جهت تهیه فایل WORD این مقاله به سایت DaneshResan.com مراجعه نمایید و عنوان مقاله را جستجو کنید
بیش از ۲ میلیون مقاله فارسی در این سایت موجود میباشد

شبیهسازی عددی انجماد آلومینیم بهروش المان مرزی

فرامرز طلعتی کلاسر — دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشکدهٔ فنی، دانشگاه تبریز
اسماعیل خوشروان — استاد گروه مهندسی مکانیک، دانشکدهٔ فنی، دانشگاه تبریز
سید پرویز علوی تبریزی — استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکدهٔ فنی، دانشگاه تبریز

چکیده

در این مقاله از روش المان مرزی با المانهای خطی و درجه دو برای شبیهسازی فرآیند انجماد و سرد شدن فلز خالص (آلومینیم) ریختهگری شده در قالب ماسهای استفاده شده است. در این روش، نقاط گرهی روی مرز دامنه قرار داده میشوند. در مسایل مرز متحرک، موقعیت این گرهها در هر گام زمانی اصلاح شدند؛ زیرا موقعیت آنها تابع زمان است. اصلاح گرهبندی در روش المان مرزی به مراتب سادهتر از سایر روشهای عددی متعارف است. معادله رسانش گذرا همراه با تغییر فاز را به یک معادله انتگرال مرزی تبدیل کرده و با استفاده از روش المان مرزی؛ تابع گرین زمانمند و انتگرال تلفیقی را بهصورت عددی حل و توزیع دما و موقعیت جبهه انجماد را پیدا میکنیم. دقت روش مورد استفاده با حل مسئلهٔ یک بعدی انجماد بررسی و نتایج شبیهسازی عددی با نتایج بهدست آمده از انجام آزمایشهای مختلف مقایسه و بحث شده است.

کلمات کلیدی: **روش المان مرزی، شبیهسازی، تغییر فاز، مسایل مرز متحرک، گرادیان دما، جبهه انجماد**

Numerical Simulation of Solidification of Aluminium by Boundary Element Method

F. Talati Kalasar, E.Khoshravan and S.P. Alavi Tabrizi
Dep. of Mech. Eng., Faculty of Eng., Tabriz University

Abstract

The Boundary Element Method (BEM) with linear and quadratic shape function is applied to numerical simulation of solidification and cooling processes of pure metal in the area of casting produced in a sand mould with different boundary conditions. In BEM, nodal points are located only on the boundary and move together with the phase change interface. The governing transient heat conduction equation is solved using a BEM with time dependent Green's function and convolution integrals to determine the temperature distribution. The boundary energy equation (Stefan condition) is used to predict the movement of the solidification front. The accuracy of the method is illustrated through one-dimensional numerical examples. Some accurate experiments were carried out to obtain cooling curves, using the facilities of the University of Birmingham, England. Results from numerical simulation and experiment are compared and discussed. Agreement between simulated and measured temperature histories is good.

Key words: phase change, moving boundary problem, solidification front, interface, gradient

جهت تهیه فایل WORD این مقاله به سایت DaneshResan.com مراجعه نمایید و عنوان مقاله را جستجو کنید
بیش از ۲ میلیون مقاله فارسی در این سایت موجود میباشد

۱- مقدمه

مسایل انتقال گرما همراه تغییر فاز بهطور عموم، مسایل استفان نامیده می‌شوند. یکی از مشخصههای این نوع مسایل آن است که مرز دامنهٔ مسئله ثابت نیست و موقعیت آن را نمی‌توان بهصورت یک تابع صریح ریاضی بیان کرد. متحرک بودن مرز مسئله، باعث غیر خطی شدن مسئله می‌شود. در نتیجه تعداد راهحلهای تحلیلی موجود بهطور قابل ملاحظهای کاهش می‌یابد و در حالتهای خاص و ساده می‌توان برای این مسایل جواب تحلیلی و نیمه تحلیلی بهدست آورد [۱ و ۲]. این حالتها در اکثر موارد، کاربرد عملی ندارند. در نتیجه، حل عددی مسایل مرز متحرک در سه دهة گذشته مورد توجه پژوهشگران زیادی قرار گرفته است [۷-۳]. یکی از روشهای موفق در حل عددی مسایل استفان، روش المان مرزی است. استفاده از این روش حدود سال ۱۹۷۰ شروع شد [۹-۷]. ولی در آن موقع بهراه حل تحلیلی معادلات انتگرال بیش از حل عددی آن توجه داشتند. ذکر تمام کارهای انجام شده در حل مسایل استفان بهروش المان مرزی در این مقاله میسر نیست. برخی از کارهای انجام شده در مراجع [۲۱-۹] توضیح داده شده است.

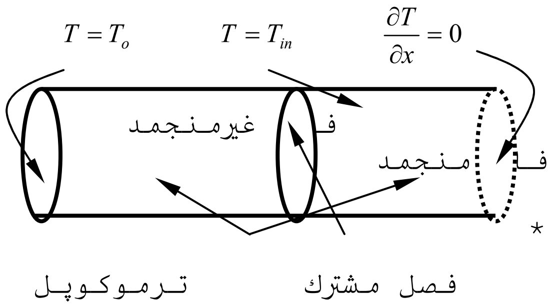
در این مقاله از روش المان مرزی با توابع شکل خطی و درجه دو برای تحلیل مسئلهٔ انجماد یک بعدی استفاده شده است. انتگرالهای تلفیقی زمانمند ظاهر شده در معادلات انتگرال مرزی را تا حدامکان بهصورت تحلیلی، حل کرده و در نهایت با استفاده از سریهای تقریبی متناظر انتگرالها، آنها بهروش عددی حل شدهاند.

۲- تعریف مسئله و معادلات حاکم

محیط یک بعدی بهطول L در نظر گرفته شد که در ابتدا از فلز مذاب با دمای یکنواخت T_{in} پر می‌باشد. در زمانهای $t>0$، مرز سمت راست مسئله $(x=L)$ را کاملاً عایقبندی فرض کرده و مرز سمت چپ مسئله $(x=0)$ را در دمای T_0 که کمتر از دمای انجماد فلز است، در نظر می‌گیریم. در نتیجه فلز مذاب در مرز $x=0$ شروع به انجماد کرده و بهسمت راست پیشروی می‌کند. موقعیت جبهه انجماد در زمان t را با $X(t)$ نمایش می‌دهیم. شکل (۱).

