الگوریتم شناسایی مسیرهای ممکن جهت خروج از حالت تکین روباتها

فرید نجفی استادیار دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین‌طوسی
امیر حسین محور کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجهنصیرالدینطوسی

چکیده

بروز حالت منفرد (یا تکین) (singularity) همواره در فرایند کنترل روباتها مشکل آفرین بوده است. طراحی مناسب مسیر حرکت روبات یکی از راهکارهایی است که در غلبه بر مشکلات ناشی از بروز حالت تکین در روباتها از آن استفاده می‌شود. در این مقاله هدف ارائه الگوریتمی جهت شناسایی مسیرهایی است که تحت آن روبات قادر باشد نقطة تکینی را که در شروع مسیر خود قرار دارد، در راستای جهت منفرد ترک نماید. براساس روش تجزیة مقدار منفرد و مدل ریاضی حالت منفرد، الگوریتمی ارائه شده است که توسط آن می‌توان برای روباتهای غیر مضاعف و حالت تکین مرتبة یک، مسیرهای ممکن در راستای جهت منفرد را برای ترک نقطة منفرد شناسائی نمود. سپس نتایج برای یک روبات شش درجه آزادی بهکار گرفته شده و در خصوص مسیرهای ممکن برای این روبات بحث گردیده و نتایج تحلیل ارائه شده است.

کلمات کلیدی: سینماتیک معکوس، حالت منفرد در سینماتیک، مسیرهای ممکن

An Algorithm for Determining Feasible Robot’s Trajectories for Leaving a Singular Point

F. Najafi and A. H. Mehvar
Mech. Eng. Dept. of K. N. Toosi University of Technology

Abstract

Occurrence of singularity in robot manipulators complicates control process of the robots. Suitable design of robot’s trajectories is one of the ways for prevailing over the effects of singularity. In this article a new method for determining feasible trajectories along singular direction that a robot can leave a singular point at the beginning of its trajectory, is presented. On the base of singular value decomposition and mathematical model of singularity, an algorithm is presented for nonredundant robots in singularity with rank deficiency one, to find feasible trajectories along singular direction. Then the results were applied to a six degree of freedom robot and its feasible trajectories are determined.

Key words: inverse kinematics; singularity in robots; feasible trajectories.

۱- مقدمه

بروز حالت تکین در کنترل روباتها بعنوان یکی از مشکلات اساسی همواره مطرح بوده است. در وضعیت منفرد، روبات عملاً یک یا چند درجه آزادی خود را از دست می‌دهد و بهمین دلیل سرعت عضو انتهایی در یک یا چند جهت صفر خواهد شد. معمولاً این وضعیت توأم با افزایش نامتناهی سرعت در یک یا چند مفصل بوده که به بروز ارتعاشات شدید در پیکرهٔ روبات می‌انجامد. جهاتی را هم که در راستای آنها عضو انتهایی سرعت خود را از دست می‌دهد، جهت منفرد می‌نامند. یکی از بارزترین حالات منفرد زمانی است که روبات بهمرز فضای کاری خود می‌رسد. از نظر ریاضی آنچه که در حالت منفرد اتفاق می‌افتد کاهش مرتبهٔ ماتریس ژاکوبین روبات بوده که نتیجهٔ آن معکوسناپذیری ماتریس ژاکوبین است. از آنجاکه در کنترل مکانی حرکت روباتها نیاز به تعیین معکوس ماتریس ژاکوبین می‌باشد، حالت منفرد در اعمال کنترل مکانی در روباتها مشکلزا خواهد بود.

در این مقاله به بررسی مسیرهای حرکت روبات که از نقاط منفرد روبات عبور می‌نمایند خواهیم پرداخت، زیرا که استفاده از مسیرهای مناسب یکی از راهکارهایی است که می‌توان با بکارگیری آن، روبات را از حالت منفرد رهانید.

در این خصوص تحقیقات مختلفی بهانجام رسیده است.

