بررسی پایداری مودهای شبکهٔ نوسانسازهای تزویج شده در دو آرایش تزویج خطی و حلقوی

علی بنائی — استادیار دانشکدهٔ مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف
فروهر فرزانه — دانشیار دانشکدهٔ مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

در این مقاله شبکهای از N اسیلاتور با تزویج متقابل ضعیف در نظر گرفته شده و مودهای پایدار نوسان مشترک این اسیلاتورها بهدست آورده شده است. در حالت تزویج نوسانسازها در یک آرایش خطی تنها مود پایدار مود نوسان هم فاز اسیلاتورهاست، حال آنکه برای آرایش حلقوی نشان داده میشود که مود مزاحم پایدار دیگری نیز وجود دارد.

کلمات کلیدی: نوسانسازهای هماهنگ شونده، نوسانسازهای تزویج شده.

Theoretical Investigation of the Modes Stability in an Array of Coupled Oscillators for Linear and Circular Arrangements

A. Banai and F. Farzaneh
Faculty of Elec. Eng., Sharif University of Technology

Abstract

In this paper an array of N oscillators coupled weakly to each other is considered. The stability of the main mode (in phase) in linear arrangement of oscillators has been proven and also the instability of other modes in this configuration. However for circular arrangement it is shown that another stable mode may be exist if N is greater than 5.

Key words: Synchronized oscillators, Interinjection locking.

۱- مقدمه

تولید امواج با قدرت کافی در بخش فرستنده سیستمهای مخابراتی همواره از مسائل مهم در طراحی آن می‌باشد. مزیتهای استفاده از ادوات نیمه هادی همواره مهندسین را بهسوی استفاده هر چه بیشتر از آنها کشانده است. وجود محدودیت ذاتی در عناصر نیمه هادی که باعث کاهش توان خروجی با افزایش فرکانس می‌گردد دستیابی بهعناصری با تواندهی زیاد در فرکانسهای بالا و امواج میلیمتری را با مشکل مواجه می‌سازد. در صورتیکه بتوان توان خروجی تعداد زیادی از این عناصر را با هم بهصورت مناسبی ترکیب کرد می‌توان به توان قابل ملاحظهای دست یافت. ترکیب توان می‌تواند بهصورتهای مختلفی صورت گیرد [۱]. از روشهای شناخته شده و معمول، استفاده از ترکیب کنندههای توان(۱) برای ترکیب توان خروجی تقویت کنندهها می‌باشد. اشکال اصلی این روش در پایین بودن راندمان ترکیب کنندههای توان خصوصاً در فرکانسهای بالا، می‌باشد. برای افزایش راندمان می‌توان ترکیب توان را در فضا(۲) انجام داد [۲].

در روشهای فوق سیگنال تولید شده توسط تقویت کنندههایی، تقویت شده و نهایتاً توان آنها با هم به صورت مداری یا تشعشعی ترکیب می‌گردد. در رویکردی دیگر می‌توان شرایطی را فراهم آورد که تعدادی اسیلاتور بهصورت هماهنگ با یکدیگر بهنوسان در آمده، بهصورت مناسب توان خروجی آنها را با هم ترکیب نمود. در این حالت نیز ترکیب توان خروجیهای اسیلاتورها می‌تواند بهصورت مداری یا فضایی صورت گیرد. در ترکیب کنندههای فضایی عناصر فعال (مانند دیودگان یا ترانزیستور) بر روی صفحهای چیده می‌شوند و بههر عنصر فعال، عنصر تشعشع کنندهای)مانند آنتنهای پچ(۳)) متصل است که نقش مشدد را نیز بهعهده دارد. هر عنصر فعال با مشدد خود به نوسان درآمده و در فضای آزاد تشعشع می‌کند. این عناصر نوسان کننده می‌توانند توسط یک مرجع نوسانساز هماهنگ(۴) شوند و یا با اثرگذاری متقابل بر روی یکدیگر، بهطور جمعی هماهنگ شده و با یک فرکانس مشترک بهنوسان در آیند [۳]. با چیدن مناسب این عناصر نوسان کننده در صفحه و در صورتی که نوسان بهصورت هم فاز صورت گیرد می‌توان پرتوی تشعشعی