معادلهٔ حاکم بر مسئله معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی نفوذ است که در غیاب چشمه یا چاه گرمایی به صورت زیر نوشته می‌شود [۲-۱]:

$$\frac{\partial^2 T_i(x,t)}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha_i}\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t} \qquad i=f \text{ یا } u \quad (۱)$$



شکل ۱- هندسه مسئله برای مدل در نظر گرفته شده

شرایط مرزی و اولیه عبارتند از:

$$T_f(x,t)=T_u(x,t)=T_m \qquad \text{در } x=X(t) \quad (۲)$$

$$k_f\frac{\partial T_f}{\partial x}-k_u\frac{\partial T_u}{\partial x}=\rho L V(t) \quad \text{در } x=X(t) \quad (۳)$$

$$X(t)=0 \qquad \text{در } t=0 \quad (۴)$$

$$T_u(x,t)=T_{in} \quad \text{در } t=0 \quad (۵)$$

که در آن $T(x,t)=$ دما در نقطه x و در زمان t، $\alpha=$ ضریب پخشندگی گرمایی (Thermal diffusivity)، $L=$ گرمای نهان انجماد (Latent heat of fusion)، $k=$ رسانندگی گرمایی (Thermal conductivity) و $X(t)=$ موقعیت جبهه انجماد (Freezing front location) در زمان t و V (t) سرعت حرکت جبهه انجماد می‌باشند. اندیسهای u و f بهترتیب فازهای مایع و جامد را نشان می‌دهند. $V(t)$ طبق رابطه (۳) بهگرادیانهای دمای دو فاز مربوط می‌گردد که شرط استفان نامیده می‌شود. $V(t)$ وابسته بهاختلاف گرادیانهای دماست. بنابراین می‌توان مقدار $V(t)$ را با گرادیانهای دما کنترل کرد که این عمل در تعیین ریز ساختار ماده در حال انجماد مؤثر است و سبب تغییر مشخصههای خواص مکانیکی ماده نیز می‌شود [۲۴-۲۲].

جهت تهیه فایل WORD این مقاله به سایت DaneshResan.com مراجعه نمایید و عنوان مقاله را جستجو کنید
بیش از ۲ میلیون مقاله فارسی در این سایت موجود میباشد

۳- معادله انتگرال و حل عددی

معادلات انتگرال مرزی متناظر معادلات (۱) الی (۵) توسط پژوهشگران زیادی بهدست آورده شدهاند [۸، ۱۰ و ۱۲]. در حالت یک بعدی، مرز مسئله نقاط ابتدایی و انتهایی دامنه است. اگر دمای اولیه فلز مذاب برابر دمای انجماد آن باشد، معادلات ساده زیر را داریم [۱۲]:

$$\frac{T_o(t_s)-T_m}{2\alpha} = -\int_0^t T^*(0,t_s;0,t_o)\frac{\partial T(0,t_o)}{\partial x_o}dt_o + \int_0^t T^*(0,t_s;X(t_o),t_o)\frac{\partial T(X(t_o),t_o)}{\partial x_o}dt_o \qquad (۶)$$

$$0 = \int_0^t T^*(X(t_s),t_s;X(t_o),t_o)\frac{\partial T(X(t_o),t_o)}{\partial x_o}dt_o - \int_0^t T^*(X(t_o),t_s;X(t_o),t_o)\frac{\partial T(0,t_o)}{\partial x_o}dt_o + \int_0^t [T_o(t_o)-T_m]\frac{\partial T^*(X(t_s),t_s;0,t_o)}{\partial x_o}dt_o \qquad (۷)$$

تابع $T^*(x_s,t_s;x_o,t_o)$ جواب اساسی (تابع گرین زمانمند) متناظر معادله رسانش گذرا است که توسط رابطه زیر بیان می‌شود [۱، ۲ و ۲۵] :

$$T^*(r_s,t_s;r_o,t_o) = \frac{\exp[\frac{-(r_s-r_o)^2}{4\alpha(t_s-t_o)}]}{[4\alpha\pi(t_s-t_o)]^{\frac{n}{2}}}$$

که در آن $n=$ بعد فضایی مسئله، $r_s=$ موقعیت منبع حرارتی و $r_0=$ موقعیت نقطه میدان است. معادلات بالا، سرعت حرکت جبهه انجماد و گرادیان دما در درون دامنه مسئله را به مقادیر دما و گرادیان آن روی مرز مسئله مربوط می‌سازد. برای مجهولات مسئله توابع شکل خطی در نظر می‌گیریم:

$$q_o = \frac{\partial T(0,t_o)}{\partial x_o} = \Psi_m q_{om} \qquad (۸\text{-الف})$$

$$T_o = \Psi_m T_{om} \qquad (۸\text{-ب})$$

$$\Psi_1 = \frac{t_j - t_o}{t_j - t_{j-1}} \qquad (۸\text{-ج})$$

$$\Psi_2 = \frac{t_o - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \qquad (۸\text{-د})$$

که در آن (m=1,2) ؛ q_{om} و T_{om} بهترتیب نشان دهندهٔ مقادیر شار گرما و دما در زمانهای $t_0 = t_{j-1}$ و $t_0 = t_j$ است. با جانشانی معادلات (۸) در شکل گسسته شده معادلات (۶) و (۷)، معادلات زیر نتیجه می‌شوند:

$$\frac{T_o(t_s)-T_m}{2\alpha} = -\sum_{j=1}^{s}\int_{t_{j-1}}^{t_j} T^*(0,t_s;0,t_o)\frac{\partial T(0,t_o)}{\partial x_o}\Psi_m dt_o + \sum_{j=1}^{s}\int_{t_{j-1}}^{t_j} T^*(0,t_s;X(t_o),t_o)\frac{\rho L}{k}\frac{dX(t_o)}{dt_o}dt_o \qquad (۹)$$

$$0 = \sum_{j=1}^{s}\int_{t_{j-1}}^{t_j} T^*(X(t_s),t_s;X(t_o),t_0)\frac{\rho L}{k}\frac{dX(t_o)}{dt_o}dt_o - \sum_{j=1}^{s}\int_{t_{j-1}}^{t_j} T^*(X(t_s),t_s;0,t_o)\Psi_m dt_o \qquad (۱۰)$$
$$- \sum_{j=1}^{s}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \Psi_m \frac{\partial T^*(X(t_s),t_s;0,t_o)}{\partial x_o}[T_o(t_o)-T_m]dt_o$$