در [۱] سرعتهای مفصلی از این دید که قادر به تولید حرکتی در حالت منفرد باشند بررسی شده است، اما این روش تنها مسیرهایی را مجاز می‌دانست که در آنها روبات قادر است فقط در جهات عمود برجهت منفرد، نقطهٔ منفرد را ترک و یا به آن وارد شود، لذا این روش بسیار محدود کننده بوده و مسیرهای پیشنهادی آن نمی‌بایست هیچ مؤلفهای در راستای منفرد داشته باشند. در [۲-۴] الگوریتمهای مختلف کنترلی برای حالت منفرد ارائه شده است، در این مقالات روشهای ارائه شده برای اجتناب و یا کاهش مشکلات حالت منفرد در حین حرکت روبات می‌باشند. در [۵] روشی برای طراحی مسیر برای حالات منفرد ارائه شده است که در آن، یک حل پیوستهٔ سینماتیک معکوس برای یک مسیر معین ارائه شده است. در این روش نتایج می‌بایست بهیک مسیر از پیش تعیین شده، اعمال می‌شدند و ضمن اینکه نتایج تنها برای یک حالت از حالات منفرد قابل استفاده می‌باشند.

یکی از مشکلات خاص در طراحی مسیر روباتها هنگامی رخ می‌دهد که در آن روبات در وضعیت منفرد قصد حرکت در جهت منفرد را نیز داشته باشد. در این حالت برای روبات این کار عملی نبوده و لازم است مسیرهای ممکنی شناسائی شوند که روبات بتواند در جهت آن مسیرها شروع بهحرکت نماید، لذا در این مقاله روشی ارائه شده است تا برای حالاتی که روباتها در نقاط ابتدائی مسیر با وضعیت منفرد مواجه هستند، مسیرهای ممکن جهت خروج روبات از وضعیت منفرد در جهت منفرد شناسائی شوند.

به این منظور الگوریتمی براساس روش تجزیهٔ مقدار منفرد فرموله شده است. (مسیرهای ممکن آن دسته از مسیرهایی هستند که همواره بتوان با یک ورودی کنترلی متناهی (سرعت متناهی) روبات را در تمام طول آن بهحرکت در آورد).

۲- مدل ریاضی حالت منفرد

همانطور که قبلاً بیان گردید در لحظهٔ منفرد مرتبهٔ ماتریس ژاکوبین روبات کاهش می‌یابد که در نتیجهٔ آن ماتریس ژاکوبین معکوسناپذیر خواهد شد. معادلهٔ بیانگر رابطهٔ بین سرعت مفاصل و سرعت عضو انتهائی بهصورت رابطهٔ (۱) می‌باشد:

$$\dot{X} = J.\dot{q} \qquad (۱)$$

که در آن J ماتریس ژاکوبین $(m \times n)$، $\dot{q}$ ماتریس $(n \times 1)$ سرعت مفاصل و $\dot{X}$ ماتریس $(m \times 1)$ مؤلفههای سرعت عضو انتهایی روبات، n تعداد مفاصل روبات و m تعداد درجات آزادی حرکتی در فضای کاری روبات می‌باشند.

با استفاده از روش تجزیهٔ مقدار منفرد می‌توان ماتریس J را بهحاصلضرب سه ماتریس معادلهٔ (۲) تجزیه نمود [۶] و [۷]:

$$J = U.\sum.V^T \qquad (۲)$$

که در آن u_iها بردارهای ویژهٔ ماتریس $J.J^T$ می‌باشند. ماتریس V نیز ماتریسی متعامد $(n \times n)$ است که ستونهای آنرا بردارهای ویژهٔ ماتریس $J.J^T$ تشکیل می‌دهند. لذا می‌توان نوشت:

$$U = [u_1, u_2, \ldots, u_m] \qquad (۳)$$

که در آن u_i ها بردارهای ویژة ماتریس $J.J^T$ می‌باشند. ماتریس V نیز ماتریسی متعامد $(n\times n)$ است که ستونهای آنرا بردارهای ویژة ماتریس $J^T.J$ تشکیل می‌دهند. لذا می‌توان نوشت:

$$V=[v_1,v_2,...,v_n] \qquad (۴)$$

که در آن v_i ها بردارهای ویژة ماتریس $J^T.J$ هستند. ماتریس Σ را نیز می توان بهصورت (۵) تعریف نمود:

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\hat{\Sigma}_{[r\times r]} & 0_{[r\times(n-r)]}\\ 0_{[(m-r)\times r]} & 0_{[(m-r)\times(n-r)]}\end{bmatrix} \qquad (۵)$$

در معادلة (۵)، r معرف مرتبة ماتریس ژاکوبین، $0_{[r\times(n-r)]}$ ماتریس صفر $[r\times(n-r)]$، $0_{[r\times(m-r)]}$ ماتریس صفر $[r\times(m-r)]$، $0_{[(m-r)\times(n-r)]}$ ماتریس صفر $[(m-r)\times(n-r)]$ و ماتریس $\hat{\Sigma}_{[r-r]}$ نیز یک ماتریس قطری است که بهصورت (۶) تعریف می‌شود:

$$\hat{\Sigma}=diag(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_r) \qquad (۶)$$

عناصر قطری ماتریس $\hat{\Sigma}$ رابطة (۶) برابر با جذر مثبت مقادیر ویژة ماتریس $J.J^T$ هستند و مقادیر انفراد نام دارند، بطوریکه:

$$(\sigma_1\geq\sigma_2\geq...\geq\sigma_r\geq...\geq\sigma_m)$$

با توجه بهروش تجزیة مقدار منفرد می‌توان حل معکوس کاذب را برای محاسبة معکوس ماتریس ژاکوبین J^* رابطة (۷) به کار بست [۸]:

$$J^*=V.\Sigma^*.U^T \qquad (۷)$$

که در آن:

$$\Sigma^*=\begin{bmatrix}\hat{\Sigma}^* & 0_{[r\times(n-r)]}\\ 0_{[(n-r)\times r]} & 0_{[(n-r)\times(m-r)]}\end{bmatrix} \qquad (۸)$$

که در آن $0_{[r\times(m-r)]}$ ماتریس صفر $[r\times(m-r)]$، $0_{[(n-r)\times r]}$ ماتریس صفر $[(n-r)\times r]$ و $0_{[(n-r)\times r]}$ ماتریس صفر $[(n-r)\times r]$ و

$$\hat{\Sigma}^*=diag(\frac{1}{\sigma_1},\frac{1}{\sigma_2},...,\frac{1}{\sigma_r})$$

می‌باشند. در حالت منفرد از مرتبه $(m-r)$ داریم:

$$\sigma_{r+1}=\sigma_{r+2}=...=\sigma_m=0$$

با توجه به اینکه $(\sigma_1\geq\sigma_2\geq...\geq\sigma_r)$، همواره در لحظة منفرد ستونهای آخر ماتریس U (از u_{r+1} تا u_m) بردارهای متناظر با مقادیر منفرد صفر می‌باشند. لذا بردارهای u_{r+1} تا u_m معرف بردارهای یکة جهات منفرد متناظر خواهند بود [۸]. در اینجا خود را بهحالت منفرد مرتبه یک $(r=m-1)$ محدود نموده و لذا جهت منفرد یکی است که با بردار u_m مشخص می‌شود.

۳- مدل سرعت در حالت منفرد

قبلاً بیان شد که در لحظة منفرد و در حالت منفرد مرتبه یک بردار u_m معرف بردار یکة جهت منفرد خواهد بود. لذا حاصلضرب داخلی این بردار در بردار سرعت عضو انتهایی، مؤلفة سرعت در جهت منفرد $(\dot{d})$ خواهد بود، بنابراین داریم (۹):

$$\dot{d}=u_m^T.\dot{X} \qquad (۹)$$

و یا بهصورت کلی‌تر:

$$\begin{bmatrix}\dot{Y}\\ \dot{d}\end{bmatrix}=U^T.\dot{X} \qquad (۱۰)$$

که در این رابطه $\dot{Y}$ معرف $m-1$ مؤلفة سرعت در جهاتی غیر از جهت منفرد و $\dot{d}$ معرف مؤلفه سرعت در جهت منفرد است. رابطة (۱۰) بیانگر تبدیل بردار سرعت عضو انتهایی به دستگاه جدیدی بوده که ویژگی مهم آن دستگاه این است که در آن بردار یکة جهت منفرد آخرین محور آنرا تشکیل می‌دهد. اکنون با استفاده از رابطة (۱) و جایگزینی در رابطة (۱۰) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \dot{Y} \\ \dot{d} \end{bmatrix} = U^T .J.\dot{q} \qquad (۱۱)$$

