محاسبه جریان تراکمپذیر بدون لزجت با استفاده از تکنیک فرمولبندی متغیرهای بیبعد شده

محمد حسن جوارشکیان — استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکدهٔ فنی، دانشگاه تبریز
عطا اصفهانی — کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشکدهٔ فنی، دانشگاه تبریز

چکیده

در این مقاله تکنیکهای درونیابی جدیدی بر مبنای نمودار متغیر بیبعد شده (Normal Variable Diagram) برای محاسبه جمله جابجایی معادلات انتقال ارائه شده است. این تکنیکها در یک روال عددی براساس روش حجم محدود برای شبکههای یکنواخت با ذخیره متغیرها در مرکز حجمها و موقعیت هم محل که فشار بعنوان متغیر اصلی میباشد توسعه و یک روش حل ضمنی برای حل معادلات گسسته شده استفاده شده است. در روشهای درونیابی بالا شیب تابع نسبی روش درونیابی بهآرامی تغییر میکند این امر باعث بهبود همگرایی و دقت محاسبات میگردد. نتایج مدلسازی جریان تراکمپذیر با استفاده از این روشها با محاسبه جریان یک بعدی در لوله حاوی موج ضربهای و جریان دوبعدی روی یک برآمدگی داخل مجرا ارئه شده و با نتایج تحلیلی و محاسباتی روشهای دیگر مقایسه گردیده است.

کلمات کلیدی: محدود کنندههای جریان، نمودار متغیر بیبعد شده، الگوریتم فشار مبنا، المانهای حجمی محدود

Inviscid Compressible Flow Calculation With Normal Variable Formulation

M. H. Djavareshkian — Assistant Prof. Of Mech. Eng. Dept. of Tabriz University
A. Isfhany — M. Sc., of Mech. Eng. Dept. of Tabriz University

Abstract

In this paper, three new schemes based on normalized variable diagram (NVD) to calculate convection term of conservative equations are developed. The solution technique is of the finite volume type utilizing a co-located arrangement for storage of variables and an uniform mesh. The working variables are velocity and pressure which makes the schemes applicable to both compressible and in compressible flows. The interpolation of these schemes has been done with smooth functions and this point improves the convergence and accuracy of the solution. These methods are applied to the computation of steady transonic over bump in channel geometry as well as to the transient shock-tube problem. The results are compared with other computations published in the literature.

Key words: Flux Limiters, NVD, Pressure - Based, Finite volume

۱- مقدمه

مدل کردن جمله جابجایی بعلت پیچیدگی آن هنوز مورد علاقه تعداد زیادی از دانشمندان است. دقت بالای محاسبه جمله جابجایی از یک سو و پایداری و ارضای شرط محدود کنندگی از سوی دیگر پارامترهای مهم در این محاسبه می‌باشد. در چند دهه گذشته یک سری روشهای مرتبه بالا[1] مانند روش QUICK لئونارد [1]، روش مرتبه سه اگراول [2] و روش بالا دست مرتبه دوم فرام [3] مطرح شده‌اند، این روشهای مرتبه بالا نتایج دقیقتری از روش بالادست مرتبه اول که دارای خاصیت پخشی[2] بالایی می‌باشد، دارند و مشخصاً پایدارتر از روش تفاضل مرکزی مرتبه دوم هستند. می‌دانیم که این روشها از عدم محدودیت رنج می‌برند که این امر باعث خواهد شد در نواحی که گرادیانهای قوی موجود می‌باشد، نتایج عددی همراه نوسانات پیشبینی شود که منجر به نتایج غیر فیزیکی می‌شود و در مواردی از همگرایی محاسبات جلوگیری می‌کند. برای جلوگیری از این نوسانات یک سری تکنیکهای جدید توسعه داده شده‌اند. این روشها را می‌توان در دو گروه طبقهبندی کرد. یک تکنیک استراتژی آمیختن[3] است، در این روش با یک شار ضدپخشی[4] اضافه شده به روش بالا دست مرتبه اول، کاهش ویسکوزیته مصنوعی روش بالا دست را همراه خواهد داشت. تکنیک دیگر، انتقال شار تصحیح شده[5] (FCT) زالسک [4] است که در این روش نوعی پخش یکنواخت بهروش مرتبه بالاتر بمنظور میرا کردن نوسانات اضافه می‌شود. روش چیمن [5]، شار آمیخته پریک [6]، زو و لشزنه [7] مثالهایی از تکنیک اخیر هستند. تعیین ضریب آمیختن[6] بر اساس رفتار موضعی حل معمولاً یکی از مشکلات چنین روشهایی است همچنین بعلت طبیعت چند مرحلهای این روش از نظر محاسباتی خیلی پرهزینه می‌باشد و از همه مهمتر اینکه این روشها اغلب در فراهم نمودن امکانات آمیختن بهینه[7] بین دقت و محدودیت، ناتوان هستند. بنابراین اگرچه روشهای آمیختن شار از روش مرتبه اول بالا دست دقیقتر هستند ولی هنوز مقداری پخش عددی غیرضروری خصوصاً در شبیهسازی گرادیانهای شدید تولید می‌کنند. باید توجه کرد که روش پیوند اسپالدینگ [8] و روش توانی پاتنکار [9] را می‌توان در سری روشهای آمیختن شار طبقهبندی کرد بطوریکه معیار آمیختن بجای آنکه براساس رفتار حل موضعی باشد براساس عدد پلکه (Peclet) محلی است. سادگی این روشها بیشتر بخاطر جبران کردن بوسیله میرا کننده اضافه شده به حل است. راه بهتر حذف نوسانات غیرفیزیکی، استفاده از یک محدود کنندهٔ شار است. در تکنیک مذکور شار عددی در سطوح سلول با استفاده از یک محدوده کننده شار اصلاح شده که این امر معیار یکنواختی را تحمیل می‌کند. از جمله روشهای متکی برایده اخیر روش کاهش تغییرات کل (TVD) [10] می‌باشد. از نمونههای دیگر که برای محدوده کنندههای شار مرتبه بالا ارائه گردیده است فرمولاسیون متغیر بی‌بعد شده توسط لونارد [11] می‌باشد. بیان این ایده در سال ۱۹۸۱ توجه تعداد زیادی از دانشمندان مانند زو و رودی [12]، گسکل و لو [13]، زو [14] ولین و چینگ [15] را بخود جلب کرد. گسکل ولو [13]، الگوریتمی تحت عنوان اسمارت (SMART) با ترکیب روشهای درونیابی مرتبه اول و بالاتر برمبنای ایده مذکور ارائه نمودند. روشی تحت عنوان اسفکد (SFCD) که تلفیقی از روشهای درونیابی با دقت مرتبه مختلف برمبنای ایده مذکور توسط زایمن [16] توسعه داده شد. زو و رودی [12] با ترکیب روش درونیابی تفاضل مرکزی مرتبه اول و مرتبه دوم غیرمرکزی و استفاده از ایده نمودار متغییر بی‌بعد شده روشی تحت عنوان سوکاپ (SOUCUP) برای دورنیابی ارائه نمود. درویش [17] از تلفیق درونیابی مرتبه دوم و سوم برای جابجایی جریان برمبنای ایده فوق روش استوک (STOIC) را توسعه داد. تمامی این روشها که براساس تکنیک نمودار متغیر بی‌بعد شده (NVD) به دست آمده‌اند چند مرحلهای هستند و مقدار و تغییرات شیب تابع نسبی درونیابی برای انتقال از روشی به روش دیگر زیاد می‌باشد. در واقع تغییرات مقدار متغیر بی‌بعد شده سطح سلول که به واسطه بی‌بعدسازی وابسته به مقدار متغیر بی‌بعد شده گره مرکزی است، شدید می‌باشد و این نکته باعث کاهش همگرایی و بعضاً افت در دقت محاسبات خواهد شد. بنابراین سعی شده است که با رعایت اصل تغییرات ملایم متغیرها توابعی ارائه شود که علاوه بر دقت از همگرایی مناسبی نیز برخوردار باشند. جوارشکیان [۱۸] روشی تحت عنوان اسبیک (SBIC) ارائه نمود که این روش ترکیبی از درونیابی مرکزی و آمیختن درونیابی مرتبه دوم و اول می‌باشد اگرچه این روش