انتگرالهای ظاهر شده در معادلات (۹) و (۱۰) از نوع زیر هستند:

$$I_1 = \alpha\int_{t_{j-1}}^{t_j} T^*(0,t_s;0,t_o)\Psi dt_o$$

$$I_2 = \alpha\int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\partial T^*(0,t_s;0,t_o)}{\partial x_o}\Psi dt_o$$

$$I_3 = \alpha\int_{t_{j-1}}^{t_j} T^*(X(t_s),t_s;0,t_o)\Psi dt_o$$

$$I_4 = \alpha\int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\partial T^*(X(t_s),t_s;0,t_o)}{\partial x_o}\Psi dt_o$$

$$I_5 = \alpha\int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\partial T^*(X(t_s),t_s;X(t_o),t_o)}{\partial x_o}\Psi dt_o$$

$$I_6 = \alpha\int_{t_{j-1}}^{t_j} T^*(X(t_s),t_s;X(t_o),t_o)\Psi dt_o \qquad (۱۱)$$

عبارات تحلیلی برای این انتگرالها با توابع شکل $\Psi = \sqrt{t_o}$ و $\Psi = 1$ در مراجع [۱۳-۱۲] معرفی شدهاند. اگر موقعیت جبهه انجماد مشخص باشد، می‌توان انتگرالهای بالا را برای حالتهای $t_o = t_s$ و $t_o \neq t_s$ محاسبه کرد.

۱-۳- محاسبة انتگرالها

با انتخاب توابع شکل مختلف برای متغیرهای مسئله، انتگرال مرزی ظاهر شده در معادلات بهصورت عددی قابل حل هستند که در اینجا فقط به نتایج عملیات ریاضی پیچیده و طولانی برای حالت تابع خطی اشاره می‌شود.

الف- $t_0 \neq t_s$

در این حالت هیچ کدام از انتگرالها منفرد نیستند. با انتخاب تابع خطی، با بهکاربردن متغیرهای مناسب و انجام عملیات ریاضی و سادهسازی، داریم:

$$I_1 = \alpha \int_{t_{j-1}}^{t_j} T^*(0,t_s;0,t_o) t_o dt_o$$
$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \{ t_s (\sqrt{t_s - t_{j-1}} - \sqrt{t_s - t_j}$$
$$- \frac{1}{3} [(t_s - t_{j-1})^{3/2} - (t_s - t_j)^{3/2}] \} \qquad (۱۲)$$

$$I_2 = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\partial T^*(0,t_s;0,t_o)}{\partial x_o} t_o dt_o = 0 \qquad (۱۳)$$

$$I_3 = \alpha \int_{t_{j-1}}^{t_j} T^*(X(t_s),t_s;0,t_o) t_o dt_o$$
$$= \frac{t_s X(t_s)}{4\sqrt{\pi}} \{ \Gamma(-\frac{1}{2}, u_{j-1}) - \Gamma(-\frac{1}{2}, u_j) \}$$
$$- \frac{X^3(t_s)}{16\alpha\sqrt{\pi}} \{ \Gamma(-\frac{3}{2}, u_{j-1}) - \Gamma(-\frac{3}{2}, u_j) \}$$

کـه در آن $u = \dfrac{X^2(t_s)}{4\alpha(t_s - t_o)}$ و $\Gamma(n,x)$ تابـع گامای غیـر کامـل (ناقص) است کـــه طبق رابطـة زیر تعریف می‌شود [۲۷-۲۶]:

$$\Gamma(n,x) = \int_x^\infty e^{-w} w^{n-1} dw$$

تابع گامای غیر کامل طبق رابطة زیر با تابع خطای مکمل مرتبط است [۲۷]:

$$\Gamma(\frac{1}{2}, x) = \sqrt{\pi}\, erfc(\sqrt{x}) \qquad (۱۴)$$

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-w^2} dw \qquad (۱۵)$$

در نتیجه داریم:

$$I_3 = (\frac{e^{-u_j}}{\sqrt{u_j}} - \frac{e^{-u_{j-1}}}{\sqrt{u_{j-1}}})[\frac{X^3(t_s)}{12\alpha\sqrt{\pi}} - \frac{t_s X(t_s)}{2\alpha\sqrt{\pi}}]$$
$$- \frac{X^3(t_s)}{24\alpha\sqrt{\pi}} [\frac{e^{-u_j}}{\sqrt{u_j^3}} - \frac{e^{-u_{j-1}}}{\sqrt{u_{j-1}^3}}]$$
$$+ [erf(u_j) - erf(u_{j-1})][\frac{X^3(t_s)}{12\alpha} - \frac{t_s X(t_s)}{2}] \qquad (۱۶)$$

$$I_4 = \alpha \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\partial T^*(X(t_s),t_s;0,t_o)}{\partial x_o} t_o dt_o$$
$$= [E_1(u_{j-1}) - E_1(u_j)] \{ \frac{t_s}{2\sqrt{\pi}} + \frac{X^2(t_s)}{8\alpha\sqrt{\pi}} \}$$
$$+ \frac{X^2(t_s)}{8\alpha\sqrt{\pi}} (\frac{e^{-u_j}}{u_j} - \frac{e^{-u_{j-1}}}{u_{j-1}}) \qquad (۱۷)$$

که در آن $u = \dfrac{X^2(t_s)}{4\alpha(t_s - t_o)}$ و $E_1(x)$ تابع انتگرال نمایی است و طبق رابطة زیر تعریف می شود [۲۷-۲۶]:

$$E_1(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xw}}{w} dw = \int_x^\infty \frac{e^{-w}}{w} dw \qquad (۱۸)$$

$$I_5 = \alpha \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\partial T^*(X(t_s),t_s;X(t_o),t_o)}{\partial x_o} t_o dt_o$$