1- Power combiners
2- Spatial power combiners
3- Patch
4- Synchronized

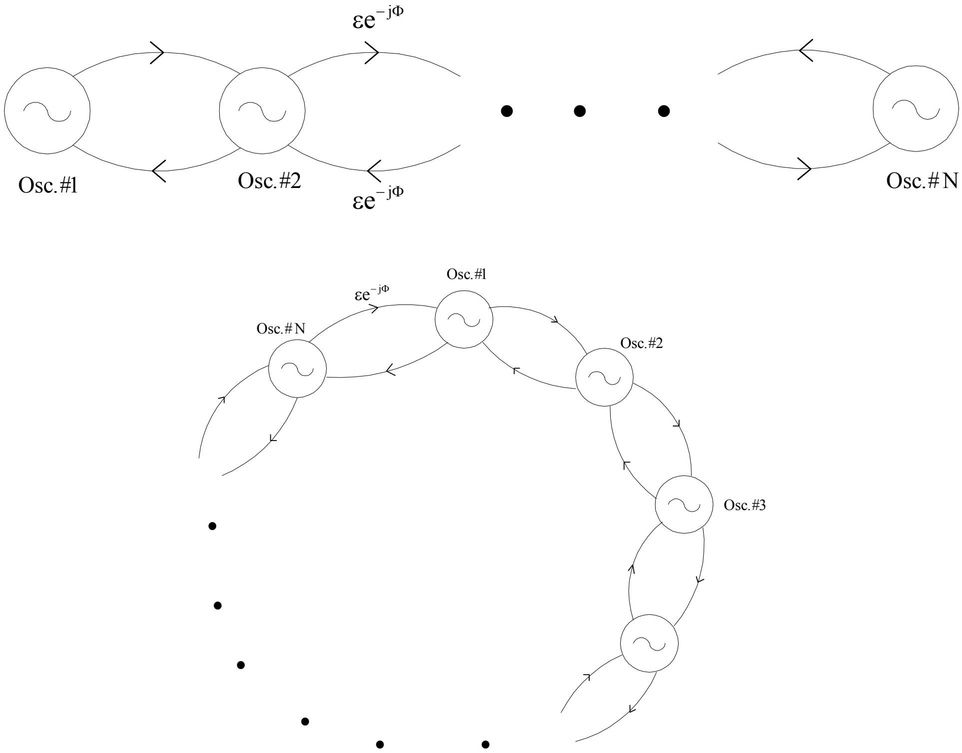
در مقابل این صفحه بهوجود آورد. برای تعدادی از اسیلاتورها که بین آنها تزویج ایجاد شده است امکان نوسان هم فاز یا غیر هم فاز در فرکانس مشترک وجود خواهد داشت. هر کدام از این حالتها را یک مود نوسان می‌نامیم. روش تزویج بین اسیلاتورها تأثیر مستقیمی بر مودهای پایدار شبکهٔ نوسانسازها خواهد داشت. برای شبکهٔ نوسانسازها با تزویج خطی نشان داده شده است که مود هم فاز مود پایداری است [۴]. در این مقاله اثبات خواهد شد که این مود تنها مود پایدار شبکه خواهد بود، همچنین برای شبکهای با آرایش حلقوی نشان داده می‌شود که مودهای پایدار دیگری نیز علاوه بر مود اصلی هم فاز وجود خواهد داشت.

۲- نوسانسازهای تزویج شده به یکدیگر

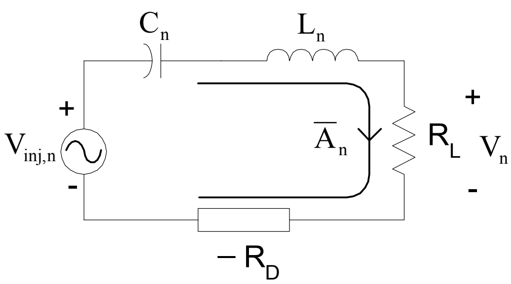
مجموعهای از نوسانسازها را که بهیکدیگر تزویج شدهاند در نظر بگیرید. اثرگذاری یک اسیلاتور لزوماً بر تمام اسیلاتورهای دیگر صورت نمی‌گیرد، بهعنوان مثال هر اسیلاتور با اسیلاتورهای مجاور خود در اندرکنش متقابل است. در شکل (۱) دو آرایش خطی، حلقوی و تزویج متقابل اسیلاتورها به صورت نمادین نشان داده شده است. آرایش خطی مدل مناسبی برای آرایهای خطی از آنتنهای تشعشع کننده متصل به نوسانسازها می‌باشد. آرایش حلقوی لزوماً به این معنا نیست که اسیلاتورها در حلقهای چیده شده باشد بلکه منظور وجود تزویج بین عنصرهای اول و Nام در شبکه می‌باشد که می‌تواند بهصورت مداری نیز ایجاد گردد.