1-High order
2-Diffusion
3-Blending
4-Antidiffusive
5-Flux-Corrected Transport
6-Blending Factor
7-Optimum Blend

دارای همگرایی و دقت مطلوب می‌باشد اما ما را بهاین جهت راهنمائی نمود که وجود توابع پیوسته برای درونیابی می‌تواند همگرایی را بهبود ببخشد. در این مقاله سه روش مرتبه بالا جدید با تابع نسبی منحنی تک مرحلهای براساس روش فرمولاسیون متغیر بی‌بعد شده برای تقریب جملات جابجایی جریان تراکمپذیر معادلات انتقال در قالب روش محاسباتی حجم محدود توسعه داده شده است. نتایج روشهای توسعه داده شده با دو روش STOIC SMART از نظر دقت و همگرایی در حل جریان سیال قابل تراکم مقایسه گردیدند.

۲- تبدیل معادلات دیفرانسیلی به فرم گسسته شده

معادلات اساس حاکم بر جریان سیال تراکمپذیر عبارتند از بقا جرم، ممنتم و انرژی. این معادلات در شکل تانسوری در مختصات کارتزین به ترتیب عبارتند از:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j)=0 \qquad (۱)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u_i-\tau_{ij})=-\frac{\partial P}{\partial x_j} \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j E-q_j)=\frac{\partial P}{\partial t}+u_i\frac{\partial P}{\partial x_i}+\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad (۳)$$

بطوریکه چگالی ρ، سرعت u، فشار P، تانسور تنش τ_{ij}، انرژی E مثل یک متغیر وابسته اساسی و $\vec{q}$ بردار جریان انرژی می‌باشند.

تانسور تنش برای سیال نیوتنی با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_{ij}=\mu_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right) \qquad (۴)$$

μ_m لزجت مولکولی سیال است و δ_{ij} دلتای کرونیکر. اگر $i=j$ باشد برابر واحد و اگر $i\neq j$ باشد برابر صفر است.
چگالی در معادلات از طریق یک معادله حالت که برای گاز ایدهآل با رابطه زیر نوشته می‌شود ارزیابی می‌گردد:

$$\rho=\frac{P}{RT} \qquad (۵)$$

R ثابت گاز است و بردار جریان انرژی معمولاً با قانون فوریه داده میشود:

$$\vec{q}=\Gamma_E\, gradE \qquad (۶)$$

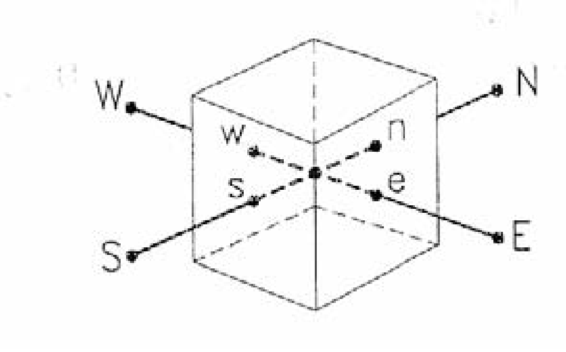
شکل عمومی معادله انتقال برای مقدار اسکالر را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j\phi-J_j)=S_\phi \qquad (۷)$$

ϕ متغیر وابسته در معادله است. و J_j بردار شار پخشی مولکولی خاصیت ϕ است و با رابطهٔ زیر تعریف می شود:

$$J_j=\Gamma_\phi\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \qquad (۸)$$

Γ_ϕ ضریب پخش S_ϕ هر جمله چشمه اضافه شده را نشان می‌دهند.
انتگرالگیری از معادله (۷) روی المان حجمی شکل (۱) و استفاده از تئوری دیورژانس گوس به برقراری تعادل بین جملهای دبی جابجایی و انتشار بعلاوه جمله چشمه منجر می‌شود.



شکل ۱- المان حجمی و نظم گرهها

جریان پخشی توسط اختلاف مرکزی تقریب شده و برای سطح سل e از حجم کنترل شکل (۱) جریان ذکر شده بشکل زیر نوشته می شود:

$$I_e^D=D_e(\phi_\rho-\phi_E)-S_e^\phi \qquad (۹)$$

برای محاسبه جمله جابجایی دقت خاصی لازم است و همانطورکه اشاره شد موضوع خیلی از تحقیقات بوده است. فرم کلی جمله جابجایی را بشکل زیر می‌توان نشان داد:

$$I_f^c = (\rho.V.A)_f \phi_f = F_f \phi_f \,(f = e,w,n,s) \quad (۱۰)$$

مقدار متغیر وابسته ϕ_f در سطوح سلول، مجهول است و باید توسط درونیابی از نقاط همسایه تقریب گردد. موضوع اصلی این مقاله محاسبه همین جمله می‌باشد که در ادامه بحث اشاره خواهد شد. فرم کلی معادلات گسسته شده را می‌توان بهشکل زیر تقریب زد:

$$a_p\phi_p = \sum_{m=E,E,N,S} a_m\phi_m + S'_\phi \quad (۱۱)$$

ضرایب a_m شامل ضریب پخش (D) و شار جرمی می‌باشند و ϕ_m مؤلفههای سرعت یا انرژی در مراکز سلولها می‌باشد که بستگی بهنحوه تعیین ϕ_f دارد. مقدار ضرایب $a_E, a_P,...$ بستگی بهروش استفاده شده در محاسبه جمله جابجایی دارد و S'_ϕ جمله چشمه معادله گسسته شده است. چون مشتقات جزئی در معادلات سیال می‌تواند با تعداد زیادی از گرههای مجاور تعبیر شود بویژه زمانیکه از روشهای مرتبه بالاتر استفاده می‌کنیم حل معادله (۱۱) بهلحاظ محاسباتی می‌تواند خیلی پرهزینه باشد. بنابراین استفاده از یک روش فشردهسازی خیلی مهم خواهد بود. در کار حاضر فرآیند تصحیح عقب افتاده[۱] روبین و خوسلو [19] بکار برده شده است. در این فرآیند معادله (۱۱) را دوباره بشکل زیر می نویسیم:

$$a_p\phi_p = \sum_{m=E,W,N,S} a_m\phi_m + S'_\phi + [C_e(\phi_e^{\;U} - \phi_e) - C_w(\phi_w^{\;U} - \phi_w) + C_n(\phi_n^{\;U} - \phi_n) - C_s(\phi_s^{\;U} - \phi_s 0] \quad (۱۲)$$

$\phi_f^U\,(f = e,n,w,s)$ مقدار متغیر در سطح سلول است، $a_m (m = E,W,N,S)$ ضریب معادله انتقال گسسته شده می باشد. هر دو با استفاده از روش بالا دست با دقت مرتبه اول محاسبه می شوند. ϕ_f مقدار متغیر در سطح سلول است که با استفاده از یک روش درون‌یابی مرتبه بالا انتخاب شده محاسبه گردیده و جملات داخل کروشه جملات چشمه اضافی بواسطه تصحیح عقب افتاده را نمایش می‌دهند جایگزینی مقدار شار سلول بدست آمده از تابع نسبی مرتبه اول و روشهای مرتبه بالا بـا استفاده از تصحیح عقب افتاده بهیک معادله مشابـه با معادله (۱۲) منتج می‌شود، ولی ماتریس ضریب پنج قطری است (برای دو بعدی) و همیشه غالب قطری است. با فرضهای انجام شده، معادله گسسته شده (۱۲) تبدیل می شود به:

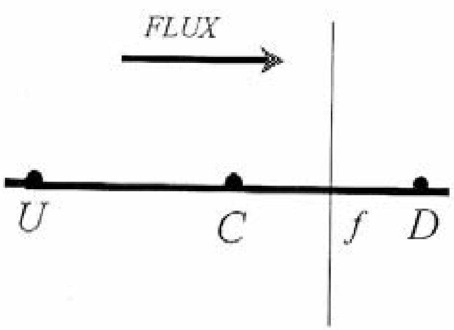
$$a_p\phi_p = \sum_{m=E,W,N,S} a_m\phi_m + S'\phi + S_{dc} \quad (۱۳)$$

S_{dc} جمله چشمه بواسطه تصحیح عقب افتاده است. آخرین مقادیر محاسبه شده در گرهها در جمله چشمه S_{dc} استفاده می شوند.

۳- فرمولاسیون بی بعد شده

روش متغیر بی‌بعد شده اولین بار توسط لئونارد ارائه شد [11] بر طبق این روش برای محاسبه یک متغیر در سطح f یک حجم کنترل مطابق شکل (۲) در نظر گرفته و با فرض معلوم بودن مقادیر گرههای بالادست (U)، پایین دست (D) و مرکزی (C) (ϕ_C,ϕ_D,ϕ_U) متغیر بی‌بعد شده با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{\phi} = \frac{\phi - \phi_U}{\phi_D - \phi_U} \quad (۱۴)$$



شکل ۲- نمایش گرهها در روش نمودار متغیر بی‌بعد شده

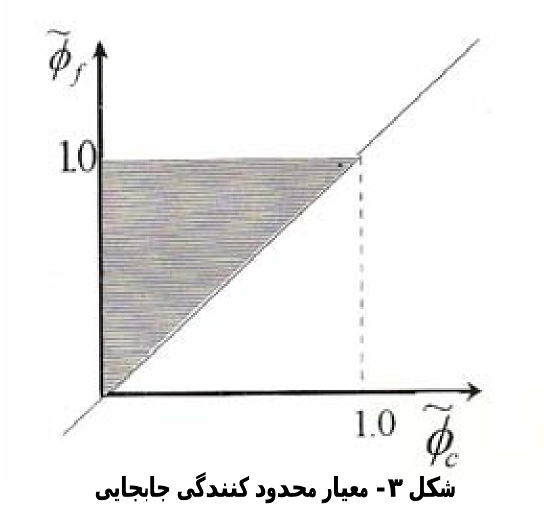
1-Deffered Correction

با توجه بهاین بی‌بعد سازی $\bar{\phi}_U = 0,\ \ \bar{\phi}_D = 1$ است. استفاده از متغیر بی‌بعد شده تعریف تابع نسبی روشهای مرتبه بالا را ساده می‌کند و در تعریف شرایطی که توابع نسبی باید به منظور داشتن خواص پایداری و محدودیت ارضا شوند کمک خواهد کرد.

براساس تحلیل متغیر بی‌بعد شده گسکل و لو [12] معیار محدود کنندگی بهشکل زیر فرموله می‌شود. این معیار بیان می‌دارد که برای اینکه یک روش دارای خاصیت محدود کننده باشد، تابع نسبی آن باید پیوسته باشد، از زیر به $\bar{\phi}_f = \bar{\phi}_c$ محدود شود و از بالا به مقدار واحد محدود گردد و باید از نقاط (۰و۰) و (۱و۱) در محدوده یکنواخت $(o < \bar{\phi}_c < 1)$ عبور کند و برای $\bar{\phi}_c \le 0 \ \&\ 1 < \bar{\phi}_c$ تابع نسبی $\bar{\phi}_f = f(\bar{\phi}_c)$ باید برابر $\bar{\phi}_c$ باشد. شرایط بالا در شکل (۳) توضیح داده شده و میتواند به شکل زیر تعریف شوند:

$$
\begin{cases}
f(\bar{\phi}_c) = 0 & for \quad \bar{\phi}_c = 0 \\
f(\bar{\phi}_c) = 1 & for \quad \bar{\phi}_c = 1 \\
f(\bar{\phi}_c) < 1 and\, f(\bar{\phi}_c) > \bar{\phi}_c & for \quad 0 < \bar{\phi}_c < 1 \\
f(\bar{\phi}_c) = \bar{\phi}_c & for \quad \bar{\phi}_c < 0 and \bar{\phi}_c > 1
\end{cases}
$$

(۱۵)



شکل ۳- معیار محدود کنندگی جابجایی

همانطور که ملاحظه می‌شود تنها تابع خطی که شرط محدود کنندگی را ارضا می‌نماید روش درونیابی با دقت مرتبه اول بالادست می‌باشد. بنابراین برای داشتن یک روش محدود کننده مرتبه بالا استفاده از یک تابع نسبی غیرخطی اجتنابناپذیر است.