در این حالت موقعیت X(t) معلوم نیست. فرض می‌کنیم که X(t) (موقعیت جبهه انجماد) از رابطة زیر تبعیت کند:

$$X(t_o) = X(t_{j-1}) V(\overline{t_j})(t_o - t_{j-1}) \qquad (۱۹)$$

در رابطهٔ بالا $V(\overline{t_j})$ سرعت متوسط حرکت جبهه انجماد در گام زمانی $\Delta t = t_j - t_{j-1}$ است. با انتخاب $u = \frac{V^2 \times (t_s - t_o)}{4\alpha}$ و انتگرالگیری و سادهسازی داریم:

$$I_5 = [erf(u_j) - erf(u_{j-1})](\frac{\alpha}{V^2(t_s)} - \frac{t_s}{2}) + [\frac{\sqrt{u_{j-1}}}{e^{u_{j-1}}} - \frac{\sqrt{u_j}}{e^{u_j}}]\frac{\alpha}{V^2(t_s)\sqrt{\pi}} \quad (۲۰)$$

$$I_6 = \alpha \int_{t_{j-1}}^{t_j} T^*(X(t_s), t_s; X(t_o), t_o) t_o \, dt_o$$

$$I_6 = [erf(u_j) - erf(u_{j-1})](\frac{2\alpha^2}{V^3(t_s)} - \frac{\alpha t_s}{V(t_s)}) + \frac{4\alpha^2}{\sqrt{\pi} V^3(t_s)}(\frac{\sqrt{u_{j-1}}}{e^{u_{j-1}}} - \frac{\sqrt{u_j}}{e^{u_j}}) \quad (۲۱)$$

ب- $t_0 = t_s$

این حالت شامل انتگرالهای منفرد است. با استفاده از متغیرهای مناسب و روش انتگرالگیری کوشی می‌توان آنها را محاسبه کرد. نتایج نهایی محاسبات بهصورت زیر هستند:

$$I_1 = \alpha \int_0^{t_s} T^*(0, t_s; 0, t_o) t_o \, dt_o = \sqrt{\frac{\alpha t_s^3}{9\pi}} \quad (۲۲)$$

$$I_2 = \alpha \int_0^{t_s} \frac{\partial T^*(0, t_s; 0, t_o)}{\partial x_o} t_o \, dt_o = 0 \quad (۲۳)$$

$$I_3 = \alpha \int_0^{t_s} T^*(X(t_s), t_s; 0, t_o) t_o \, dt_o = \frac{X^3(t_s)}{12\alpha\sqrt{\pi}}(\frac{e^{-u_0}}{\sqrt{u_0}} + erfc(\sqrt{u_0})) + \frac{t_s X(t_s)}{2\sqrt{\pi}}[\frac{e^{-u_0}}{\sqrt{u_0}} - \sqrt{\pi} erfc(\sqrt{u_0})] - \frac{X^3(t_s)}{24\alpha\sqrt{\pi}} \frac{e^{-u_0}}{\sqrt{u_0^3}} \quad (۲۴)$$

که در آن $u_o = \frac{X^2(t_s)}{4\alpha t_s}$ است.

$$I_4 = \alpha \int_0^{t_s} \frac{\partial T^*(X(t_s), t_s; 0, t_o)}{\partial x_o} t_o \, dt_o = \frac{X^2(t_s)}{4\alpha\sqrt{\pi}}[\frac{e^{-u_0}}{\sqrt{u_0}} + \sqrt{\pi} erfc(\sqrt{u_0})] + \frac{t_s}{2} erfc(\sqrt{u_0}) \quad (۲۵)$$

که در آن $u_o = \frac{X_2(t_s)}{4\alpha t_s}$ است.

$$I_5 = \alpha \int_0^{t_s} \frac{\partial T^*(X(t_s), t_s; X(t_o), t_o}{\partial x_o} t_o \, dt_o = \frac{\alpha}{V} erfc(\sqrt{u_o}) - \frac{t_s V}{2} erf(\sqrt{u_0}) - \frac{2\alpha e^{-u_0}}{V\sqrt{u_0 \pi}} \quad (۲۶)$$

که در آن $u_o = \frac{t_s V^2}{4\alpha}$ است.

$$I_6 = \alpha \int_0^{t_s} T^*(X(t_s), t_s | X(t_o), t_o) t_o \, dt_o = (\frac{2\alpha^2}{V^3} - \frac{t_s \alpha}{V}) erf(\sqrt{u_0}) - \frac{4\alpha^2}{V^3\sqrt{\pi}} \sqrt{u_0} e^{-u_0} \quad (۲۷)$$

که در آن $u_o = \frac{t_s V^2}{4\alpha}$ است.

تابع انتگرالنمایی و تابع خطا که در معادلات بالا ظاهر شدهاند، به ازای تمام مقادیر متغیرهایشان همگرا هستند. ولی با افزایش مقدار متغیر، آهنگ همگرایی خیلی کند می‌شود و این عمل سبب ایجاد مشکلاتی در حل عددی می‌گردد. برای رفع این نقصیه، بسته به مقدار متغیر از سریهای مختلف برای تقریب آنها استفاده شده است [۲۷-۲۶]:

الف – تابع انتگرالنمایی

$a) 0 \le x \le 1$

$$E_1(x) + \ln x = 0.0010785x^5 - 0.00976004x^4$$
$$+ 0.05519968x^3 - 0.24991055x^2$$
$$+ 99999193x - 0.57721566 + \varepsilon(x)$$
$$|\varepsilon(x)| < 2 \times 10^{-7}$$

$b) 1 \le x < \infty$

$$xe^x E_1(x) = \varepsilon(x) + \frac{x^2 + 2.334733x + 0.250621}{x^2 + 3.330657x + 1.681534}$$
$$|\varepsilon(x)| < 5 \times 10^{-5}$$

ب – تابع خطا

$a) 0 \le x \le 0.15 \qquad erf(x) = 1.128x$

$b) 0.15 \le x \le 1.5$
$$erf(x) = 1.2911x - 0.4262x^2 - 0.0198$$

$c) 1.5 \le x \le 2 \qquad erf(x) = 0.0584x + 0.8814$

$d) x \ge 2 \qquad erf(x) = 1$

بعد از محاسبة انتگرالهای لازم، دستگاه معادلات بهصورت زیر در میآید:

$$[A]\{T\} = [B]\{q\} \qquad (۲۸)$$

بعد از اعمال شرایط مرزی، معادلات نهایی را طوری مرتب میکنیم که تمامی مجهولات مسئله (شار گرمایی و سرعت حرکت جبهه انجماد) در سمت چپ دستگاه معادلات و تمام معلومات در سمت راست دستگاه معادلات قرار گیرند، یعنی:

$$[K]\{U\} = [F] \qquad (۲۹)$$

که در آن $\{U\}$ ماتریس مجهولات (دما و شار گرمایی)، $[K]$ ماتریس ضرایب و $[F]$ ماتریس معلومات است. دستگاه معادلات بالا را در هر گام زمانی حل میکنیم . بایستی توجه داشت که موقعیت جبهه انجماد $X(t)$ مجهول است و جزئی از حل مسئله محسوب میشود.