که بهعبارت سادهتر می‌توان چنین بیان داشت:

$$\dot{Y} = K.\dot{q} \qquad (۱۲)$$

$$\dot{d} = L.\dot{q} \qquad (۱۳)$$

که در آن K ماتریس (زیر ماتریس) $[(m-1)\times n]$ و L ماتریس (زیر ماتریس) $(1\times n)$ می‌باشند، لذا می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} K \\ L \end{bmatrix} = U^T .J \qquad (۱۴)$$

در لحظهٔ منفرد $\dot{d} = 0$ و به تبع آن $L = 0$ خواهد بود (زیرا که ماتریس سرعت مفاصل $(\dot{q})$ مخالف صفر است).

۴- شناسائی مسیرهای ممکن

با مشتقگیری از طرفین رابطهٔ (۱۳) نسبت به زمان و با عنایت به این مسئله که در لحظهٔ منفرد L برابر صفر خواهد بود (زیرا با توجه به رابطهٔ (۱۳) در حالت منفرد $\dot{d} = 0$ لذا $L = 0$) برای شتاب در لحظهٔ منفرد می‌توان نوشت:

$$\ddot{d} = \frac{dL}{dt}\dot{q} = (\dot{q}^T .\Im L^T).\dot{q} \qquad (۱۵)$$

که در آن:

$$\Im L = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial q_1} & \frac{\partial l_2}{\partial q_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial l_n}{\partial q_1} \\ \frac{\partial l_1}{\partial q_2} & \frac{\partial l_2}{\partial q_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial l_n}{\partial q_2} \\ \cdots\cdots & & & \\ \cdot\cdot & & & \\ \frac{\partial l_1}{\partial q_n} & \frac{\partial l_2}{\partial q_n} & \cdots\cdots & \frac{\partial l_n}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

و l_i درایههای ماتریس L و q_i ها درایههای ماتریس q (مقادیر جابجایی مفاصل) می‌باشند.

در رابطهٔ (۱۲) با توجه به تعریف بردار $\dot{Y}$، می توان گفت ماتریس K یک ماتریس با مرتبهٔ کامل است $(Rank(K) = m-1)$ و می‌توان این ماتریس را به دو زیر ماتریس به صورت (۱۶) تجزیه نمود:

$$K = [K_P , K_s] \qquad (۱۶)$$

که در این رابطه K_P یک ماتریس مربعی معکوسپذیر با $m-1$ سطر و ستون و K_s یک ماتریس $(m-1)\times[(n-m+1)]$ می‌باشد. بههمین ترتیب می‌توان ماتریس $\dot{q}$ را نیز تجزیه کرد رابطهٔ (۱۷):

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_P \\ \dot{q}_S \end{bmatrix} \qquad (۱۷)$$

که در آن $\dot{q}_P$ یک بردار $(m-1)$ عضوی و $\dot{q}_S$ یک بردار $(n-m+1)$ عضوی می‌باشند. بنابراین می‌توان رابطهٔ (۱۲) را بهصورت (۱۸) بازنویسی نمود:

$$\dot{Y} = K_P .\dot{q}_P + K_S .\dot{q}_s \qquad (۱۸)$$

با توجه به روابط (۱۷) و (۱۸) داریم:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_P \\ \dot{q}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_P^{-1}.(\dot{Y} - K_S .\dot{q}_S) \\ \dot{q}_S \end{bmatrix} \qquad (۱۹)$$