برای هر اسیلاتور یک مدل تشدید سری مانند شکل (۲) در نظر می‌گیریم. $\overline{A_n}$ فیزور جریان حلقه می‌باشد. $-R_D$ معرف تابع توصیفی مقاومت منفی عنصر فعال است. برای سادگی بخش راکتانسی عنصر فعال را جذب امپدانس بخش خطی کردهایم. این کار برای عناصر فعالی که تغییرات راکتانس آنها با دامنه نوسان کوچک است صحیح می‌باشد. $V_{inj,n}$ معرف مجموع تمام اثرات خارجی بر این اسیلاتور است بنابراین در حالتیکه اثرپذیری فقط از اسیلاتورهای شبکه باشد می‌توان نوشت:

$$V_{inj,n} = \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{N} k_{nm}.V_m = \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{N} \varepsilon_{nm} R_L e^{-j\Phi_{nm}} A_m e^{j\theta_m} \qquad (۱)$$



شکل ۱- الف- آرایش خطی ب- آرایش حلقوی



شکل ۲- مدل سری نوسان برای اسیلاتور nام

که $K_{nm} = \varepsilon_{nm} e^{-j\Phi_{nm}}$ ضریب تزویج بین دو اسیلاتور nام و mام است $(K_{nm} = K_{mn})$ که می‌تواند صفر نیز باشد. اندازهٔ ضریب تزویج ε_{mn} و فاز ضریب تزویج Φ توسط نحوهٔ تزویج اسیلاتورها معین می‌گردند. فرکانس نوسان آزاد اسیلاتور (ω_n) توسط L_n و C_n تعیین می‌گردد. ω_n ها می‌توانند متفاوت بوده ولی حول یک فرکانس ω_0 توزیع شده‌اند. دامنهٔ نوسان آزاد اسیلاتور را نیز یکسان و برابر با A_0 می‌نامیم. با وارد شدن $V_{inj,n}$ در حلقه مدار برقراری شرط نوسان به هم می‌خورد. با فرض اینکه تأثیر $V_{inj,n}$ در حلقهٔ نوسان جزئی است دامنهٔ نوسان و فاز نوسانساز حول مقادیر نوسان آزاد تغییرات اندکی دارند یعنی می‌توان فرض کرد:

$$V_n(t) = R_L A_n(t).e^{j(\omega_n t+\varphi(t))} = R_L A_n(t).e^{j\theta(t)} \qquad (۲)$$

بهگونهای که:

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dt} \ll \omega_0 \quad \text{و} \quad \frac{d\varphi}{dt} \ll \omega_0 \qquad (۳)$$

با این فرض و نوشتن KVL در حلقهٔ مدار شکل (۱) بهمعادلات دیفرانسیل زیر برای $V_n(t)$ می‌رسیم [۴]:

$$\frac{dV_n}{dt} = V_n\left[\frac{-\omega_n}{2Q}\left(1-\frac{R_D}{R_L}\right) + j\omega_n\right] + \frac{\omega_n}{2Q}V_{inj,n}$$
$$n = 1,2,\ldots,N \qquad (۴)$$

با کمک (۲) و تفکیک قسمتهای حقیقی و موهومی این معادلات به دو دسته معادلات دیفرانسیل برای $A_n(t)$ و $\theta_n(t)$ خواهیم رسید:

$$\frac{dA_n}{dt}=\frac{\omega_n}{2Q}A_n\left(1-\frac{R_D}{R_L}\right)+\frac{\omega_n}{2Q}A_n.\mathrm{Re}\left\{\frac{V_{inj,n}}{V_n}\right\}$$

(۵-الف)

$$\frac{d\theta_n}{dt}=\omega_n+\frac{\omega_n}{2Q}\mathrm{Im}\left\{\frac{V_{inj,n}}{V_n}\right\} \qquad \text{(۵-ب)}$$

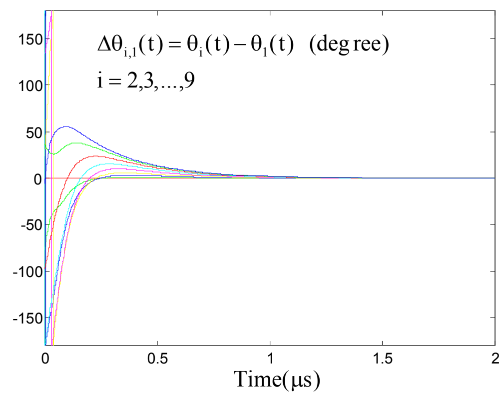
R_D – خود تابع دامنهٔ نوسان است. با فرض تزویج کوچک بین اسیلاتورها $|V_{inj,n}|\langle\langle|V_n|$ خواهند بود در این صورت دامنهٔ نوسان اسیلاتورها نزدیک به مقدار نوسان آزاد آنها باقی خواهند ماند. بنابراین معادلات (۵- الف) و (۵- ب) از هم مستقل خواهند شد و با این فرض نیازی بهدانستن تابعیت R_D – برحسب دامنهٔ نوسان نخواهد بود. معادلات (۵- ب) اطلاعات زیادی در مورد رفتار فاز اسیلاتورها از قبیل فرکانس نوسان، سرعت تغییرات فاز و پهنای باند قفل شدن[1] در اختیار می‌گذارند، که بهصورت زیر نیز قابل بیان است:

$$\frac{d\theta_n}{dt}=\omega_n+\frac{\omega_n}{2Q}\sum_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N}\varepsilon_{nm}\frac{A_m}{A_n}.Sin(\theta_m-\theta_n-\Phi_{nm})$$