۲-۳- الگوریتم حل

برای شروع حل مسئله، در لحظة $t_o = 0$، از روش شبه مانا استفاده میکنیم. بدین معنی که فرض میکنیم در گام زمانی خیلی کوچک Δt آهنگ حرکت جبهه انجماد خیلی کم است. در نتیجه معادله گرما را، بدون توجه به شرط استفان حل کرده و گرادیان دما را بهدست میآوریم. گرادیان دما طبق رابطة (۳) بهسرعت جبهه انجماد مربوط میشود، با محاسبة $V(t)$، با استفاده از رابطة (۱۹)، $X(t)$ پیدا میشود. با حل دستگاه معادلات، مجهولات مسئله بهدست میآیند. مقدار سرعت جبهه انجماد $V(t)$ بهدست آمده از روش شبه مانا معمولاً بیشتر از مقدار واقعی آن است. در گامهای بعدی، سرعت حرکت جبهه انجماد $V(t)$، را حدس میزنیم. سپس موقعیت جبهه انجماد $X(t)$، را طبق رابطة (۱۹) محاسبه و دستگاه معادلات (۲۹) را حل میگردد تا مقادیر شار گرما و سرعت حرکت جبهه انجماد را تعیین شوند. اگر مقدار $V(t)$ تخمین زده شده، مقدار درستی باشد، آنگاه مقادیر محاسبه شدة شار گرمایی و $V(t)$ در شرط استفان صدق میکنند، در غیر اینصورت سرعت حرکت جبهه انجماد را طبق رابطة زیر باید تصحیح شود.

$$\frac{dX(t_j)}{dt} = \frac{1}{2}[\frac{dX(t_{j-1})}{dt} + (\frac{k}{\rho L}\frac{dT}{dx})_{t_j}] \qquad (۳۰)$$

سپس موقعیت جدید جبهه انجماد را پیدا میکنیم. با حل دوباره دستگاه معادلات، مجهولات را محاسبه میکنیم. عمل تکرار تا زمانی ادامه مییابد که شرط اعمال شده ارضا شود، یعنی:

$$\left\| \frac{V_{corr} - V_{pr}}{V_{corr}} \right\| \le \varepsilon$$

که در آن ε مقدار تلرانس خطاهاست. در این مطالعه مقدار تلرانس خطا ۱% فرض شده بود.

۴- آنالیز گرمایی

با قرار دادن یک ترموکوپل در یک نقطه خاص از قطعه ریختهگری میتوان مقدار دما در آن نقطه را تعیین کرد. اگر تغییرات دما بر حسب زمان رسم شود، منحنی سرد کردن

(سرمایش) بهدست می‌آید. در عمل، معمولاً از دو عدد ترموکوپل استفاده می‌شود که یکی از آنها در نزدیکی دیواره قالب و دیگری را در مرکز گرمایی قطعه ریختهگری قرار می‌دهند. مرکز گرمایی یک قطعه ریختهگری، نقطهای است که بعد از سایر نقاط در آخرین لحظه منجمد می‌شود. از منحنی سرمایش می‌توان برای پیدا کردن نقطه شروع و خاتمه انجماد استفاده کرد.

نقطه آغاز انجماد: طبق تعریف، نقطهای روی محور زمان است که در آن نقطه، دما بطور ناگهانی از افزایش تدریجی منحرف می‌گردد.

نقطهٔ پایان انجماد: فرایند انجماد در یک نقطه خاتمه یافته تلقی می‌شود، اگر آهنگ تغییرات دما از مقدار صفر به یک مقدار منفی معین تغییر یابد [۲۸]. چون ترموکوپلها در فواصل معین از یکدیگر قرار داده می‌شوند، با اندازهگیری زمان حرکت جبهه انجماد بین دو ترموکوپل، می‌توان آهنگ حرکت جبهه انجماد را بطور تجربی تعیین کرد.

۵- کار تجربی

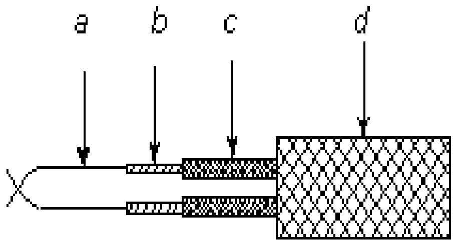
برای اطمینان از نتایج روش المان مرزی، چندین آزمایش با استفاده از امکانات فنی دانشکدهٔ متالورژی و مواد دانشگاه بیرمنگهام انگلستان، جهت جمع‌آوری دادههای آنالیز گرمایی صورت گرفته شد، تا نتایج دو روش با یکدیگر مقایسه شوند. قطعه ریختهگری بهشکل یک استوانه به قطر ۲۰ میلیمتر و طول ۱۰۰ میلیمتر بود که تمام سطوح جانبی و یک قاعدهٔ آن را با ماده fiberfrax عایق گردید. قاعدهٔ دیگر آن در معرض دمای محیط قرار گرفت تا حالت انجماد یک بعدی ایجاد شود. برای کاهش اثرات جریان همرفت، استوانه بطور افقی تعبیه شد. قالب ریختهگری را از ماسه Grade 60 AFS شسته و خشک شده با افزودن ۱/۲% وزنی رزین (چسب) ساخته شد از مذاب آلومینیم با درجهٔ خلوص ۹۹/۹% برای ریختهگری استفاده شد. این ماده دارای رسانندگی گرمایی بالا، گرمای نهان ذوب و نقطهٔ ذوب مشخص است که مشخصات آن در جدول (۱) نشان داده شده است. فلز ریختهگری به وزن ۱/۵ کیلوگرم در کوره قوس الکتریکی ذوب و دمای آن تا حدود ۷۰۰ درجهٔ سانتیگراد بالا برده شد تا از یکنواخت بودن دما اطمینان حاصل گردد. قالب در کوره الکتریکی تا دمای ۶۶۰ درجهٔ سانتیگراد گرم گردید تا بتوان شرایط تئوری و عملی را به یکدیگر نزدیک نمود.

بعد از اینکه قالب از کوره الکتریکی بیرون آورده شد، مذاب را درون آن ریخته و یک طرف قالب با دمش هوای فشرده در معرض دمای ۲۲ درجهٔ سانتیگراد قرار گرفت.