۴- تکنیکهای NVF جدید برای محاسبه جمله جابجایی

در کار حاضر فرض می‌کنیم که متغیر بی‌بعد شده در سطح سلول $\bar{\phi}_f$ بتواند با یک تابع منحنی شکل بهمتغیر بی‌بعد شده در مرکز $\bar{\phi}_c$ مربوط شود. در روشهای جدید از یک تابع نسبی چند جملهای درجه بالا در محدودهٔ $0 < \bar{\phi}_c < 1$ استفاده می‌شود (جدول (۱)). روشهای جدید تحت عنوان ATASC1، ATASC2، ATASC3 شرط محدودکنندگی را بطور کامل برآورده می کنند (شکل (۴)). برای محاسبه جمله جابجایی لازم است ϕ_f در معادله (۱۰) تعیین شود. برای محاسبه ϕ_f برمبنای مفهوم جدید متغیر بی بعد شده پس از مشخص شدن جهت جریان و برحسب مقادیر قدم قبلی یا اولیه مقدار ϕ_f تابعی از ϕ_c مطابق شکل (۴) انتخاب می‌گردد.

همانطور که در شکل (۴) دیده می‌شود در روشهای جدید نسبت به روشهای قبلیSTOIC و SMART تغییرات گرادیان ϕ_f نسبت به ϕ_c آرامتر و بدون تغییر ناگهانی انجام می‌شود و همین امر باعث می‌شود تا همگرایی راحتتر انجام شود. این امر با مقایسه نتایج همگرایی روشهای گوناگون در حل مسئله پایا که بعداً بحث خواهد شد بوضوح مشاهده می‌شود.

توابع نسبی برای باقی روشهای مرتبه بالای استفاده شده در جدول (۱) داده شدهاند نمودار متغیر بی‌بعد شـده آنهـا در شکل (۴) داده شده است. دیده می‌شود که توابع نسبی دو روش قبلی (اسمارت و استوک) در جدول (۱) غیر خطی بوده و تغییرات گرادیان در آنها نسبتاً شدید است همین امر این روشها را در همگرایی با مشکل مواجه می‌کند. از آنجاییکه روشهای مرتبه بالا از دو گره بالا دست در هر سطح سلول استفاده می‌کنند تدبیر خاصی در نزدیکی مرزهای حجم کنترل لازم است. در مقاله حاضر هرجا که گره بالادست خارج ناحیه محاسباتی قرار بگیرد روش برونیابی مرتبه اول استفاده می‌شود.

۵- روش حل

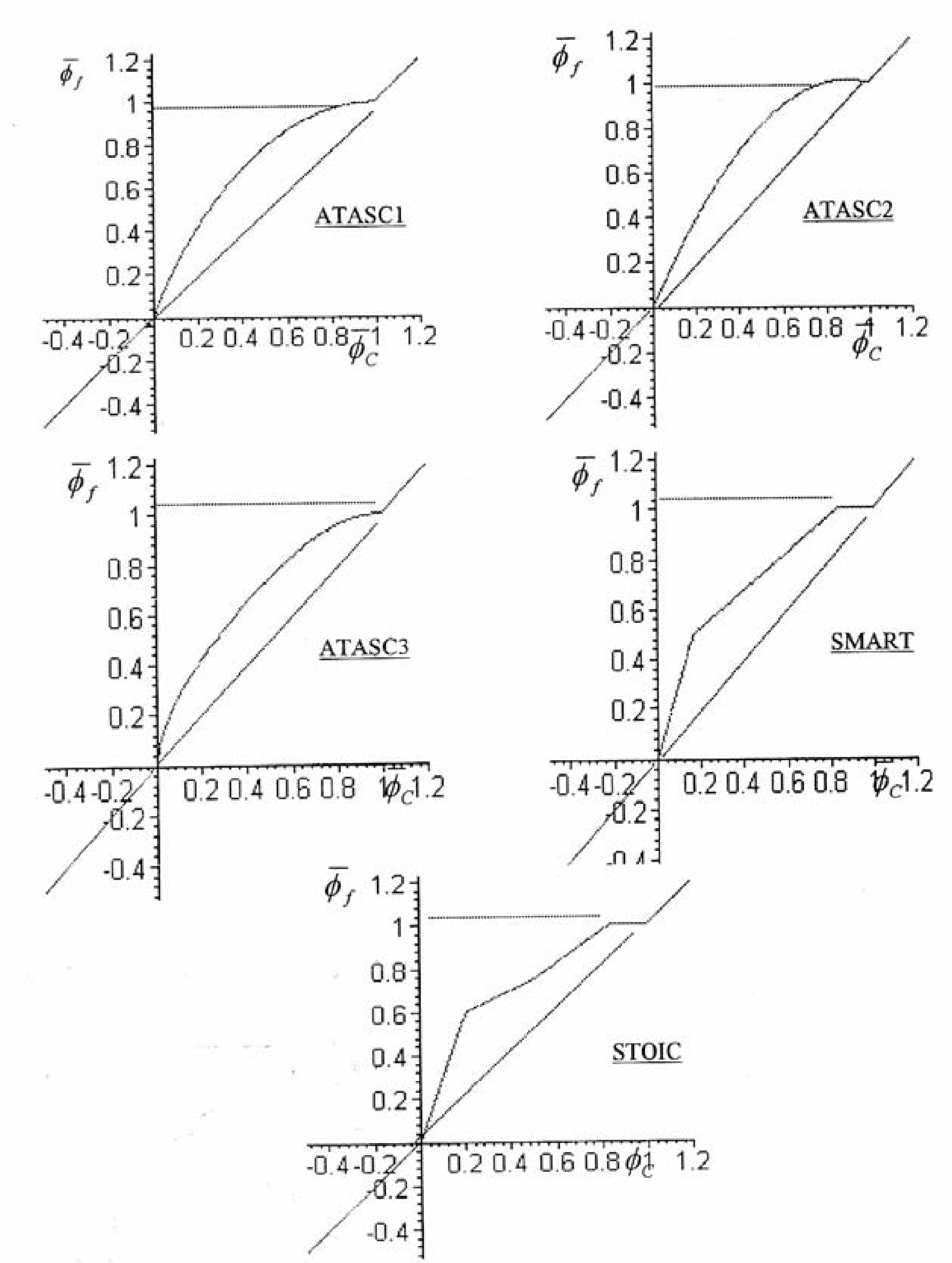
در بیشتر الگوریتمهای فشار مبنای جدید از روش تکراری برای حل متوالی معادلات گسسته شده استفاده می‌شود نقطه

مشترک آنها این است که از تلفیق معادلات پیوستگی و ممنتوم، معادلهای تحت عنوان معادله فشار یا تصحیح فشار بدست میآید.