(۶)

حل معادلات (۵) یا (۶) بهصورت عددی امکانپذیر است. بهعنوان مثال شبکهای از ۹ اسیلاتور مشابه با فرکانس نوسان آزاد $1\ GHz$ و دامنهٔ نوسان آزاد $A_0=1\ Amp$ و $Q=10$ را در نظر بگیرید. برای آرایش خطی با ضریب تزویج $0.1e^{j2\pi}$ اختلاف فاز اسیلاتورهای شبکه با اسیلاتور اول برحسب زمان برای یک شرایط اولیه دلخواه در شکل (۳) رسم شده است. حل عددی با روش Range-Kuta مرتبهٔ ۴ صورت گرفته است.

واضح است که پس از گذشت زمانی اختلاف فاز بین اسیلاتورها با زمان تغییر نمی‌کند و این بهمعنای نوسان هماهنگ اسیلاتورهاست. در شکل فوق اسیلاتورها بهصورت هم فاز با هم نوسان می‌کنند، در صورتیکه فرکانس نوسان آزاد اسیلاتورها یکسان نباشند اختلاف فاز جزئی ثابت با زمان بین اسیلاتورها برقرار خواهد شد. همچنین اگر فاز ضریب تزویج بین اسیلاتورها مقدار دیگری بود اختلاف فاز ثابت غیر صفری بین اسیلاتورها بهوجود می‌آمد. اگر شبیهسازی با هر شرایط اولیهٔ دیگری نیز صورت می‌گرفت شبیهسازی بههمین جواب منتهی می‌گردید. اگر همین شبیهسازی را برای ۹ اسیلاتور فوق با آرایش حلقوی انجام دهیم بستـه به فاز اولیهٔ اسیلاتورها به یکی از دو جوابهایی مانند شکل (۴) خواهیم رسید. در شبیهسازیهای فوق ضریب تزویج به گونهای انتخاب گردید که نوسان هماهنگ اسیلاتورها امکانپذیر باشد مسلم است که مقدار بحرانی برای ضریب تزویج وجود خواهد داشت که دیگر امکان قفل شدن اسیلاتورها به یکدیگر وجود ندارد.



شکل ۳- تغییرات فاز نسبی برای اسیلاتوهای آرایش خطی

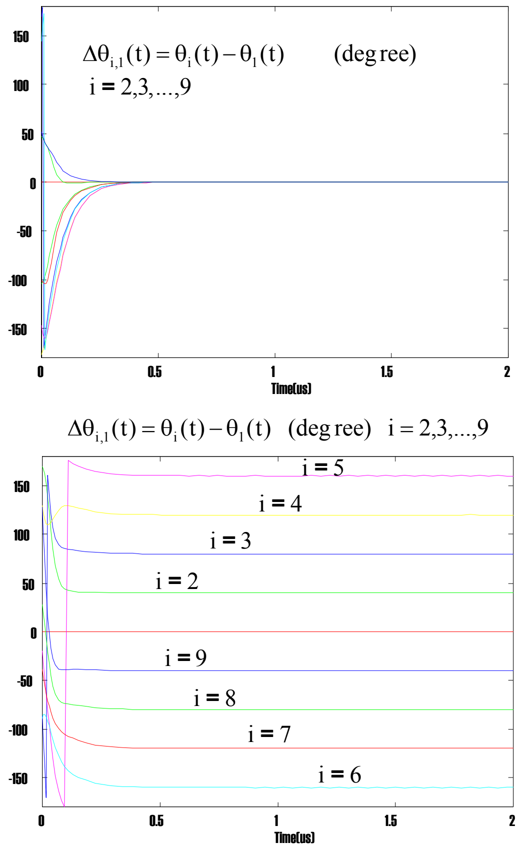
۳- بررسی مودهای پایدار

در این بخش بهبررسی نظری مودهای پایدار دو آرایش خطی و حلقوی می‌پردازیم. ω_0 را فرکانس میانگین توزیع فرکانس نوسان آزاد اسیلاتورها می‌گیریم و اندازه و فاز ضریب تزویج بین عناصر را نیز یکسان فرض می‌کنیم و تعریف می‌کنیم $\alpha=\frac{\varepsilon\omega}{2Q}$ در اینصورت:

$$\frac{d\theta_n}{dt}=\omega_n-\alpha\sum_{\substack{m=n-1\\m\neq n}}^{n+1}Sin(\theta_m-\theta_n+\Phi)$$

$$n=1,2,\ldots,N \qquad (۷)$$

1- Locking bandwidth



شکل ۴- تغییرات زمانی اختلاف فاز نسبی اسیلاتورها در آرایش حلقوی الف- مود اصلی ب- مود مزاحم اول