جدول ۱- مشخصات فیزیک آلومینیم و ماسه تهیه شده توسط شرکت رولز رویس انگلستان

مشخصه	آلومینیم	ماسه
گرمای ویژه (J/Kg°C)	۱۰۵۶/۳۷۳۲	۱۰۴۶/۹۷
رسانندگی گرمایی (W/m°C)	۲۲۹/۱۷۳۶	۰/۶۴
چگالی (Kg/m^3)	۲۶۹۹	۱۵۲۰
گرمای نهان ذوب (KJ/kg)	۳۹۴/۹۴۸۰۸	—

برای ثبت دادههای گرمایی از ترموکوپل نوع K، ترکیب نیکل – کروم یا نیکل – آلومینیم استفاده گردید، شکل (۲).



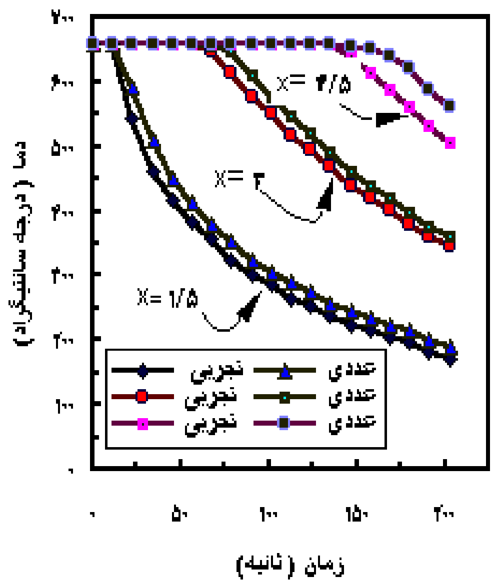
a) سیم ترموکوپل ۰/۳ میلیمتر b) لوله سرامیکی عایق
c) الیاف عایق نخی d) غلاف لوله سرامیکی
شکل ۲- شکل شماتیکی قسمتهای مختلف ترموکوپل

ترموکوپلها روی خط‌المرکزین دو قاعده استوانه در فواصل مختلف نسبت به هم در درون قطعه ریختهگری تعبیه شدند. سر دو سیم ترموکوپل با استفاده از جوش نقطهای بهیکدیگر اتصال داده شده و قسمت اضافی را قطع گردید و قسمتهای لخت سیمها را بهجز فاصله یک میلیمتری نقطه اتصال با دی اکسید تیتانیم (TiO_2) عایق گردید تا از اتصال کوتاه احتمالی جلوگیری شود. قبل از اتصال ترموکوپلها به دستگاه ثبات، آنها امتحان شده تا از کارکرد صحیح اطمینان حاصل شود. دادههای گرمایی با سرعتهای با ۱۰-۲۰-۲۵۰ سیگنال بر ثانیه بهکامپیوتر داده شد. شرایط مرزی متفاوت در آزمایشهای مختلف ایجاد گردید. در یک

آزمایش سطح قالب ماسهای را با دمیدن هوای فشرده در معرض دمای ثابت ۲۲ درجة سانتیگراد قرار گرفت. در آزمایش دیگر از مبردی (chill) در سطح مرزی $x = 0$ استفاده گردید تا اثرات مشخصههای فیزیکی مواد مورد استفاده را روی انتقال گرما بررسی گردد.

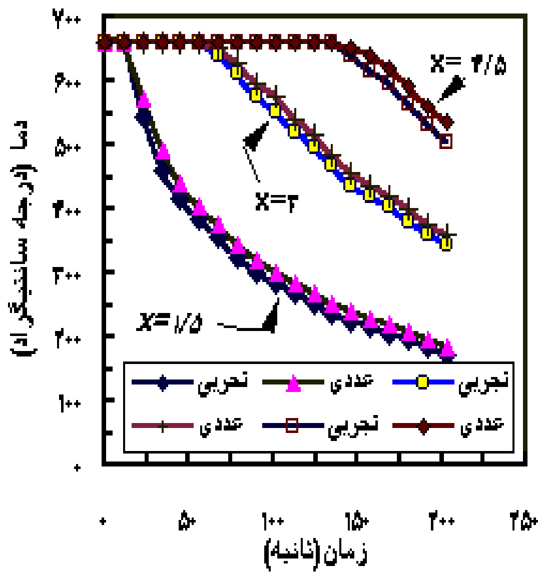
۶- نتایج و بحث

مدل مورد مطالعه یک لوله استوانهای به قطر ۲۰ میلیمتر و طول ۱۰۰ میلیمتر اختیار گردید که در ابتدا از فلز مذاب در دمای ۶۵۹ درجه سانتیگراد پر شده بود. سطح مرزی $x = 0$ را تا دمای محیط ۲۲ درجه سانتیگراد سرد گردید. فرایند انجماد از سطح مرزی $x = 0$ شروع و به سمت راست پیشروی کرد تا اینکه تمام قطعه منجمد شد. نتایج شبیهسازی عددی و تجربی در برخی از نقاط درون قطعه ریخته گری در شکلهای (۳) الی (۶) نشان داده شدهاند.

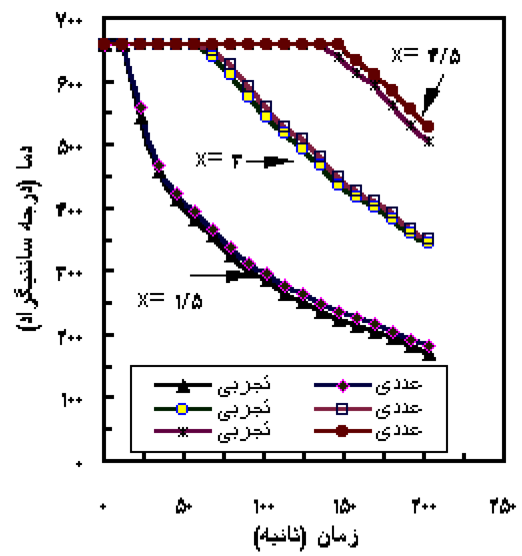


شکل ۳- توزیع دما برحسب زمان (المان ثابت) در یک نمونه استوانهای شکل به قطر و ارتفاع ۲۰ و ۱۰۰ میلیمتر در یک انجماد جهت دار

