot{W}_{f2-container}$  : توان اصطکاکی در سطح تماس ناحیه دوم و دیواره قالب  
 $\dot{W}_{f3-mandrel}$  : توان اصطکاکی در سطح تماس ناحیه سوم و مندرل  
 $\dot{W}_{f2-die}$  : توان اصطکاکی در سطح تماس ناحیه دوم و قالب  
 $Z$  : مختصه محوری  
 $\dot{\epsilon}_{rr}, \dot{\epsilon}_{\theta\theta}, \dot{\epsilon}_{zz}$  : نرخ کرنش‌های قائم  
 $\dot{\epsilon}_{r\theta}, \dot{\epsilon}_{rz}, \dot{\epsilon}_{\theta z}$  : نرخ کرنش‌های برشی  
 $\theta$  : مختصه زاویه ای  
 $\varphi_p$  : زاویه فشار روی دایره گام  
 $\lambda$  : مشخصه حداقل سازی توان  
 $\sigma_0$  : تنش سیلان ماده

• با تحلیل کرانه فوقانی انجام شده و برنامه برنامه کامپیوتری نوشته شده در این مقاله، زمان محاسبه نیروی اکستروژن بسیار سریع است.  
 • هم خوانی نیروی اکستروژن به دست آمده از آزمایش تأییدی بر صحت تحلیل انجام شده است.  
 • نیروی تخمینی در تحلیل کرانه فوقانی از نیروی واقعی (آزمایش) بیشتر است.  
 • با افزایش شعاع داخلی بیلت (شعاع مندرل)، نیروی اکستروژن افزایش می یابد. بنا براین برای کاهش نیروی شکل دهی می باید از بیلت توپر (بدون سوراخ داخلی) استفاده شود. در این حالت سوراخ مرکزی پس از فرآیند اکستروژن، روی چرخ دنده ایجاد می شود.  
 • برای کاهش نیروی اکستروژن باید از روان کارهای مناسب استفاده نمود.  
 • افزایش شعاع خارجی بیلت به شدت نیروی شکل دهی را افزایش داده و بنابراین باید از بیلت با حد اقل شعاع خارجی که همان شعاع دایره سر دندانه است، استفاده شود.

### فهرست علائم

$h$  : طول قسمت استوانه ای  
 $m$  : مدول  
 $m_f$  : ثابت اصطکاک برشی  
 $n$  : تعداد دندانه ها  
 $r$  : مختصه شعاعی  
 $R_b$  : شعاع دایره مبنا  
 $R_{bi}$  : شعاع بیلت  
 $R_e$  : شعاع معادل  
 $R_{eq}$  : شعاع ماده خروجی در ناحیه زام  
 $R_m$  : شعاع داخلی بیلت، شعاع مندرل  
 $R_o$  : شعاع سر دندانه  
 $R_p$  : شعاع دایره گام

### مراجع

- 1 - Song, J. H. and Im, Y. T. (2004). "Development of a Computer-Aided-Design System of Cold Forward Extrusion of a Spur Gear." *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 153-154, PP. 821-828.
- 2 - Song, J. H. and Im, Y. T. (2007). "The Applicability of Process Design System for Forward Extrusion of Spur Gears." *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 184, PP. 411-419.



- 3 - Can, Y., Altinbalik, M. T. and Akata, H. E. (2005). "A study of lateral extrusion of gear like elements and spline." *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 166, PP. 128–34.
- 4 - Maitra, G. M. (2000). *Handbook of Gear Design*. 2nd ed., Tata McGraw-Hill, New Delhi.
- 5 - Prager W. and Hodge P. G. (1951). *Theory of Perfectly Plastic Solids*. John Wiley and Sons Inc., New York.
- 6 - Avitzur, B. (1968). *Metal Forming: Processes and Analysis*. McGraw-Hill, New York.
- 7 - Lange, K. (1994). *Handbook of Metal Forming*. 1st ed., Society of Manufacturing Engineers.

### واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 - Forward Extrusion
- 2 - Lateral Extrusion
- 3 - Upper Bound Analysis
- 4 - Addendum Modification Factor
- 5 - Involute
- 6 - Spline Curve
- 7 - Fillet
- 8 - Circular Tooth Thickness
- 9 - Polar Array
- 10 - Extrude
- 11 - Mandrel
- 12 - Internal Power of Deformation
- 13 - Shear Power
- 14 - Frictional Power
- 15 - Shear Friction Factor
- 16 - Axisymmetric
- 17 - Region