با تعریف $\Delta\theta_n = \theta_n - \theta_{n+1}$ و $\Omega_n = \omega_n - \omega_{n+1}$ معادلات (۷) بهصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d\Delta\theta_n}{dt} = \Omega_n - \alpha . H_n(\overline{\Delta\theta}) \qquad n = 1,2,\ldots,N-1 \tag{۸}$$

که

$$H_n(\overline{\Delta\theta}) = Sin(\Phi - \Delta\theta_{n-1}) + Sin(\Phi + \Delta\theta_n) - Sin(\Phi + \Delta\theta_n) - Sin(\Phi + \Delta\theta_{n+1})$$

یکی از حالاتی که کاربرد زیادی دارد انتخاب $\Phi = 2k\pi$ است که منجر به مود هم فاز اسیلاتورها می‌شود. با قفل شدن اسیلاتورها به یک فرکانس مشترک، $\frac{d\Delta\theta}{dt} = 0$ خواهد شد در اینصورت (۸) با بیان ماتریسی بهصورت زیر در خواهد آمد:

$$\alpha[A].\overline{S} = -\overline{\Omega} \tag{۹}$$

که

$$\overline{\Omega} = [\Omega_1 \;\; \Omega_2 \;\; \ldots \;\; \Omega_{N-1}]^T$$

$$\overline{S} = [Sin\Delta\theta_1 \;\; Sin\Delta\theta_2 \;\; \ldots \;\; Sin\Delta\theta_{N-1}]^T$$

و

$$[A] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ . & . & & & & & 0 \\ 0 & . & . & . & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$

جواب بردار $\overline{S}$ عبارتست از:

$$\overline{S} = \frac{-1}{\alpha}[A^{-1}].\overline{\Omega}$$

هنگامی برای θ_n ها جواب وجود خواهد داشت که تمامی اندازه عناصر $\overline{S}$ کوچکتر از یک باشند. به ازاء بردار بهدست آمده برای $\overline{S}$، 2^{N-1} جواب مختلف برای بردار $\overline{\Delta\theta}$ خواهیم داشت زیرا هر معادلهٔ سینوسی دو جواب برای آرگومان سینوس بهدست می‌دهد. بهعنوان مثال اگر تمام اسیلاتورها هم فرکانس باشند، یعنی $\overline{\Omega} = \overline{0}$ آنگاه $\overline{S} = \overline{0}$ خواهد شد. اما علاوه بر مود اصلی که در آن $\Delta\theta_n = 0$ است، جوابهای دیگری بهصورت $\Delta\theta_n = k\pi$ نیز می‌توانند وجود داشته باشند. در شبیهسازیها هیچگاه چنین جوابهایی مشاهده نمی‌شود و دلیل آن عدم پایداری این مودهاست. برای بررسی پایداری مودها فرض کنید

در جواب بهدست آمده برای فاز اسیلاتورها، $\hat{\theta}_n$ها، اغتشاش $\delta\theta_n$ وارد گردد یعنی $\theta_n = \hat{\theta}_n + \delta\theta_n$ بنابراین از (۶) داریم:

$$\frac{d(\hat{\theta}_n + \delta\theta_n)}{dt} = \omega_n - \alpha \sum_{\substack{m=n-1 \\ m\neq n}}^{n+1} Sin(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_m + \delta\theta_n - \delta\theta_m + \Phi) \quad (۱۱)$$

با اکتفا به جملهٔ اول بسط تیلور و اینکه

$$\omega_n - \alpha \sum_{\substack{m=n-1 \\ m\neq n}}^{n+1} Sin(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_m + \Phi) = 0 \quad (۱۲)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{d(\delta\theta_n)}{dt} = \alpha \sum_{\substack{m=n-1 \\ m\neq n}}^{n+1} (\delta\theta_n - \delta\theta_m).Cos(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_n + \Phi) \quad (۱۳)$$

برای مود اصلی که $\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_m = 0$ است (۱۳) به صورت ماتریسی قابل بیان است:

$$\frac{d(\overline{\delta\theta})}{dt} = \alpha Cos\Phi.[M].\overline{\delta\theta} \quad (۱۴)$$

$[M]$ ماتریس پایداری

$$[M] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & & & & & . \\ . & . & & & & & . \\ . & . & & & & & 0 \\ 0 & . & . & . & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