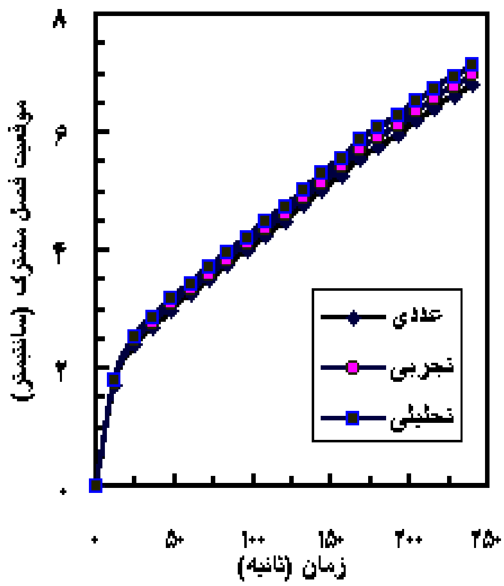
برای شروع محاسبات از روش شبه مانا با فاصلة زمانی $\Delta t = ۰/۰۱$ ثانیه جهت تعیین موقعیت جبهه انجماد استفاده شد. در گامهای بعدی فاصلة زمانی متغیر اختیار شد بهطوری که در مراحل نهایی محاسبات اندازه فاصلة زمانی ۰/۰۲ و ۰/۰۵ ثانیه بودند. نتایج محاسبات نشان میدهند که در روش المان مرزی محدودیت کمتری روی اندازه فاصله زمانی نسبت به سایر روشهای عددی (مانند روش المان محدود یا اختلاف محدود) وجود دارد، یعنی با تغییر اندازه فاصلة زمانی نتایج نهایی تغییر زیادی نمیکنند.



شکل ۴- توزیع دما برحسب زمان (المان خطی) در یک نمونه استوانهای شکل به قطر و ارتفاع ۲۰ و ۱۰۰ میلیمتر در یک انجماد جهت دار



شکل ۵- توزیع دما برحسب زمان (المان درجة دوم) در یک نمونه استوانهای شکل به قطر و ارتفاع ۲۰ و ۱۰۰ میلیمتر در یک انجماد جهتدار

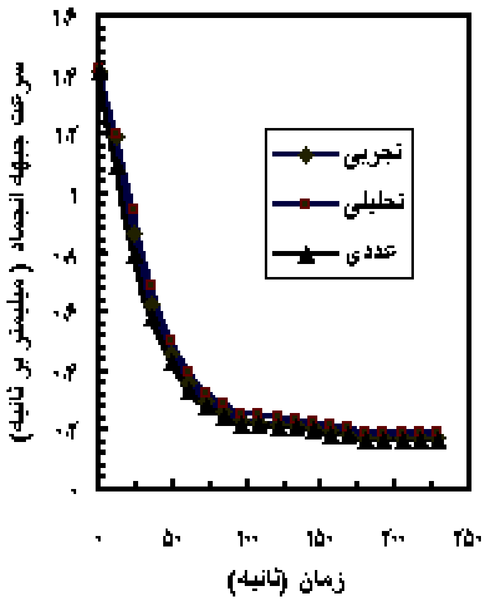


شکل ۶- موقعیت جبهه انجماد برحسب زمان در یک نمونه استوانه ای شکل به قطر و ارتفاع ۲۰ و ۱۰۰ میلیمتر در یک انجماد جهتدار

در صورتی که اگر از روش المان محدود برای حل مسایل مرز متحرک استفاده شود، با تغییر اندازه فاصلة زمانی جوابها دستخوش تغییرات زیاد می‌شوند [۱۶]. تعداد المانهای مورد استفاده در شبیهسازی بین ۳۰ الی ۶۰ متغیر بودند. مدت زمان لازم CPU برای محاسبة مقادیر دما در درون دامنه، در صورت استفاده از المان خطی و درجه دوم بهترتیب ۱۲% و ۱۸% نسبت به حالت المان ثابت کاهش داشت.

خطای نسبی دما بین مقادیر تجربی و عددی برای حالتهای المان ثابت، خطی و درجة دوم بهترتیب ۵%، ۳/۵% و ۲% بود. این اختلاف بهخاطر استفاده از روش شبه مانا در مراحل اولیه محاسبات است. شکل (۶) موقعیت جبهه انجماد را بهصورت تابعی از زمان نشان می‌دهد. در این شکل، نمودار نتایج حاصل از روش المان مرزی با نتایج راهحل تحلیلی محیط نیمه – بی‌نهایت و نتایج تجربی رسم شده‌اند. همخوانی بین نتایج بهدست آمده از حل معادلات انتگرال مرزی و سایر روشها در محدودة قابل قبول است، اگر چه بعضی اختلافات بین نتایج مشاهده می‌شود. مقدار این اختلاف در مراحل اولیه محاسبات خیلی کم است ولی با افزایش زمان، زیاد می‌شود. این اختلافها می‌توانند ناشی از وجود نداشتن دقت کافی در مشخصههای فیزیکی مواد، پارامترهای انتقال گرما، صحیح نبودن کالیبراسیون ترموکوپلها و حساسیتهای مختلف ترموکوپلها باشند.

منحنی‌های سرمایش و مشتق اول آن نسبت به زمان را می‌توان برای تعیین تجربی نقطه آغاز و پایان فرایند انجماد بهکار برد. چون فاصله بین ترموکوپلها مشخص است، با خواندن مقدار زمان لازم برای تکمیل فرایند انجماد بین دو نقطه، سرعت حرکت جبهه انجماد بین دو نقطه محاسبه می‌شود. دما در نقاط نزدیک دیواره افت سریع و ناگهانی دارد، یعنی آهنگ اولیه انجماد خیلی بالاست. با افزایش فاصله از دیواره قالب و گذشت زمان گرادیان دما کاهش می‌یابد. شکل (۷).



شکل ۷- سرعت حرکت جبهه انجماد برحسب زمان در یک نمونه استوانهای شکل به قطر و ارتفاع ۲۰ و ۱۰۰ میلیمتر در یک انجماد جهت دار

۷- نتیجه گیری

تحلیل مسایل مرز متحرک با توجه به کاربردهای عملی و فنی آن از اهمیت خاصی برخوردار است. بهنظر می‌رسد که روش المان مرزی نسبت به سایر روشهای عددی برای بررسی این نوع مسایل مناسبتر است. در این روش:

- اصلاح گره بندی و تهیه دادههای اولیه آسان و ساده است.
- فرمولبندی مسئله از نوع ترکیبـی است و گرادیان کمیت مجهول مسئلـه بهطور مستقیم از حل دستگاه معادلات بـهدست

می‌آیند، در نتیجه خطای محاسبات عددی کمتر است.

- محدودیت کمتری روی اندازه فاصله زمانی وجود دارد.
- در مراحل اولیه محاسبات، اختلافهایی بین مقادیر عددی و تجربی مشاهده شد. مقدار این اختلاف در مراحل بعدی محاسبات کمتر می‌شود.
- همخوانی بین نتایج شبیهسازی عددی و تجربی مطلوب است.