و یا بهطور خلاصهتر:

$$\dot{q} = M.\dot{Y} + N.\dot{q}_S \qquad (۲۰)$$

که در آن:

$$M = \begin{bmatrix} K_P^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad N = \begin{bmatrix} -K_P^{-1}.K_S \\ I \end{bmatrix}$$

که در آن 0 ماتریس صفر $((n-m+1)\times(m-1))$ و I ماتریس واحد $((n-m+1)\times(n-m+1))$ می‌باشند. با جایگذاری از رابطهٔ (۲۰) در رابطهٔ (۱۵) معادلهٔ نهائی برای شتاب در راستای جهت منفرد به صورت (۲۱) بهدست می‌آید:

$$\ddot{d} = \dot{q}_S^T.A.\dot{q}_S + B.\dot{q}_S + C \qquad (۲۱)$$

که در آن:

$$\begin{cases} A = N.\Im L.N \\ B = \dot{Y}.M^T(\Im L^T + \Im L).N \\ C = \dot{Y}^T.M^T.\Im L.M.\dot{Y} \end{cases} \qquad (۲۲)$$

حال می‌توان شرایط وجود مسیرهای با شتاب غیرصفر را بررسی نمود. در اینجا خود را بهبررسی حالت منفرد در روباتها محدود می‌نمائیم. از آنجایی‌که در آن روباتها تعداد مفاصل برابر با تعداد درجات آزادی عضو انتهایی است $(m=n)$، لذا بردار $\dot{q}_S$ به یک اسکالر تبدیل شده و رابطهٔ (۲۱) بهصورت رابطهٔ (۲۳) ساده می‌شود پس خواهیم داشت:

$$\ddot{d} = A.\dot{q}_S^2 + B.\dot{q}_S + C \qquad (۲۳)$$

در این مقاله، حالتی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آن روبات در شروع مسیر حرکت خود در نقطه منفرد قرار داشته و می‌خواهد از آنجا حرکت نماید، لذا $\dot{Y}(0)=0$، در این حالت همانگونه که از روابط (۲۲) مشخص است چنانچه بردار سرعت در جهات غیر از جهت منفرد در لحظهٔ منفرد برابر صفر باشد $(\dot{Y}(0)=0)$، ماتریسهای B و C نیز برابر صفر خواهند بود. بهعبارت دیگر چنانچه عضو انتهایی روبات به هنگام ترک نقطهٔ منفرد دارای سرعت اولیه نباشد ماتریسهای B و C صفر می‌شوند. بنابراین خواهیم داشت (۲۴):

$$\ddot{d} = A.\dot{q}_S^2 \qquad (۲۴)$$

در معادلهٔ فوق اگر A مخالف صفر باشد، شتاب در راستای منفرد هم علامت با A خواهد بود. این از نظر فیزیکی به آن معناست که عضو انتهایی در لحظهٔ منفرد تنها می‌تواند تحت شتابی هم علامت با A، حرکت خود را از نقطهٔ منفرد تنها در یک سمت آن آغاز نماید. بهعبارت دیگر در داخل فضای کاری نیز مرزی وجود دارد که عضو انتهایی تنها می‌تواند به یک سمت آن عبور نماید (این مرز می‌تواند بر مرز فضای کاری نیز منطبق باشد) اینکه در لحظهٔ منفرد عضو انتهایی قادر خواهد بود بهکدام سمت این مرز حرکت نماید تابع علامت A است، اگر A مثبت باشد در سمت همسو با جهت منفرد و در غیر اینصورت در سمت مخالف جهت منفرد امکان حرکت وجود خواهد داشت. لذا در مسائلی که این گروه از حالت منفرد را شامل می‌شوند مسیرهایی قابل قبولند که شتاب در آنها در لحظهٔ منفرد و در جهت منفرد هم علامت با A باشند.