بنابراین مود اصلی در آرایش خطی هنگامی پایدار است که تمام مقادیر ویژه ماتریس پایداری دارای قسمت حقیقی منفی باشند. ماتریس فوق حقیقی و متقارن است بنابراین تمام مقادیر ویژهٔ آن حقیقی است، از طرفی چون این ماتریس غالب قطری[1] است یعنی $|m_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{N} |m_{ij}|$ و تمام عناصر قطر آن منفی هستند بنابراین ماتریس منفی معین[۲] بوده و تمامی مقادیر ویژه آن منفی خواهد بود [۵] البته این بهشرطی است که $Cos\Phi > 0$ یعنی $-90^\circ < \Phi < 60^\circ$ باشد. همچنین باید توجه داشت ماتریس پایداری فوق دارای یک مقدار ویژه صفر است. در حالت کلی وجود یک مقدار ویژه صفر برای ماتریس پایداری بهمعنای ناپایداری خواهد بود. اما در مسئله بررسی شده این مقدار ویژه مشکلی ایجاد نخواهد کرد زیرا هنگامی که سیستم را از توزیع فاز خود با وارد کردن اغتشاش اندکی دور می‌کنیم، هر مقدار ویژه در راستای بردار ویژه مربوط بهخود در تغییرات فاز اثر گذارد. یعنی اگر بردار اغتشاش دارای مؤلفههای β_1، β_2 و ... β_N در راستای N بردار ویژه ماتریس باشد داریم:

$$\overline{\delta\theta_0} = \beta_1\overline{P}_1 + \beta_2\overline{P}_2 + \ldots + \beta_N\overline{P}_N \quad (۱۵)$$

P_nها بردارهای ویژه ماتریس $[M]$هستند. اکنون با آزاد گذاشتن سیستم تغییرات فاز سیستم در راستای هر بردار ویژه متناسب با مقدار ویژه آن بردار ویژه خواهد بود، یعنی:

$$\overline{\delta\theta}(t) = \beta_1\overline{P}_1 e^{\lambda_1 t} + \beta_2\overline{P}_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + \beta_N\overline{P}_N e^{\lambda_N t} \quad (۱۶)$$

با منفی بودن تمام مقادیر ویژه میرا بودن اغتشاش تضمین شده است. ولی با داشتن مقدار ویژه صفر اغتشاش در راستای بردار ویژه مربوطه میرا نخواهد شد. اما خوشبختانه بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه صفر برای ماتریس یک بردار با عناصر مساوی است:

$$\lambda = 0 \rightarrow \overline{P} = \frac{1}{\sqrt{N}}[1 \quad 1 \quad \ldots \, 1]^T \quad (۱۷)$$

بنابراین اگر اغتشاش وارده تصویری در راستای این بردار ویژه داشته باشد معنای آن این خواهد بود که به تمامی θ_nها مقدار یکسانی اضافه یا کم خواهد شد و چون کماکان اختلاف فاز بین θ_nها ثابت می‌ماند باز هم با مود $\Delta\theta_n = 0$ سر و کار خواهیم داشت. بنابراین پایداری مود اصلی به اثبات رسید ولی باید ثابت کنیم این مود تنها مود پایدار است. در ادامه فرض می‌کنیم $\Phi = 2k\pi$ و کماکان $\overline{\Omega} = \overline{0}$ از (۱۱) دیده

1- diagonally dominant
2- negative definite

می‌شود مودهای دیگر، مودهایی هستند که باید $\Delta\theta_n = q_n\pi$ که q_nها عدد صحیحی هستند. با وارد کردن اغتشاش $\overline{\delta\theta}$ در بردار $\hat{\theta}$ شبیـه روشی که ماتریس $[M]$ در (۱۴) بهدست آمد به ماتریس پایداری زیر خواهیم رسید:

$$\begin{bmatrix} \bullet & & & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ & \bullet & 0 & 0 & \bullet & & \\ & Cosq_{i-2}\pi & -Cosq_{i-2}\pi - Cosq_{i-1}\pi & Cosq_{i-1}\pi & 0 & \bullet & \\ & 0 & Cosq_{i-1}\pi & -Cosq_{i-1}\pi - Cosq_{i}\pi & Cosq_{i}\pi & 0 & \\ & \bullet & 0 & Cosq_{i}\pi & -Cosq_{i}\pi - Cosq_{i+1}\pi & Cosq_{i+1}\pi & \\ & & \bullet & 0 & 0 & \bullet & \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & & & \bullet \end{bmatrix}$$
(۱۸)

برای اثبات عدم پایداری این مودها کافی است نشان دهیم ماتریس پایداری حداقل دارای یک مقدار ویژهٔ مثبت می‌باشد. بهاین منظور بردار $\overline{x}$ای پیدا می‌کنیم که $\overline{x}^T[M]\overline{x} > 0$ شود و ادعا ثابت می‌شود. فرض کنید:

$$\overline{x} = \begin{matrix}[0 & \ldots & A & B & C & \ldots & 0]^T \\ & \ldots & i-1 & i & i+1 & \ldots & \end{matrix} \qquad (۱۹)$$