تشکر و قدردانی

تمام آزمایشهای تجربی این کار در دانشگاه بیرمنگهام انگلستان صورت گرفته است. از مسئولین محترم دانشگاه تبریز و وزارت علوم، تحقیقات و فنآوری که زمینهٔ سفر به خارج از کشور را فراهم ساختند، کمال تشکر را داریم. بلاشک، بدون کمک مسئولین محترم، این سفر میسر نبود. از جناب پروفسور کمبل استاد دانشگاه بیرمنگهام بهخاطر راهنماییهای ارزندهشان خیلی ممنون و سپاسگزاریم.

نمادها

دما	$T(x,t)(^0C)$
ضریب پخشندگی گرمایی	$\alpha(m^2/s)$
رسانندگی گرمایی	$k(w/m^0c)$
گرمای نهان ذوب	$L(J/Kg)$
چگالی	$\rho(Kg/m^3)$
گرمای ویژه	$C_p\,(J/kg^0C)$
موقعیت جبهه انجماد	$X(t)$ (m)
سرعت حرکت جبهه انجماد	$V(t)$ (m/s)
دمای اولیه	$T_{in}(^0C)$
دمای نقطه ذوب	$T_m\,(^0C)$
تابع گرین	$T^*(x_s,t_s;x_0,t_0)$
تابع گاما	$\Gamma(x)$
تابع انتگرال نمایی	$E_1(x)$
تابع خطای گاوس	$erf(x)$
سرعت تصحیح شده	V_{corr}
سرعت تخمینی	V_{pr}
تلرانس خطا	ε

مراجع

[1] Ozisik, M.N. Heat Conduction, 2nd Edition, John Wiley&sons (1993).

[2] Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C. Conduction of Heat in Solids, 2nd Edition. Oxford University Press (1959).

[3] Samarskii, A.A. and Vabishchevich, P.N., Computational Heat Transfer, Vol.1, John Wiley & Sons, (1995).

[4] Banerjee, P.K. Boundary Element Method in Engineering, 2nd edition. McGraw-Hill Book Co. (1994).

[5] Brebbia, C.A. et al., Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag (1984).

[6] Chuang,Y.K. and Szekley,J., On the use of Green's functions for solving melting or solidification problems, International Journal of Heat and Mass Transfer, 14, pp1285-1294,(1971).

[7] Chuang,Y.K. and Szekley,J., The use of Green's functions for solving melting or solidification problems in cylindrical co-ordinates system. International Journal of Heat and Mass Transfer, 15, pp1171-1174, (1972).

[8] Banerjee,P.K. and Shaw. R.P., Boundary element formulation for melting and solidification problems. Developments in boundary element methods-2 (Banerjee, P.K. and Shaw, R.P. eds.) pp1-18, Barking, Essex, UK. (1982).

[9] Hong, C.P. et al, Application of BEM in two and three dimensional unsteady heat transfer problems involving phase change: solidification problems, in Boundary elements, Proceeding of 5th International conference, Hiroshima, Japan, Springer-Verlag, Berlin, (1983).

[10] O'Neill, K. Boundary integral equation solution for moving boundary phase change problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19, pp1825-1850, (1983).

[11] Takahashi, S. et al. Boundary elements to phase change problems, in Boundary Elements, Proceeding of 5th international Conference, Hiroshima, Japan, Springer-Verlag, Berlin, (1983).

[12] Heinlein, M et al. A Boundary element method analysis of temperature fields and stresses

during solidification. Acta Mechanica, 59, pp59-81, (1986).

[13] Zabaras, N. et al. An Analysis of inverse heat transfer problems with phase changes using an integral method. ASME, Transactions, Journal of Heat Ttransfer, 110,pp554-561, (1988).

[14] Young, G.L. et al, Boundary element solution for free boundary convection-diffusion problems, Numerical Heat Transfer, Vol.21, No.3, pp299-311, (1992).

[15] Vick,B. and Nelson,D.J. Boundary element method applied to freezing and melting problems, Numerical Heat Transfer, Part B: fundamentals, Vol.24, No.3, pp263-277, (1993).

[16] Zabaras, N. and Mukherjee, S., Solidification problems by the boundary element method, International Journal of Solids and Structures, 12/13, pp1829-1846, (1994).

[17] Delimasilva, W.Jr. and Wrobel, L.C. Front tracking BEM formulation for one-phase solidification/melting problems. Engineering Analysis with Boundary Elements, Elsevier Science Ltd. Oxford, UK, Vol.16, No.2, pp171-182, (1995).

[18] Majchrzak, E. and Monchnacki, B. Application of BEM in the thermal theory of foundry. Engineering Analysis with Boundary Elements, Elsevier Science Ltd. Oxford, UK. Vol.16, No.2, pp99-121, (1995).

[19] Nowak, A.J. Boundary elements in inverse thermal problems with phase change. Proceedings of the world conference on the Boundary Element Method, Computational Mechanics Publ. Southampton UK, pp117-128, (1996).

[20] Sarler, B. and Kuhn, G. Dual reciprocity boundary element method for convective-diffusitive solid-liquid phase change problems, part 1, Formulation, Engineering Analysis with Boundary Elements, Elsevier Science Ltd. Oxford, UK. vol.21, No.1, pp53-63, (1998).

[21] Sarler, B. and Kuhn, G. Dual reciprocity boundary element method for convective-diffusitive solid-liquid phase change problems, part 2, Numerical examples, Engineering Analysis with Boundary Elements, Elsevier Science Ltd. Oxford, UK. Vol.21, No.1, pp65-79, (1998).

[22] Campbell, J. Castings, Butterworth-Heinemann, (1991).

[23] Flemings, M. C. Solidification Processing, McGraw-Hill Book Co. (1974).

[24] Greiger, G.H. and Poirier, D.R. Transport Phenomena in Metallurgy, Addison-Wesley Publishing Company Inc. (1973).

[25] Morse, P.M. and Feshbach, H. Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill Book Co. (1953)

[26] Gradshteyn, I.S., and Ryzhnik, I.M., Tables of integrals, series and products, 4Th ed. Academic Press Inc. London, (1965).

[27] Abramowitz, M., and Stegun, I.A., Editors, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical tables, Dover Publication, (1965).

[28] Tamminen, J.," Thermal analysis for investigations of solidification mechanisms in metals and alloys", Chemical Communications, University of Stockholm, (1988).