جدول ۱ توابع نسبی روشهای جدید و قبلی NVF[1]

تابع نسبی بی بعد شده	روش
$\bar{\phi}_f = \begin{cases} -\bar{\phi}_C^{1.8} + \bar{\phi}_C^{0.8} + \bar{\phi}_C & 0 < \bar{\phi}_C < 1 \\ \bar{\phi}_C & elsewhere(upwind) \end{cases}$	ATASC1
$\bar{\phi}_f = \begin{cases} -\bar{\phi}_C^{2.2} + \bar{\phi}_C^{0.93} + \bar{\phi}_C & 0 < \bar{\phi}_C < 1 \\ \bar{\phi}_C & elsewhere(upwind) \end{cases}$	ATASC2
$\bar{\phi}_f = \begin{cases} -\bar{\phi}_C^{3} + \bar{\phi}_C^{2.4} + \bar{\phi}_C^{0.55} & 0 < \bar{\phi}_C < 1 \\ \bar{\phi}_C & elsewhere(upwind) \end{cases}$	ATASC3
$\bar{\phi}_f = \begin{cases} 3\bar{\phi}_C & for \quad 0 < \bar{\phi}_C \le \frac{1}{6} \\ (3/8 + 3/4\,\bar{\phi}_C) & for \quad \frac{1}{6} < \bar{\phi}_C \le \frac{5}{6} \\ 1 & for \quad \frac{5}{6} < \bar{\phi}_C < 1 \\ \bar{\phi}_C & elsewhere(uqwind) \end{cases}$	SMART
$\bar{\phi}_f = \begin{cases} 3\bar{\phi}_C & for \quad 0 < \bar{\phi}_C \le 0.2 \\ 1/2 & for \quad 0.2 < \bar{\phi}_C \le 0.5 \\ (3/8 + 3/4\,\bar{\phi}_C) & for \quad 0.5 < \bar{\phi}_C \le \frac{5}{6} \\ 1 & for \quad \frac{5}{6}\bar{\phi}_C < 1 \\ \bar{\phi}_C & elsewhwer(upwind) \end{cases}$	STOIC

1- Normal Variable Formulation



شکل ۴- نمودار متغیر بی بعد شده (NVD) روشهای جدید و قدیم

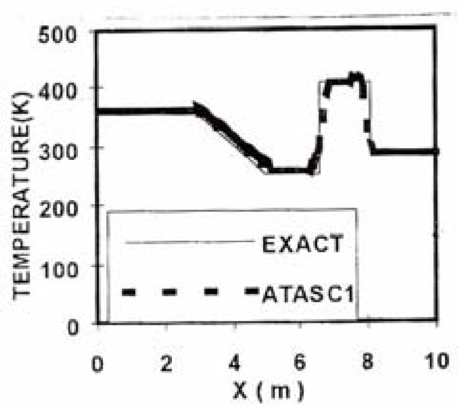
در کار حاضر از روش پیزو (PISO) برای حل معادله مذکور استفاده شده است. روش پیزو برخلاف اکثر روشهای دیگر یک روش غیر تکراری برای حل معادلات انتقال گسسته شده بطور ضمنی است.

۶- نتایج

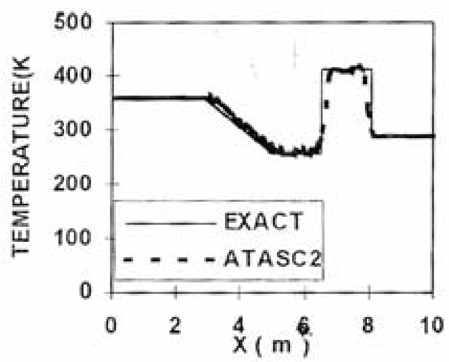
به منظور آزمایش روشهای درونیابی جدید در جریان ناپایا و بررسی نتایج آنها در نواحی ناپیوستگی جریان و موج ضربهای یک لوله حاوی موج ضربهای (shock-tabe) بطول ۱۰ متر که محل دیافراگم در وسط این لوله قرار دارد انتخاب میشود بطوریکه شرایط آزمایش عبارتند از طرف فشار بالا، فشار ۱۰۰ کیلوپاسکال، چگالی برابر با یک کیلوگرم بر مترمکعب و درجه حرارت ۳۶۰/۱۸۸ کلوین و در طرف فشار پایین فشار ۱۰ کیلوپاسکال، چگالی برابر با ۰/۱۲۵ کیلوگرم بر مترمکعب و درجه حرارت برابر با ۲۸۸/۱۵ کلوین میباشد. نسبت گرمای ویژه و گرمای ویژه در فشار ثابت بترتیب برابر ۱/۴ و ۱۰۰۵ ژول بر کیلوگرم کلوین انتخاب شده است. در این آزمایش از یک شبکه ۴*۱۰۲ استفاده میشود.

شکلهای (۵) و (۶) توزیع دما و توزیع سرعت را بعد شش میلی ثانیه در طول لوله نشان میدهند.

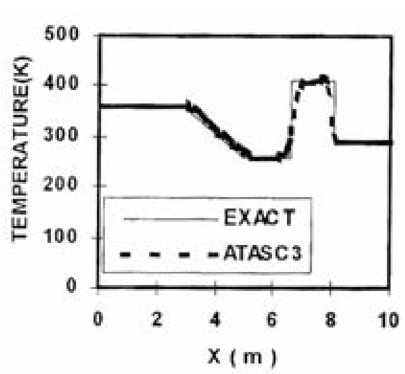
همانطور که از نتایج پیداست موج ضربهای با کمترین تعداد گره تسخیر میشود. ولی بعلت استفاده از متغیر اولیه، دارای کمی نوسان در محل موج ضربهای میباشیم همچنین در محل ناپیوستگی، پروفیل سرعت یکنواختی خود را از دست میدهد. برای مقایسه بهتر نتایج خطای مطلق از معادله ۱۶ محاسبه می شود.