پس

$$\overline{x}^T[M]\overline{x} = -A^2(Cosq_{i-2}\pi + Cosq_{i-1}\pi) + 2ABCosq_{i-1}\pi + B^2(Cosq_{i-1}\pi + Cosq_{i}\pi) + 2BCCosq_{i}\pi - C^2(Cosq_{i}\pi + Cosq_{i+1}\pi)$$
(۲۰)

در q_nها حتماً می‌توان q_iای پیدا کرد که عددی صحیح و فرد باشد، (در غیر این صورت ماتریس پایداری بهمهان صورت مود اصلی در خواهد آمد). اگر $i \neq N$ باشد، $C = 0$ می‌گیریم و دو حالت را تشخیص می‌دهیم اگر $q_{i-1} = 2K$ باشد خواهیم داشت:

$$\overline{x}^T[M]\overline{x} = 2AB - A^2(Cosq_{i-2}\pi + 1) \qquad (۲۱)$$

اگر q_{i-2} زوج باشد با گرفتن $A > 0$ و $B > A$ عبارت مثبت می‌شود و در صورت فرد بودن q_{i-2} با هم علامت گرفتن B, A عبارت مثبت می‌شود. برای $i = N$ هم می‌توان $A = 0$ گرفت و استدلال مشابهی کرد. برای $i = 1$ نیز روش کار مشابه خواهد بود. بنابراین ثابت کردیم تنها مود اصلی در آرایش خطی برای شرایط یاد شده پایدار است. اکنون بهبررسی مودها و پایداری آنها در آرایش حلقوی می‌پردازیم.

در اینجا متذکر می‌شویم که همانند مرجع [۴] می‌توان اغتشاش را در اختلاف فازهای $\Delta\theta_n$ وارد کرد یعنی در رابطه (۸) برای هر $\Delta\theta_n$ اغتشاش $\delta\Delta\theta_n$ در نظر گرفته می‌شود با طی قدمهای مشابه بهدستگاه معادلات دیفرانسیل زیر خواهیم رسید:

$$\frac{d(\overline{\delta\Delta\theta})}{dt} = \alpha[M].\overline{\delta\Delta\theta} \qquad (۲۲)$$

در اینجا ابعاد ماتریس پایداری $(N-1)\times(N-1)$ خواهد بود یعنی:

$$[M] = Cos\Phi \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & & & & & . \\ . & . & & & & & . \\ . & . & & & & & 0 \\ 0 & . & . & . & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$
(۲۳)

طبق استدلالهای قبلی تمامی مقادیر ویژه این ماتریس حقیقی و منفی هستند، اما برای این ماتریس مقدار ویژه صفر وجود ندارد

بنابراین پایداری مود اصلی $\Delta\theta_n = 0$ از این راه نیز ثابت می‌شود.

اکنون بهبررسی مودها و پایداری آنها در آرایش حلقوی می‌پردازیم. شروع کار با همان رابطهٔ (۶) می‌باشد. تنها تفاوت آرایش حلقوی با خطی در این است که بین عناصر اول و Nام نیز تزویج وجود دارد. بنابراین:

$$\alpha[A].\bar{S} = -\bar{\Omega} \qquad (۲۴)$$

که:

$$\bar{\Omega} = [\Omega_1 \quad \Omega_2 \quad \ldots \quad \Omega_N]^T$$

$$\bar{S} = [Sin\Delta\theta_1 \quad Sin\Delta\theta_2 \quad \ldots \quad Sin\Delta\theta_N]^T \quad \text{و}$$

$$\Delta\theta_N = \theta_N - \theta_1 \quad \text{و} \quad \Omega_N = \omega_N - \omega_1 \quad \text{و}$$

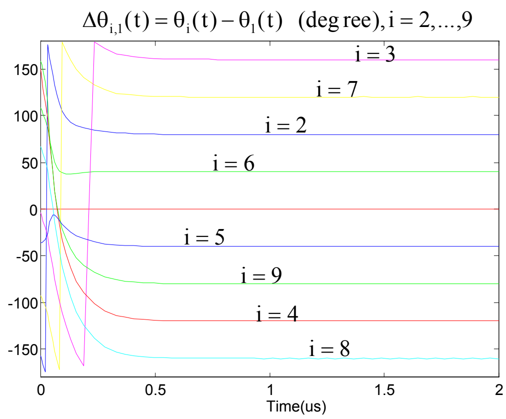
و

$$[A] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & & & & & . \\ . & . & & & & & . \\ . & . & & & & & 0 \\ 0 & . & . & . & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