اما اگر A برابر صفر باشد معادلهٔ (۲۴) بهصورت $\ddot{d}=0$ خلاصه خواهد شد. این بهمعنای آنست که در راستای منفرد شتابی ایجاد خواهد شد و لذا هیچ مسیر ممکنی با شتاب غیر صفر در راستای منفرد و در لحظهٔ منفرد وجود نخواهد داشت بهعبارت دیگر در این شرایط و با این فرضیات، امکان حرکت در راستای منفرد وجود ندارد. بنابراین مشاهده می‌شود که می‌توان با توجه به مقدار A در خصوص مسیرهای ممکن از نقطه منفرد بحث نمود.

۵- شناسایی مسیرهای ممکن برای یک روبات شش درجه آزادی

در این قسمت می‌خواهیم نتایج بهدست آمده را روی یک روبات ۶ درجه آزادی مورد بررسی قرار دهیم. این روبات که در شکل (۱) آورده شده است دارای یک درجه آزادی کشویی و پنج درجه آزادی دورانی می‌باشد. پارامترهای دناویت – هارتنبرگ برای این روبات در جدول (۱) آمده‌اند.

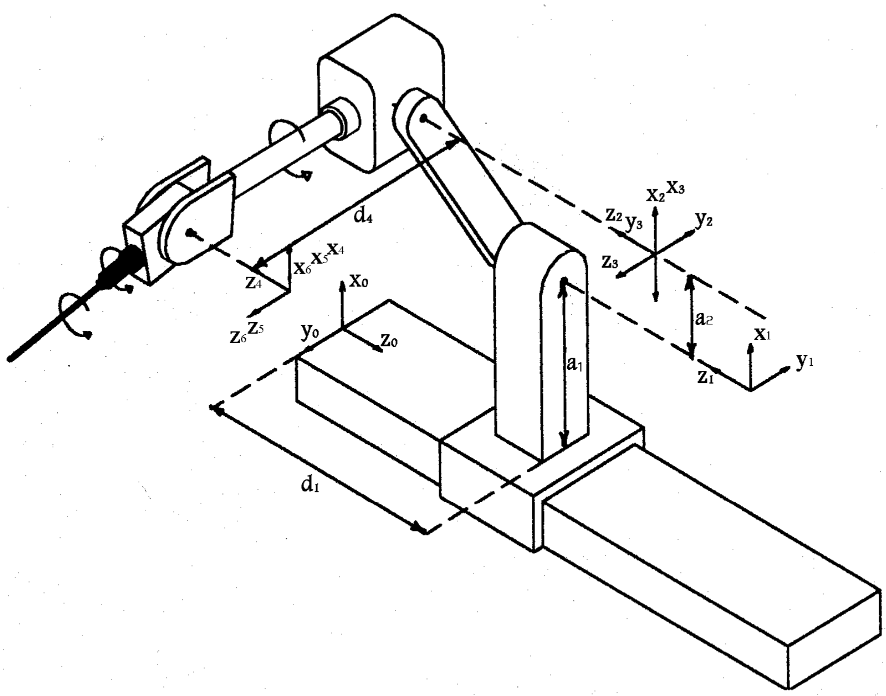
با استفاده از جدول (۱) ماتریس ژاکوبین بهصورت رابطهٔ (۲۵) بهدست خواهد آمد. (در اینجا به منظور سادگی عبارات، ماتریس ژاکوبین را در دستگاه مختصات ۳ محاسبه نموده‌ایم):

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \qquad (۲۵)$$

که در آن:

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 0 & d_4 + a_2.S3 & d_4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2.C3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad J_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -S4 & C4.S5 \\ 0 & C4 & S4.S5 \\ 1 & 0 & C5 \end{bmatrix}$$



شکل ۱- روبات شش درجه آزادی

جدول ۱- پارامترهای دناویت – هارتنبرگ

مفصل	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	0	a_1	d_1	0
2	0	a_2	0	θ_2
3	90°	0	0	θ_3
4	-90°	0	d_4	θ_4
5	90°	0	0	θ_5
6	0	0	0	θ_6

(لازم بهتوضیح است که $C4=\cos\theta_4 , S4=\sin\theta$ و ...)
از آنجا که J_{12} برابر ماتریس صفر است، لذا مسئله در سه درجه آزادی اول مستقل از سه درجه آزادی دوم است و بنابراین بررسی وضعیت منفرد و مسیرهای ممکن را می‌توان برای سه درجه آزادی اول بهطور مستقل از سه درجه آزادی دوم انجام داده و بالعکس. لذا در این مقاله بهبررسی مسیرهای ممکن برای سه درجه آزادی اول خواهیم پرداخت و مسیرهای ممکن برای سه درجه آزادی دوم بطور مشابه تعیین می‌گردند.