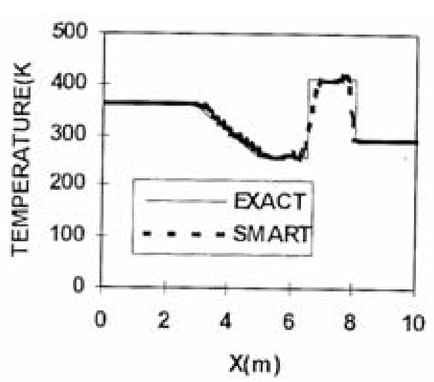
شکل (a) ۵- مقایسه نتایج حل دقیق و روش ATASC1



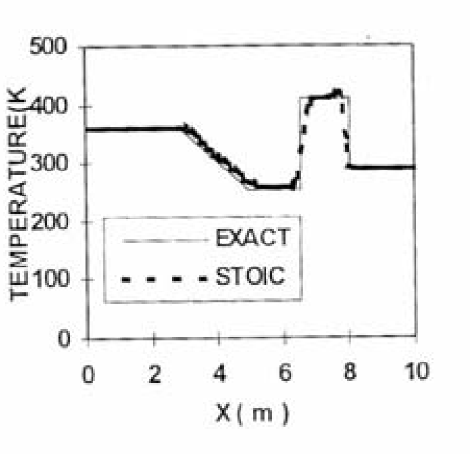
شکل (b) ۵- مقایسه نتایج حل دقیق و روش ATASC2



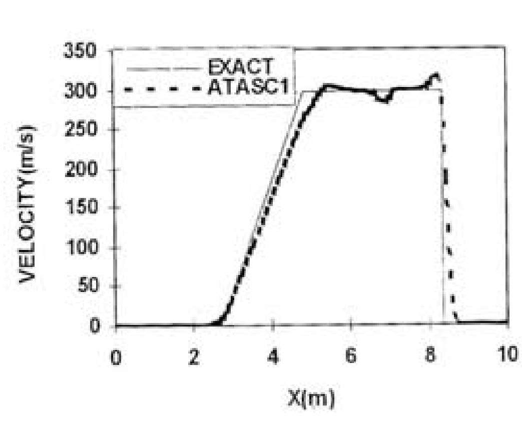
شکل (c) ۵- مقایسه نتایج حل دقیق با روش ATASC3



شکل (d) ۵- مقایسه نتایج حل دقیق با روش SMART

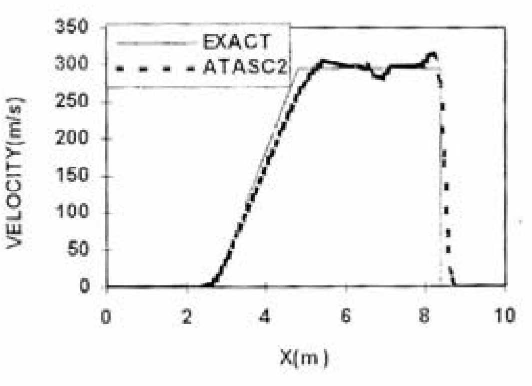


شکل (e) ۵- مقایسه نتایج حل دقیق با روش STOIC

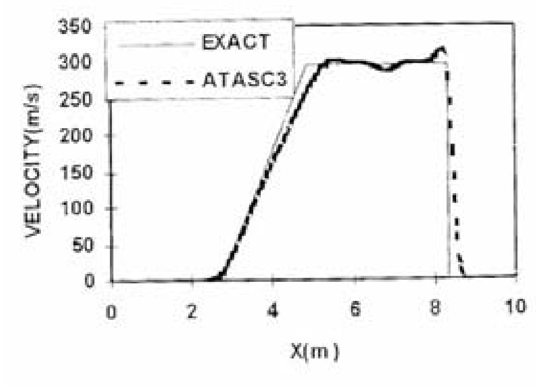


شکل (a) ۶- مقایسه نتایج حل دقیق با ATASC1

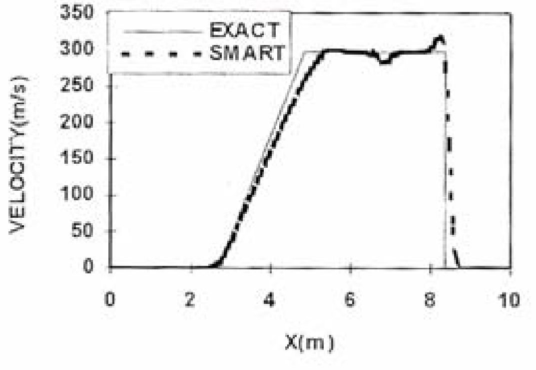
شکل ۵- نتایج دما در لوله حاوی موج ضربه ای با استفاده از روشهای مختلف برای نسبت فشار اولیه ۱۰ در زمان ۶ میلی ثانیه بعد از پاره شدن دیافراگم



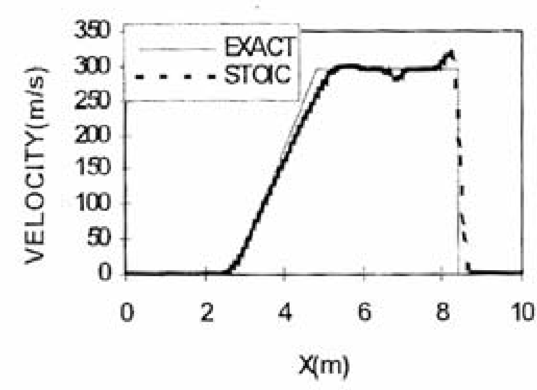
شکل (b) ۶- مقایسه نتایج حل دقیق با ATASC2



شکل (c) ۶- مقایسه نتایج حل دقیق با ATASC3



شکل (d) ۶- مقایسه نتایج حل دقیق با روش SMART



شکل (e) ۶- مقایسه نتایج حل دقیق با روش STOIC

شکل ۶- نتایج توزیع سرعت در لوله حاوی موج ضربه ای با استفاده ار روشهای مختلف در نسبت فشار اولیه ۱۰ در زمان ۶ میلی ثانیه بعد پاره شدن دیافراگم

$$\varepsilon = \sum \left| \phi_{computed} - \phi_{exact} \right| \qquad (۱۶)$$

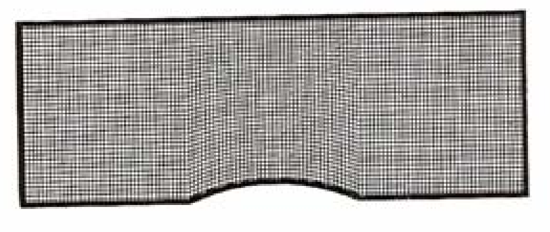
که جدول (۲) خطای مطلق توزیع سرعت و توزیع دما محاسبه شده در آزمایش اخیر را برای روش های مختلف نشان می دهد

همانطور که مشاهده می شود در دوتا از روشهای جدید خطای مطلق نسبت به روشهای قبلی به میزان قابل توجهی کاهش یافته است.