با فرض هم فرکانس بودن نوسانسازها یعنی $\bar{\Omega} = 0$ در آرایش خطی جواب یگانه $\bar{S} = 0$ بهدست می‌آمد. اما در آرایش حلقوی از آنجائیکه دترمینان ماتریس [A] صفر است علاوه بر جواب $\bar{S} = 0$ جوابهای دیگری نیز می‌توانند وجود داشته باشد. اثبات پایداری مود اصلی $\Delta\theta_N = 0$ و اثبات ناپایداری مودهای دیگر که از جواب $\bar{S} = 0$ ناشی می‌شوند بهطریق مشابه قبل صورت می‌گیرد. همانطور که در شکل (۴) دیدیم علاوه بر مود اصلی مود مزاحم دیگری نیز می‌تواند پایدار باشد. اگر کمی به شکل ماتریس $[A]$ در (۲۴) دقت کنیم در می‌یابیم که برای $\bar{\Omega} = 0$ جواب دیگری بهصورت $\Delta\theta_n = \pm\frac{2k\pi}{N}$ می‌تواند وجود داشته باشد. مثبت یا منفی بودن بهدلیل تقارن حلقوی تأثیری در بحث ما نخواهد داشت. در واقع در این جواب با یک دور چرخش حول N اسیلاتور به فاز مشابه برای اسیلاتور می‌رسیم. حال باید دید به ازای چه مقادیری از K جواب پایدار است. حالت $\Phi = 2\pi$ را در نظر می‌گیریم و ماتریس پایداری $[M]$ را بهطریق قبلی (روش دوم) برای این مودها بهدست می‌آوریم. شکل ماتریس $[M]$ چنین خواهد شد:

$$[M] = Cos\frac{2k\pi}{N}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & & & & & . \\ . & . & & & & & . \\ . & . & & & & & 0 \\ 0 & . & . & . & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{N\times N} \qquad (۲۵)$$

مقادیر ویژه ماتریس $[M]$ بهشرطی منفی خواهند بود که $Cos\frac{2k\pi}{N} > 0$ باشد. با $k = 0$ همان مود اصلی $\Delta\theta_n = 0$ حاصل می‌شود. برای $k = 1$ باید $Cos\frac{2k\pi}{N} > 0$ باشند بنابراین باید $N \geq 5$ باشد تا چنین مود مزاحمی پایدار باشد. توجه کنید $N = 4$ نیز سبب می‌شود که کسینوس مقدار صفر بگیرد که غیر قابل قبول است. لازمه پایداری مود مزاحم متناظر با $k = 2$، $Cos\frac{4\pi}{N} > 0$ است یعنی حداقل ۹ اسیلاتور در شبکه لازم است. این مود در شکل (۵) برای همان تعداد ۹ اسیلاتور و شرایط قبلی رسم شده است.



شکل ۵- تغییرات زمانی اختلاف فاز نسبی اسیلاتورها در آرایش حلقوی برای مورد مزاحم دوم

شرایط اولیه شبیه‌سازی برای فاز اسیلاتورها و اینکه این شرایط حول و حوش کدام مود پایدار باشد، جواب برنامه را به سمت همان مود سوق خواهد داد. به جز سه مود رسم شده در شکلهای (۴) و (۵) جواب دیگری در شبیه‌سازیها مشاهده نشد. باید توجه داشت در مسائل عملی داشتن اسیلاتورهایی با فرکانس دقیقاً یکسان غیر ممکن است. بعبارت دیگر $\overline{\Omega} \neq 0$ می‌باشد. این موضوع سبب می‌شود بین اسیلاتورها پس از قفل شدن بجای جواب $\Delta\theta_2 = 0$ اختلاف فاز جزئی بین آنها بوجود آید. برای مودهای مزاحم نیز همین موضوع صادق است.

۴- نتیجه گیری

بررسی مدهای پایدار در آرایهٔ اسیلاتورهای هماهنگ شونده از اهمیت زیادی در سیستمهای ترکیب توان برخوردار است. در این مقاله ضمن اثبات پایداری مود اصلی در آرایش خطی تزویج بین اسیلاتورها، عدم پایداری سایر مودها نیز برای این آرایش بهاثبات رسید. همچنین در آرایش حلقوی نشان داده شد مودهای مزاحم پایداری برای هنگامی که تعداد اسیلاتورها بیش از ۵ عدد باشد می‌تواند وجود داشته باشند.

مراجع

[1] Navarro, J.A, Hummer, K.A. and Chang, K. "Integrated Active Antennas and Spatial Power Combining", Wiely, 1996.

[2] York, R.A. and Popovic, Z.B. , "Active and Quasi-Optical Arrays for Solid-State Power Combining", Wiely, 1997.

[3] Banai, A. and Farzaneh, F.” Locked and Unlocked Behaviour of Mutually Coupled Microwave Oscillators”, IEE Proc.-Microwave Antennas Propagation, Vol. 147, No.1, pp.13-18, Feb. 2000.

[4] York, R.A. “Nonlinear analysis of phase relationships in quasi-optical oscillator arrays,” IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques, Vol. MTT-41, No. 10, pp. 1799-1809, Oct. 1993.

[5] Horn, R.A. and Johnson, C.R. " Matrix Analysis", Cambridge University Press,1985.