در بررسی سه درجه آزادی اول تنها زیر ماتریس J_{11} وجود خواهد داشت، لذا در این حالت مقادیر منفرد برای این ماتریس بهصورت روابط (۲۶) هستند:

$$\begin{cases}\sigma_1=(0.5(a_2^2+2d_4^2+2a_2d_4S3+\sqrt{(a_2^2+2d_4^2+2a_2d_4S3)^2-4(a_2d_4C3)^2}))^{0.5}\\ \\ \sigma_2=1\\ \sigma_1=(0.5(a_2^2+2d_4^2+2a_2d_4S3-\sqrt{(a_2^2+2d_4^2+2a_2d_4S3)^2-4(a_2d_4C3)^2}))^{0.5}\end{cases} \qquad (۲۶)$$

اکنون با مشخص بودن مقادیر منفرد می‌توان حالت یا حالات منفرد را برای سه درجه آزادی اول روبات شناسایی نمود.

مقادیر منفرد σ_1 و σ_2 همیشه مثبت و مخالف صفر هستند و لذا تنها حالت منفرد برای سه درجه آزادی اول زمانیاست که در آن پیکربندی روبات بگونهای باشد که σ_3 برابر صفر گردد. این شرایط عبارت خواهد بود از (۲۷):

$$\theta_3=k\pi+\frac{\pi}{2} \qquad (۲۷)$$

با توجه به رابطهٔ (۲۵) ماتریس ژاکوبین در لحظهٔ منفرد برابر خواهد شد با (۲۸):

$$J_{11}=\begin{bmatrix}0 & d_4+a_2.\varepsilon & d_4\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (۲۸)$$

که در آن:

$$\varepsilon=\begin{cases}1 & \text{اگر} \quad k=\text{زوج}\\ -1 & \text{اگر} \quad k=\text{فرد}\end{cases}$$

با توجه به رابطهٔ (۲۸) و آنچه که بیان گردید دو نتیجه حاصل می‌شود، اول اینکه ماتریس L، سطر سوم ماتریس ژاکوبین J_{11} بوده و در لحظهٔ منفرد ماتریس L برابر صفر می‌باشد و دوم اینکه مؤلفهٔ سوم سرعت عضو انتهایی در دستگاه ۳ برابر صفر است، لذا جهت منفرد نیز همان محور Z دستگاه مختصات ۳ خواهد بود.
با توجه بهعبارت پارامتری ماتریس L می‌توان نوشت (۲۹):

$$\Im L=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2S3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (۲۹)$$

که در لحظهٔ منفرد برابر است با:

$$\Im L=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2\varepsilon\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (۳۰)$$

از طرفی ماتریس K نیز در لحظهٔ منفرد برابر است با (۳۱):

$$K=\begin{bmatrix}0 & d_4+a_2.\varepsilon & d_4\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (۳۱)$$

اکنون می بایست ماتریس K را به دو زیر ماتریس تجزیه کرد. لذا با توجه به معادلات (۱۶)، (۱۷) و (۱۹) داریم:

$$\dot{Y}=\begin{bmatrix}0 & d_4\\ 1 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}d_4+a_2\varepsilon\\ 0\end{bmatrix} \qquad (۳۲)$$

که در این حالت ماتریسهای K_P و K_S عبارتند از:

$$K_P = \begin{bmatrix} 0 & d_4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad K_S = \begin{bmatrix} d_4 + a_2\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}$$

و $\dot{q}_S = \dot{q}_2$. لذا در این حالت ماتریسهای M و N برابرند با:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{d_4} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{d_4 + a_2\varepsilon}{d_4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