جدول ۲- خطای مطاق توزیع سرعت و دما روشهای مختلف

روش	خطای توزیع سرعت	خطای توزیع دما
ATASC1	97.47	26.02
ATASC2	150.23	32.03
ATASC3	117.44	6.65
SMART	138.91	22.41
STOIC	150.58	31.93
UPWIND	204.2	73.97
CENTRAL	178.95	44.84
FLUX	181.4	63.48
BLENDING		

شکل (۷) هندسه یک برآمدگی به ضخامت ۱۰% در داخل یک مجرا بهمراه یک شبکه یکنواخت ۴۲*۱۲۲ برای مقایسه رفتار روشهای مختلف در جریان پایا را نشان می‌دهد.

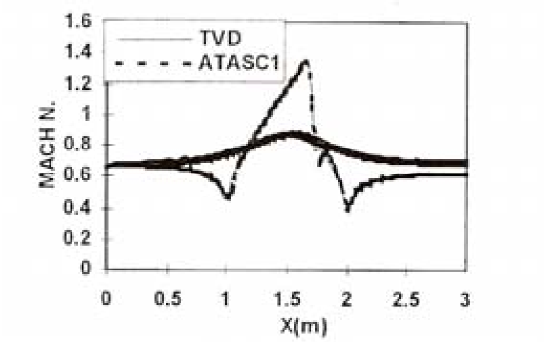


شکل ۷- شبکه و برآمدگی در مجرا

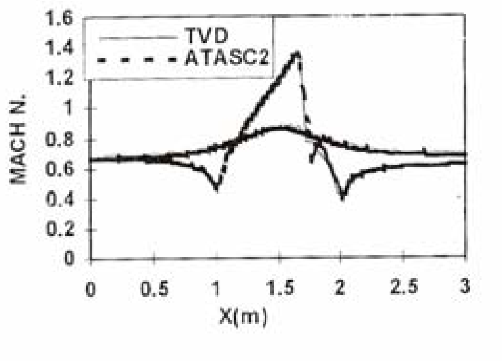
در این آزمایش جریان را بدون لزجت در نظر گرفته و ماخ ورودی را برابر ۰/۶۷۵ که مبین جریان انتقالی در مجراست فرض نمودهایم. شکل (۸) توزیع عدد ماخ بر روی سطوح بالا و پایین مجرا را برای روشهای جدید و روشهای SMART و STOIC نشان می‌دهد که نتایج این روشها با روش کاهش تغییرات کل عیسی و جوارشکیان [21] مقایسه گردیده است. همانطورکه مشاهده می‌شود اگرچه همه روشهای نسبتاً موج ضربهای جریان انتقالی را بخوبی تسخیر می‌نمایند اما سرعت همگرائی آنها متفاوت خواهد بود.

برای همه روشها، خطای باقیمانده برطبق معادله ۱۷ محاسبه، و همگرایی وقتی حاصل شده که خطای فوق کمتر از دبی‌های ورودی $۱۰^{-۳}$* باشد:

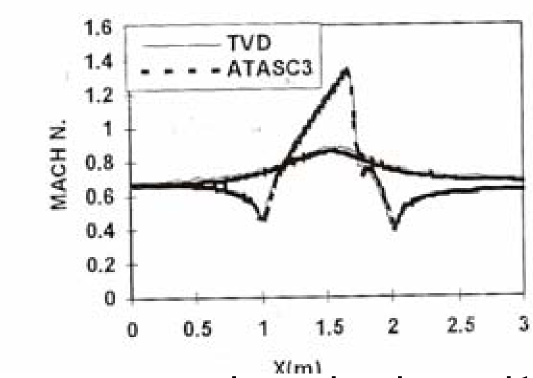
$$RES = \sum \left| a_m \phi_m + S'_\phi + S_{dc}) \right| \qquad (۱۷)$$



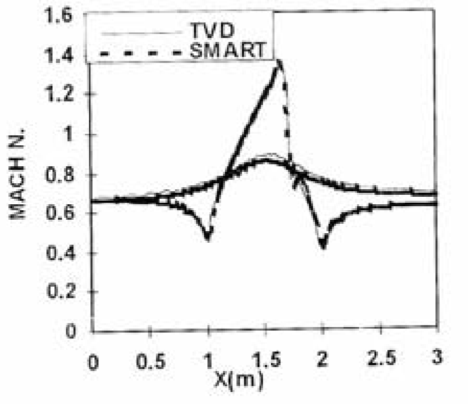
شکل (a) ۸- مقایسه نتایج TVD با روش ATASC1



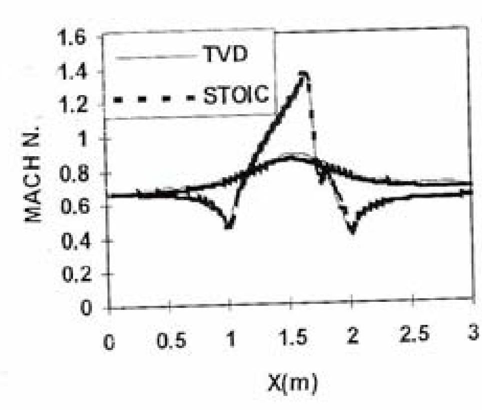
شکل (b) ۸- مقایسه نتایج TVD با روش ATASC2



شکل (c) ۸- مقایسه نتایج TVD با روش ATASC3



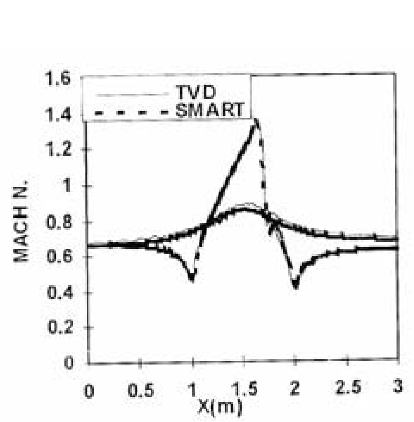
شکل (d) ۸- مقایسه نتایج TVD با روش ATASC3



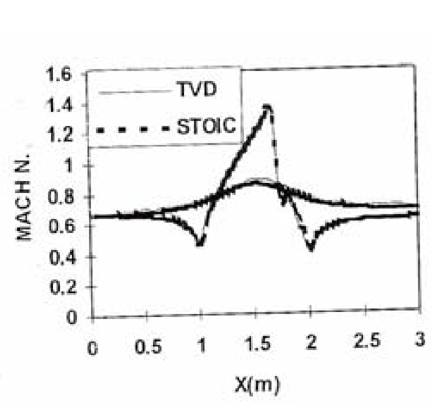
شکل (e) ۸- مقایسه نتایج TVD با روش STOIC

شکل ۸- جریان گذر صوتی روی برآمدگی به ضخامت ۱۰٪ در داخل مجرا در M=0.675 توزیع عدد ماخ بر روی سطوح بالا و پایین مجرا با استفاده از روش های مختلف

شکل (۹) نمودار همگرایی برای دوتا از روشهای جدید و SMART نشان می‌دهند.