اکنون می‌توان مقادیر A، B و C را تعیین نمود.

$$A = (a_2\varepsilon)^2 . \left(-\frac{d_4 + a_2\varepsilon}{a_2 d_4 \varepsilon} \right) \quad (۳۳)$$

$$B = C = 0$$

از آنجا که مقدار A همواره مخالف صفر است، لذا شتاب در جهت منفرد، تابع علامت A خواهد بود. بنابراین می‌توان گفت مسیرهایی ممکن هستند که در لحظة شروع حرکت، شتاب در راستای منفرد در آنها با پارامتر h (رابطة (۳۴)) هم‌علامت باشند:

$$h = -\frac{d_4 + a_2\varepsilon}{a_2 d_4 \varepsilon} \quad (۳۴)$$

بنابراین اگر h مثبت باشد روبات می‌تواند نقطة منفرد را در جهت بردار یکة منفرد ترک نمایند و اگر h منفی باشد روبات می‌تواند نقطة منفرد را در جهت خلاف بردار یکة منفرد ترک نمایند، (لازم بهذکر است که بردار یکة منفرد در دستگاه ۳ با بردار $(0,0,1)$ تعریف می‌شود). بهجز این موارد مسیرهای ممکن هیچ محدودیت دیگری نخواهند داشت.

اما با دقت در رابطة (۳۳) ملاحظه می‌شود که اگر پارامترهای d_4 و a_2 با هم برابر باشند، در حالتی که ε برابر ۱- است، مقدار A صفر می‌شود و مسیر ممکنی که بتواند در جهت منفرد نقطة منفرد را ترک نماید وجود ندارد.

بهروش مشابه می‌توان در خصوص سه درجه آزادی دوم نیز محاسبات را دنبال کرد و مسیرهای ممکن را برای این روبات بهدست آورد.

۶- نتیجه‌گیری

یکی از راههای خارج نمودن روبات از حالت منفرد، استفاده از مسیرهای مناسب می‌باشد. مسیرهای ممکن برای خروج از وضعیت منفرد با محدودیتهایی روبرو خواهند بود که این محدودیتها با توجه به ویژگیهای هندسی حالت منفرد تعیین می‌شوند.

در این مقاله روشی ارائه شد که توسط آن مسیر ممکن در جهت منفرد برای روباتی را که در شروع مسیر خود در وضعیت منفرد قرار گرفته شناسایی نمود. بهاین منظور توسط روش تجزیه مقدار منفرد، الگوریتمی جهت شناسایی مسیرهای ممکن در جهت منفرد، ارائه شد و در آخر با استفاده از الگوریتم پیشنهادی مسیرهای ممکن جهت خروج از وضعیت منفرد برای یک روبات شش درجه آزادی تعیین شدند.

مراجع

[1] Nakamura Y. and Hanafusa H. "Inverse kinematic solution with singularity robustness for robot manipulator control", ASME J. of Dyn. Sys., Meas. and Control, Vol.108, Sept. 1986.

[2] Pohl E. and Lipkin H. "A new method of robotic rate control near singularities", Proc. of IEEE Int'l. Conf.. on Robotics and Automation, 1991.

[3] Senft V. and Hirzinger G. "Redundant motions of nonredundant robots - a new approach to singularity treatment", Proc. of IEEE Int'l. Conf.. on Robotics and Automation, 1995.

[4] Chen Y.C., Seng j. and Oneil K. "A predictive algorithm for rate control of mechanisms near singularities", the Int'l. J. of Robotics Research, Vol. 17, No. 6, 1998.

[5] Karger J. and Adolf M. "Classification of robot-manipulators with singular configuration" J. of Mechanisms & Machine Theory, Vol. 30, No.5, 1995.

[6] Lutkepohl H. "Handbok of matrices", John Wiley Pub., 1996.

[7] Martin P. "Matrix theory and finite mathematics", Mc Graw Hill Pub. 1991.

[8] Golub G.H. and Van Loan Ch. F. "Matrix computation", John Hopkins University Press, Baltimore 1989.