شکل (a) ۹- تاریخچه همگرائی برای روش SMART



شکل (b) ۹- تاریخچه همگرائی برای روش هایATASC1 وATASC2

همانطوری که مشاهده می‌شود روشهای جدید بعد از تقریباً ۱۱۰۰ تکرار شرط همگرائی را ارضا می‌نماید در صورتی که روش اسمارت بعد تقریباً ۲۲۰۰ تکرار همگرا می‌شود.

۷- نتیجه‌گیری

نتایج جریان ناپایا نشان می‌دهد که با توجه به اینکه در تمام روشهای آزمایش شده شرط محدود کنندگی بطور کامل ارضا می‌شود شکل (۴) در نواحی ناپیوستگی نوساناتی دیده میشود که این ناشی از تکنیک نمودار متغیر بی‌بعد شده نیست بلکه بدلیل متغیرهای استفاده شده (متغیر اولیه) در توابع محدود کننده جمله جابجایی است بطوریکه جوارشکیان [21] نشان داد با وجود استفاده از تکنیک کاهش تغییرات کل که یک تکنیک محدود کننده جمله جابجایی است متغیرهای مختلف (اولیه، بقایی و مشخصه) نتایج متفاوتی را همراه داشتند و در صورت استفاده از متغیر اولیه نتایج همراه با نوسان بود. در اکثر روشهایی که برمبنای نمودار متغیر بی‌بعد شده قبلاً توسط محققان ارائه شده، در محدودة $0<\bar{\phi}_c<1$ چند روش درونیابی برحسب شرایط استفاده می‌شود و تغییرات گرادیان در انتقال از روشی به روش دیگر بطور ناگهانی صورت می‌گیرد که این نکته مشکلات همگرایی را همراه دارد. در روشهای جدید ارائه شده در محدوده $0<\bar{\phi}_c<1$ از یک تابع نسبی برای درونیابی استفاده شده که تغییرات شیب توسط توابع فوق به آرامی انجام می‌گیرد که این امر علاوه بر دقت مطلوب، باعث بهبود همگرایی می‌شود و موج ضربهای جریان انتقال را با تعداد تکرار کمتر بخوبی تسخیر می‌نماید.

مراجع

[1] Leonard, B.P. 1979. A stable and accurate convection modelling procedure based on quadratic interpolation, Comp. Met. Appl. Eng., vol. 19, pp. 59-98.

[2] Agarwal, R.K. 1981. A third order accurate upwing scheme for Navier Stokes solutions in three dimensions, in K.N. Ghia, T.J. Mueller, and B.R patel (eds). Computers in Flow Prediction and Fluid Dynamics Experiments. ASME Witer Meeting, Washington. D.C., 73-82.

[3] Fromm, E.A. 1968. A method for reducing dispersion in convective difference schemes. J. Comput. Phys, Vol 3, pp. 176-189.

[4] Zalesak, S.T. 1979. Fully multidimen-sional flux-corrected transport algorithms for fulling. J. Comput. Phys., Vol. 31, pp. 335-362,

[5] Chapman, M. 1981. FRAM nonlinear damping algorithm for the continuity equation, J. Comput. Phys., Vol. 44,pp. 48-103.

[6] Peric, M. 1985. A finite volume method for prediction of three dimensional fluid flow in complex ducts. Ph. D.Thesis, Imperial Collage, London, U. K.

[7] Zhu, J. and Leschziner, M.A. 1988. A local oscillation-damping algorithm for higher order converction schemes. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 67, pp. 355-366.

[8] Spalding, D.B. 1972. A morel finite-difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 4. pp. 551-559,.

[9] Patankar, S. V. 1981. Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere, Washington D.C.

[10] Sweby, P.K. 1984. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 21,pp.995-1011.

[11] Leonard, B.P. 1981. A survey of finite differences with upwinding for numerical modeling of the incompressible convection diffusion equation in C. Taylor and K. Morgan leds. Computational Technices in Transient and Turbulent Flow, Pineridgequess, Swansea, U.K., Vol.2,pp.1-35.

[12] Zhu, J. and rodi, W. 1991.A low dispersion and bounded convection scheme. Comp. Meth. App1. Mech. Eng., Vol. 92,pp. 87-96.

[13] Gaskell, P.H. and Lau, A.K. 1988. Curvature compensated convective transport: SMART, a new boundedness preserving transpoet algorithm, Int.J. Numer. Meth. Fluids., Vol 8, pp. 617-641.

[14] Zhu, J. 1991.A low-diffusive and oscillation free convection scheme. Commun. Appl. Numer. Meth., Vol 97, pp. 225-232.

[15] Lin, H. and chieng, C.C. 1991. Characteristic based flux limiters of an essentially third order flux-splitting method for hyperbolic conservation laws. Int J. Numer Meth. Fluids., Vol. 13 pp. 287-307.

[16] Ziman, H. 1990. A computer prediction of chemically reacting flows in strirred tanls. Ph.D. thesis, University of London.

[17] Darwish, M.S. 1993. “A new high-resolution scheme based on the normalized variable

formulation. Numerical Heat Transfrer., part 13, Vol. 24, pp. 353-371.

[۱۸] جوارشکیان، محمدحسن. ۱۳۷۹. یک روش کنترلی جدید برای ترم جابجایی معادلات انتقال برمبنای روش نمودار متغیر بی بعـد شده در یک الگوریتم فشار مبنـا. هشتمین کنفرانس سالانه انجمن مهندسان مکانیک ایران. ۲۷ تا ۳۰ اردیبهشت، دانشگاه صنعتی شریف تهران-ایران، صفحه ۹۸۳-۹۸۹.

[19] Rubin, S.G. and khosla, P.K. 1982. polynominal interpolation method for viscous flow calculations. J. Comput. Phys., Vol. 27, pp. 153-163.

[20] Leonand, B.P. 1988. Simple high-accuracy resolution program for convective modeling of discontinuities. Int J.Numet.Meth. Eng., Vol. 8, p.1291-1318.

[21] Issa, R.I. And javereshkian, M.H. 1996. Application of TVD scheme in pressure-bases finite-Volume methods. ASME Conference, Fluids Engineering Division., Vol 3, pp. 159164.

[22] Javareshkion, M.H. 2000, The role of bounded schemes base on characteristic variable in pressure-based algorithm “4 th Intermational 8 th Annual Conference of Iranian Society of Mechanical Engineers, pp. 977-981.